МГОПИ

С.Л.АТАНАСЯН
М.М.ЦАЛЕНКО

ЗАДАЧНИК–ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ОТКРЫТЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

С. Л. Атанасян
М. М. Цаленко

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
для студентов-заочников II—V курсов
физико-математических факультетов
педагогических институтов

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1994

ББК 22.151
А92

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент *Замаховский М. П.*;
доктор физико-математических наук, профессор *Мантуров О. В.*;
кандидат физико-математических наук, доцент *Семенова И. Н.*;
кандидат физико-математических наук, доцент *Парнасский И. В.*;
кандидат физико-математических наук *Парнасская О. Е.*

Редактор МГОПИ Смольникова Е. В.

Атанасян С. Л., Цаленко М. М.

А92 Задачник-практикум по геометрии: Учеб. пособие для студентов-заочников II—V курсов физ.-мат. фак. пед. ин-тов/ Моск. гос. открытый пед. ин-т.— М.: Просвещение, 1994.— 192 с.: ил.— ISBN 5-09-004599-2.

Задачник-практикум соответствует программе по геометрии для физико-математических факультетов педагогических институтов. Он содержит задачи по разделам: «Геометрические построения на плоскости», «Методы изображений» и «Дифференциальная геометрия и топология». Задачник, ориентированный на учебные пособия 1 и 2, призван оказать помощь студентам в приобретении необходимых практических навыков при самостоятельной работе, в выполнении контрольных заданий, а также содействовать более глубокому изучению теоретического материала.

А $\frac{4309000000—215}{103(03)—94}$ заказная **ББК 22.151**

ISBN 5-09-004599-2

Глава I
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

В качестве инструментов построения будем использовать циркуль и линейку. Аксиоматика геометрических построений на плоскости изложена в пособии [1], § 96. Приведем постулаты циркуля и линейки, описывающие шаги построений, которые мы считаем выполнимыми.

П 1. *Построение прямой, проходящей через две построенные точки.*

П 2. *Построение окружности с центром в построенной точке и радиусом, равным отрезку с концами в построенных точках.*

П 3. *Построение точки пересечения двух непараллельных прямых.*

П 4. *Построение точки пересечения построенной окружности и построенной прямой, если они пересекаются.*

П 5. *Построение точек пересечения двух построенных окружностей, если они пересекаются.*

Кроме того, предполагается, что:

а) точки, прямые и окружности, заданные в условии задачи, построены;

б) существует хотя бы одна построенная прямая. На любой построенной прямой или окружности существуют по крайней мере две построенные точки.

При решении задачи на построение будем придерживаться традиционной схемы: *анализ, построение, доказательство, исследование* (см. [1], § 98). Построение будем проводить, ссылаясь на аксиомы П 1 — П 5 или на основные построения, которые будут рассмотрены в § 1. При проведении исследования будем различать два типа задач на построение: а) со связанным решением, если в условии задачи определено расположение искомой фигуры относительно данных; б) со свободным решением, если таких условий нет. В первом случае решения считаются различными, если они не совпадают, во втором — если они геометрически не равны.

Условимся о следующих обозначениях:

$A, B, C, ..., X, Y, Z$ — точки;

$a, b, c, ..., x, y, z$ — прямые.

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B;

$\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, ..., $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — отрезки;

$[AB]$ — отрезок с концами в точках A и B;

$|AB|$ — его длина;

$[A, B)$ — луч с началом в точке A, проходящий через точку B;

α, β, γ, ..., ψ, ω — окружности;

$(O, \tilde{r})$ — окружность с центром в точке O и радиуса $\tilde{r}$;

$(O, [AB])$ — окружность с центром в точке O и радиуса $[AB]$;

$\alpha = (M, \tilde{m})$ — окружность α имеет центр в точке M и радиус $\tilde{m}$;

$\angle ABC$, $\angle\alpha$, $\angle\beta$, ..., $\angle\omega$ — углы;

$\angle(m, n)$ — угол, образованный при пересечении прямых m и n.

Большое число задач связано с построением треугольников. Элементы треугольников будем обозначать следующим образом:

A, B, C — вершины;

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы при соответствующих вершинах;

$\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ — стороны, противолежащие вершинам A, B и C;

$\tilde{h}_a$, $\tilde{m}_a$, $\tilde{l}_a$ — высота, медиана и биссектриса вершины A. Аналогично обозначаются высоты, медианы и биссектрисы других углов;

$\tilde{R}$ — радиус окружности, описанной около треугольника;

$\tilde{r}$ — радиус окружности, вписанной в треугольник.

При построении искомой фигуры введем обозначения, которые помогут нам ориентироваться в шагах построения и читать чертеж. Точки, прямые, окружности, отрезки и т. д., данные в условии задачи, будем обозначать так же, как мы ранее условились, не используя при этом индексов. В дальнейшем каждую фигуру будем снабжать индексом, равным шагу построения, при котором она была построена.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [1], § 96—98.

Выполнить построения, либо используя аксиомы П 1 — П 5, либо сводя их к предыдущим задачам.

1. На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.

2. Даны угол ABC и луч OD. Построить луч OE так, чтобы угол DOE был равен углу ABC.

3. Построить середину данного отрезка.

4. Построить биссектрису данного угла.

5. Даны прямая a и точка A. Построить перпендикуляр к прямой a, проходящий через точку A. (Рассмотреть два случая: $A \in a$ и $A \notin a$.)

6. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

7. Разделить данный отрезок на n равных частей.

8. Построить треугольник, если даны две его стороны и угол между ними.

9. Построить треугольник, если даны его сторона и два прилежащих к ней угла.

10. Построить треугольник, если даны три его стороны.

11. Построить прямоугольный треугольник, если даны его катет и гипотенуза.

12. Построить касательную к данной окружности, проходящую через точку, лежащую вне окружности.

Решение. Анализ. Допустим, что задача решена. Точка X является точкой касания данной окружности α и касательной, проходящей через данную точку A (рис. 1). Если O — центр окружности, то $\angle OXA$ прямой. Поэтому задача сводится к построению прямоугольного треугольника OXA по катету OX, равному радиусу данной окружности, и гипотенузе OA. Построив треугольник OXA, найдем второй катет AX, затем определим точку X.

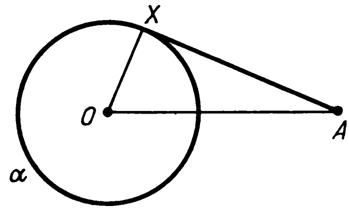


Рис. 1

Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно, используя задачу 11.

Эту задачу можно решить другим способом, используя следующее утверждение: треугольник OXA тогда и только тогда является прямоугольным, когда его медиана m_x равна половине стороны OA.

13. Даны точки O и A. Построить точку A', центрально симметричную точке A относительно точки O.

14. Дана точка O. Построить прямую, центрально симметричную данной относительно точки O.

15. Дана точка O. Построить образ данной окружности при центральной симметрии с центром в точке O.

16. Дана прямая l. Построить образ данной точки при осевой симметрии с осью l.

17. Дана прямая l. Построить образ данной прямой при осевой симметрии с осью l.

18. Дана прямая l. Построить образ данной окружности при осевой симметрии с осью l.

19. Даны точки A и B. Построить образ данной точки при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.

20. Даны точки A и B. Построить образ данной прямой при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.

21. Даны точки A и B. Построить образ данной окружности при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.

22. Даны точка A и угол φ. Построить образ данной точки при вращении вокруг точки A на угол φ.

23. Даны точка O и угол φ. Построить образ данной прямой при вращении с центром в точке O на угол φ.

24. Даны точка O и угол φ. Построить образ данной окружности при вращении с центром в точке O на угол φ.

25. Даны точка O и отрезки $\tilde{m}$ и $\tilde{n}$. Построить образ данной точки A при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k: $k=\tilde{m}:\tilde{n}$.

Решение основано на теореме Фалеса: если X искомая точка, то

$$\frac{[OX]}{[OA]}=\frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}.$$

Построение (рис. 2). Строим:

1) произвольный луч h_1 с началом в точке O, отличный от OA;

2) на луче h_1 такую точку M_2, что $[OM_2]=\tilde{n}$ (см. задачу 1);

3) на луче h_1 такую точку N_3, что $[ON_3]=\tilde{m}$;

4) прямую $l_4=(M_2A)$;

5) прямую m_5, проходящую через N_3 и параллельную l_4 (см. задачу 6);

6) точку X_6 пересечения l_4 и луча OA.

Точка X_6 искомая.

Доказательство и исследование проведите самостоятельно.

26. Даны точка O и отрезки $\tilde{m}$ и $\tilde{n}$. Построить образ данной прямой при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $k=\tilde{m}:\tilde{n}$.

27. Даны точка O и отрезки $\tilde{m}$ и $\tilde{n}$. Построить образ данной окружности при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $k=\tilde{m}:\tilde{n}$.

Решение. Проведем только анализ задачи. Пусть $\alpha':\alpha'=(A', \tilde{r}')$ — образ данной окружности $\alpha:\alpha=(A, \tilde{r})$ при указанной гомотетии. Точка A' является образом точки A при этой гомотетии. Причем ее построение осуществляется с помощью за-

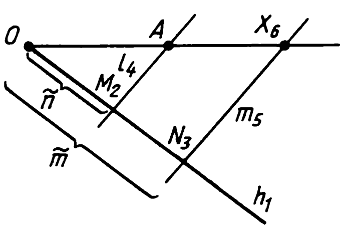


Рис. 2

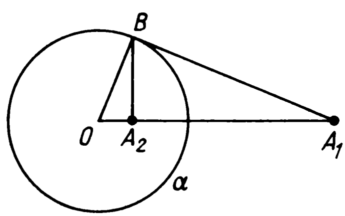


Рис. 3

дачи 25. Радиусы $\tilde{r}$ и $\tilde{r}'$ окружностей α и α' связаны соотношением $\tilde{r}'=\frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}\tilde{r}$. Поэтому если M — произвольная точка окружности α, M' — ее образ при гомотетии, то $\tilde{r}'=[O', M']$. Построив образ точки M, найдем радиус искомой окружности.

28. Дана окружность α. Построить образ данной точки при инверсии с базисной окружностью α.

Решение. Анализ. Если A_1 и A_2 — инверсные точки, O — центр инверсии, r — радиус окружности инверсии, то $|OA_1|\cdot|OA_2|=r^2$. Отсюда если $A_1\in\alpha$, то ее образ совпадает с ней самой. Пусть точка A_1 лежит вне окружности инверсии (рис. 3). Проведем касательную из точки A_1 к окружности α. Опустим из точки касания B перпендикуляр на прямую OA_1. Покажем, что точка A_2 пересечения перпендикуляра и прямой OA_1 является инверсной точке A_1. Действительно, $\triangle OBA_2 \sim \triangle OBA_1$ (как прямоугольные с общим острым углом). Поэтому $[OA_1]:[OB]=[OB]:[OA_2]$, т. е. $|OA_1|\cdot|OA_2|=r^2$. Отсюда для построения точки A_2 достаточно из точки A_1 провести касательную к окружности α, затем из точки касания опустить перпендикуляр на прямую OA_1.

Если точка A_2 лежит внутри окружности α, то инверсная ей точка A_1 лежит вне окружности. При этом сама точка A_1 при инверсии переходит в точку A_2. Поэтому построение точки A_1 заключается в следующем: из точки A_2 восставляем перпендикуляр к прямой OA_2 (см. рис. 3). Через точку B пересечения этого перпендикуляра с окружностью проводим касательную. Точка A_1 является точкой пересечения касательной и прямой OA_2.

Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно.

29. Дана окружность α. Построить образ данной прямой a при инверсии с базисной окружностью α.

Решение. Анализ. Если прямая проходит через центр O инверсии, то при инверсии она преобразуется сама в себя. Пусть a не содержит центр O. Тогда она преобразуется в окружность, содержащую центр O. Для построения этой окружности достаточно из точки O опустить перпендикуляр h на прямую a, найти точку A пересечения a и h и построить точку A', инверсную A относительно α. Искомая окружность построена на $[OA']$ как на диаметре.

Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно.

30. Дана окружность α. Построить образ данной окружности β при инверсии относительно α.

Решение. Анализ. Если окружность β содержит центр инверсии O, то ее образом является прямая b, не проходящая через центр инверсии. Для построения прямой b достаточно найти точку B окружности β, диаметрально противоположную центру O, построить ее образ B' при инверсии и провести через нее прямую b, перпендикулярную OB'.

Если окружность β не содержит центра инверсии, то при инверсии она преобразуется в окружность β'. Для ее построения достаточно найти прямую центров базисной окружности α и окружности β, построить точки M и N пересечения этой прямой с окружностью β, определить точки M' и N', инверсные им. Искомая окружность β' построена на отрезке $[M'N']$ как на диаметре.

Построение, доказательство и исследование проведите самостоятельно.

31. Даны отрезки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ $(\tilde{a} > \tilde{b})$. Построить отрезки $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{a} + \tilde{b},\ \tilde{x}_2 = \tilde{a} - \tilde{b}.$$

32. Даны отрезки $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$. Построить отрезок $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = (\tilde{a}\tilde{b}) : \tilde{c}.$$

33. Даны отрезки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Построить отрезок $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}.$$

34. Даны отрезки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Построить отрезок $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}.$$

35. Даны отрезки $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Построить отрезок $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \sqrt{\tilde{a}\tilde{b}}.$$

§ 2. ЗАДАЧИ, ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ НЕ ТРЕБУЕТСЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

В этом параграфе приведены задачи на построение, решения которых непосредственно сводятся к аксиомам П 1 — П 5 и к основным построениям, изложенным выше.

36. Построить треугольник, если известны $\angle A$, $\tilde{l}_a$, $\tilde{h}_b$.

Р е ш е н и е. А н а л и з. Предположим, что задача решена и треугольник ABC искомый, $[BF] = \tilde{h}_b$, $[AL] = \tilde{l}_a$ (рис. 4). Рассмотрим

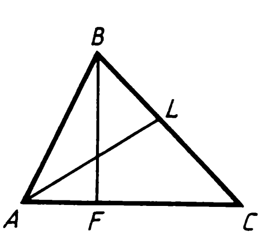


Рис. 4

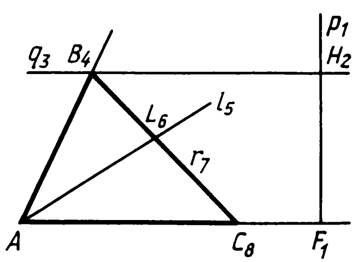


Рис. 5

прямоугольный треугольник ABF. Известны его катет BF и острый угол A, следовательно, его можно построить. Если треугольник ABF построен на плоскости, то нам известно положение стороны AB и угла A искомого треугольника ABC. Построив биссектрису угла A и отложив на ней от точки A отрезок $\tilde{l}_a$, получим точку L. Вершину C треугольника ABC следует искать как точку пересечения прямых AF и BL.

Построение (рис. 5).

1) На стороне данного угла A выберем произвольную точку F_1. Восстанавливаем перпендикуляр p_1 к прямой AF_1.

2) Отложим на прямой p_1 отрезок $\tilde{h}_b$. Выберем такую точку H_2, что $[F_1H_2]=\tilde{h}_b$ и H_2 находятся в той же полуплоскости относительно прямой AF_1, что и вторая сторона угла A.

Строим:

3) прямую q_3, параллельную AF_1 и проходящую через H_2;

4) точку B_4 пересечения q_3 и второй стороны угла A;

5) биссектрису l_5 угла A.

6) На биссектрисе l_5 от точки A отложим отрезок, равный $\tilde{l}_a$. Получим точку L_6.

7) Проводим прямую r_7, проходящую через B_4 и L_6.

8) Определим точку C_8 пересечения r_7 и AF_1.

Треугольник AB_4C_8 искомый.

Доказательство. Из построений 1—4 вытекает, что $\angle A$ построенного треугольника равен данному, а высота вершины B_4 равна $\tilde{h}_b$. Отрезок AL_6 является биссектрисой $\angle A$ и равен $\tilde{l}_a$ (построения 5—8). Треугольник AB_4C_8 искомый.

Исследование. Выясним, будет ли произвольный треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равен построенному. Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$, у которых $\angle A$, высота BF и биссектриса AL равны соответственно $\angle A'$, высоте $B'F'$ и биссектрисе $A'L'$. Тогда прямоугольные треугольники ABF и $A'B'F'$ равны между собой. Отсюда $[AB]=[A'B']$. Следовательно, $\triangle BAL = \triangle B'A'L'$ по двум равным сторонам $[AB]=[A'B']$ и $[AL]=[A'L']$ и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Треугольники ABC и $A'B'C'$ равны между собой.

Выясним также, всегда ли существует единственный треугольник, построенный указанным способом. Легко видеть, что построения 1—7 всегда однозначно выполнимы. Точки C_8 не существует, когда прямая r_7 параллельна стороне AF_1, т. е. когда точка L_6 лежит на прямой q_3. Кроме того, задача имеет решение в том случае, когда точка C_8 лежит на луче AF_1, т. е. точка L_6 находится в той же полуплоскости относительно прямой q_3, что и вершина $\angle A$. Таким образом, задача не имеет решения, если точка L_6 принадлежит прямой q_3 или лежит в полуплоскости относительно этой прямой, не содержащей точку A. В остальном она имеет единственное решение.

37. Построить равносторонний треугольник, если дан радиус его описанной окружности.

38. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{m}_b$.

39. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\tilde{b}$, $\tilde{m}_b$.

40. Построить равносторонний треугольник, если известен радиус его вписанной окружности.

41. Построить ромб, если даны его диагонали.

42. Построить четырехугольник $ABCD$, если известны $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $[AB]$ и $[AD]$.

43. Построить четырехугольник $ABCD$, если даны:

$$[AB], [AC], [AD], \angle CAB \text{ и } \angle DBA.$$

44. Построить четырехугольник, если известны три его стороны и радиус описанной окружности.

45. Построить касательные к данной окружности, параллельные данной прямой.

46. Построить параллелограмм, если известны середины трех его сторон.

47. Провести прямую, равноудаленную от трех данных точек.

48. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{m}_b$, $\tilde{m}_c$.

49. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{h}_b$, $\tilde{h}_c$.

50. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{l}_a$.

51. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{l}_c$, $\tilde{d}$, где $\tilde{d}$ — отрезок перпендикуляра, заключенный между вершиной и биссектрисой $\tilde{l}_b$.

52. Построить ромб, если известны его диагональ и радиус вписанной окружности.

53. Через точку A провести к данному углу секущую так, чтобы ее отрезки, заключенные между сторонами угла и точкой, были равны между собой.

54. Построить параллелограмм по стороне и двум высотам.

55. Найти точку, отрезки касательных из которой к трем равным окружностям имеют одинаковые длины.

56. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{m}_c$.

57. Построить треугольник, если даны $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и $\angle M = \angle B - \angle C$.

58. Построить треугольник, если известны $\angle A$, $\angle B$ и отрезок $\tilde{q}$, равный $\tilde{q} = \tilde{b} - \tilde{a}$.

59. Даны две параллельные прямые, точка A и отрезок p. Разместить данный отрезок между параллельными прямыми так, чтобы перпендикуляр, опущенный на него из точки A, проходил через его середину.

60. Построить треугольник по углу и расстояниям от центра вписанной окружности до двух других вершин.

61. В квадрат $ABCD$ вписать новый квадрат так, чтобы одна из его вершин находилась в точке, данной на стороне AB.

62. Построить квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на окружности, а две другие — на данной прямой.

63. Построить общую касательную к двум данным окружностям.

64. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы сумма образованных на ней хорд равнялась данному отрезку.

§ 3. МЕТОД ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОЖЕСТВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], § 99.

Метод пересечения множеств применяется в задачах, решение которых сводится к построению одной точки, удовлетворяющей двум условиям α_1 и α_2. При этом определяют два множества точек плоскости M_1 и M_2, подчиняющихся условиям α_1 и α_2. Искомая точка принадлежит пересечению M_1 и M_2. Ясно, что в задачах на построение рассматриваются только те множества, которые состоят из прямых и окружностей. Они называются конструктивными.

1. Основные множества точек

В школьном курсе геометрии рассматриваются основные конструктивные множества, которые в дальнейшем будем использовать для решения задач.

1^0. Множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Как известно, это множество представляет собой окружность с центром в данной точке.

2^0. Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек. Это множество представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку с концами в данных точках.

3^0. Множество всех точек плоскости, удаленных от данной прямой на данное расстояние. Этим множеством является пара прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на данное расстояние.

4^0. Множество всех точек плоскости, равноудаленных от сторон угла. Известно, что это множество представляет собой биссектрису данного угла. Аналогично множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, представляет собой биссектрисы двух пар вертикальных углов, образованных при пересечении данных прямых.

5^0. Множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух параллельных прямых. Этим множеством точек является ось симметрии данных параллельных прямых.

Описания построений множеств 1—5 опускаем.

Рассмотрим другие множества, часто используемые при решении задач.

6^0. Множество всех точек плоскости, из которых отрезок виден под данным углом.

Рассмотрим задачу: даны отрезок AB и угол φ. Найти множество $\{M\}$ всех точек плоскости, для которых $\angle AMB = \angle\varphi$.

Решение. Пусть точка M принадлежит искомому множеству. Опишем окружность α вокруг треугольника AMB (рис. 6, *а*). Обозначим меру дуги этой окружности, не содержащей точки M, через $\hat{\varphi}$. $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\hat{\varphi}$. Ясно, что из всех точек дуги AMB отрезок AB виден под данным углом. Пусть точка N принадлежит той же полуплоскости с границей AB, что и точка M, но лежит вне окружности α (рис. 6, *б*). Тогда $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}(\varphi - \overset{\smile}{PRQ})$, т. е. из точки N отрезок AB виден под углом, меньшим данного. Пусть точка N лежит в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и точка M, но находится внутри окружности α (рис. 6, *в*). Тогда $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}(\varphi + \overset{\smile}{PRQ})$. Таким образом, точка рассматриваемой полуплоскости тогда и только тогда принадлежит искомому множеству, когда она является точкой дуги AMB. Осуществив аналогичные рассуждения для точек другой полуплоскости, получим: искомое множество точек представляет собой две дуги, симметричные относительно (AB).

Если данный угол равен прямому, то каждая из дуг является полуокружностью, а все множество — окружностью без точек A и B.

Опишем построение рассматриваемого множества.

1) Отложим от луча AB данный угол $BAM_1 = \angle(m, n)$.

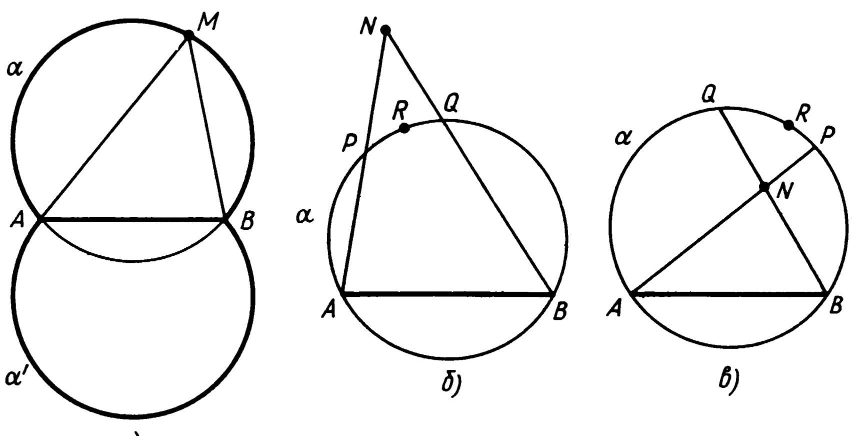


Рис. 6

Строим:

2) прямую p_2, перпендикулярную (AM_1) и проходящую через точку A (рис. 7);

3) точку N_3 — середину отрезка AB;

4) серединный перпендикуляр h_4 отрезка AB.

5) Определим точку O_5 пересечения прямой p_2 и перпендикуляра h_4.

Далее строим:

6) точку O_6, симметричную точке O_5 относительно прямой AB;

7) окружность α_7: $\alpha_7=(O_5, [O_5A])$;

8) окружность α_8: $\alpha_8=(O_6, [O_6A])$.

Дуги окружностей α_7 и α_8 искомые.

Нетрудно показать, что разобранный метод построения приводит к искомому множеству. Действительно, $\angle BAM_1=\angle AO_5N_3$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Так как угол AO_5N_3 равен половине центрального угла AO_5B, то $\angle AO_5B= =2\angle(m, n)$. Отсюда дуга окружности α_7, определяемая центральным углом AO_5B, равна удвоенному данному углу, а вписанные углы, опирающиеся на нее, равны $\angle(m, n)$. Утверждение доказано.

7^0. Окружность Аполлония.

Рассмотрим задачу: «Найти множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояний до двух данных точек равно положительному числу λ, отличному от единицы».

Решение. Пусть A и B — данные точки. На прямой AB существуют точки M и N, для которых $|AM|:|MB|= =|AN|:|NB|=\lambda$. Обозначим через X точку искомого множества (рис. 8). Тогда $|AX|:|XB|=|AM|:|MB|=\lambda$. В треугольнике AXB точка M делит основание AB на отрезки, которые относятся так же, как боковые стороны AX и XB. Поэтому из теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника следует, что XM — биссектриса треугольника AXB. Аналогично показывается, что XN — биссектриса внешнего угла BXP треугольника AXB. Так как углы AXB и BXP смежные, то их биссектрисы взаимно ортогональны. Из точки X отрезок MN виден под прямым углом, следовательно, точка X лежит на окружности, построенной на MN как на диаметре.

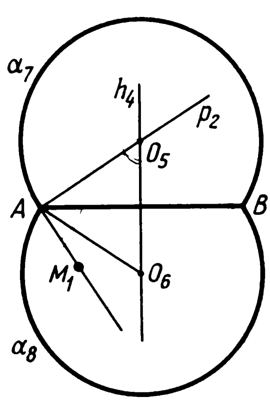


Рис. 7.

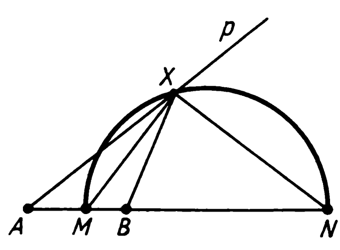


Рис. 8

Обратно, возьмем произвольную точку X окружности, диаметр которой равен $[MN]$ (рис. 9). $\widehat{MXN}=90°$. Пусть точка B лежит между M и N. Проведем через нее прямую, параллельную AX, P и Q — точки ее пересечения с (MX) и (NX). Тогда треугольники AXM и PMB подобны друг другу. Отсюда

$$|AX|:|PB|=|AM|:|MB|=\lambda. \qquad (1)$$

Треугольники BQN и AXN также подобны между собой. Получим:

$$|AX|:|BQ|=|AN|:|BN|=\lambda. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что $|BQ|=|PB|$. Поэтому отрезок BX является медианой прямоугольного треугольника PXQ. Так как медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы, т. е. $|BX|=|PB|$, то из (1) следует равенство $|AX|:|BX|=\lambda$. Утверждение доказано.

Для построения окружности Аполлония необходимо определить точки M и N прямой AB, удовлетворяющие условию: $|AM|:|MB|=|AN|:|NB|=\lambda$. В дальнейшем будем предполагать, что число λ задано в виде отношения двух отрезков: $\lambda=\tilde{m}:\tilde{n}$. Способ построения точек M и N показан на рисунке 10. Отрезки PR и PQ равны $\tilde{n}$, отрезок AP равен $\tilde{m}$. Прямая MP параллельна прямой BQ, (BR) параллельна (PN). Из теоремы Фалеса следует: $[AM]:[MB]=\tilde{m}:\tilde{n}$, $[AN]:[NB]=\tilde{m}:\tilde{n}$.

Мы предположили, что $\lambda\neq1$. Если $\lambda=1$, то искомое множество является серединным перпендикуляром отрезка AB.

8°. Множество всех точек плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек плоскости является постоянной величиной.

Рассмотрим задачу: «Даны точки A и B. Требуется найти множество всех точек плоскости, для которых $|AX|^2-|BX|^2=k^2$, где k — длина данного отрезка $\tilde{k}$.

Р е ш е н и е. Пусть A и B — данные точки. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс совпа-

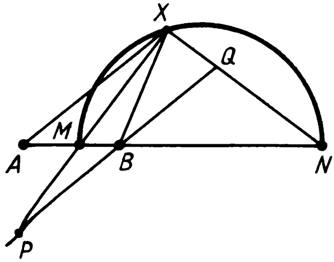


Рис. 9

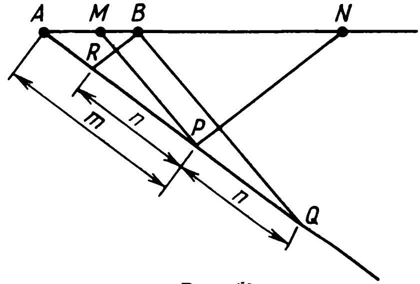


Рис. 10

дала с прямой AB и была сонаправлена с вектором $\overrightarrow{AB}$, а ось ординат проходила через точку A. В этой системе координаты точек A и B равны: $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, где a — длина отрезка AB. Точка $X(x, y)$ тогда и только тогда принадлежит искомому множеству, когда

$$(\sqrt{(x^2+y^2)})^2-(\sqrt{(x-a)^2+y^2})^2=k^2. \quad (3)$$

Отсюда

$$2xa=k^2+a^2,$$

$$x=\frac{k^2+a^2}{2a}. \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) эквивалентны друг другу. Таким образом, точка X тогда и только тогда принадлежит рассматриваемому множеству, когда она лежит на прямой, определяемой уравнением (4). Эта прямая параллельна оси ординат, т. е. перпендикулярна (AB) (рис. 11).

Опишем способ построения рассматриваемого множества. По условию k — длина данного отрезка $\tilde{k}$. Обозначим $[AB]$ через $\tilde{a}$. Построение искомой прямой сводится к построению точки N (см. рис. 11). Обозначим $[AN]$ через $\tilde{x}$. Тогда из уравнения (4) следует:

$$\tilde{x}=\frac{\tilde{k}^2+\tilde{a}^2}{2\tilde{a}}, \text{ или } \tilde{x}=\frac{\sqrt{(\tilde{k}^2+\tilde{a}^2)}\sqrt{(\tilde{k}^2+\tilde{a}^2)}}{2\tilde{a}}.$$

Поэтому прежде всего следует построить отрезок $\tilde{m}_1 : \tilde{m}_1 = \sqrt{\tilde{a}^2+\tilde{k}^2}$ (см. § 1, задача 33) и отрезок $\tilde{n}_2=2\tilde{a}$. Затем строится отрезок $\tilde{x}_3$: $\tilde{x}=\dfrac{\tilde{m}_1\tilde{m}_1}{\tilde{n}_2}$ (задача 32). Далее отрезок $\tilde{x}_3$ откладывается на луче AB от начала A. Через его конец проводится прямая, перпендикулярная (AB), которая и является искомой.

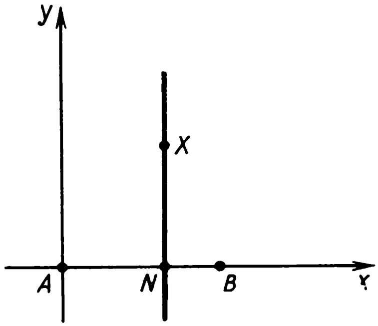


Рис. 11

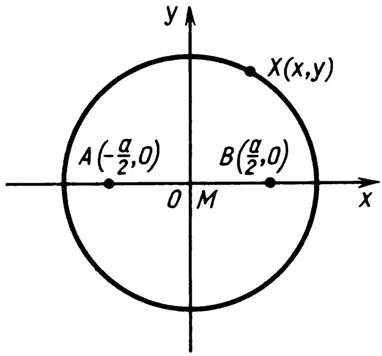


Рис. 12

9^0. Множество всех точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек является постоянной величиной.

Рассмотрим задачу. Даны точки A и B. Построить множество $\{X\}$ всех точек плоскости, для которых $|AX|^2+|BX|^2=k^2$, где k — длина данного отрезка $\tilde{k}$.

Решение. Пусть A и B — данные точки. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат с центром в точке M, середине отрезка AB, ось абсцисс которой совпадает с прямой AB (рис. 12). Пусть a — длина отрезка AB. Точки A и B имеют координаты $A(-\frac{a}{2},\ 0)$, $B(\frac{a}{2},\ 0)$. Точка $X(x,\ y)$ тогда и только тогда принадлежит искомому множеству, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$\left(\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}\right)^2=k^2.$$

Это соотношение эквивалентно уравнению

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}\left(k^2-\frac{a^2}{2}\right).$$

Таким образом, точка тогда и только тогда принадлежит искомому множеству, когда она лежит на окружности с центром в начале координат радиуса r:

$$r=\sqrt{\frac{1}{2}\left(k^2-\frac{a^2}{2}\right)}. \qquad (5)$$

Нетрудно построить отрезок, длина которого вычисляется по формуле (5). По условию дан отрезок k, длина которого $\tilde{k}$. Пусть $[AB]=\tilde{a}$. Строим последовательно отрезки:

$$\tilde{m}_1=\sqrt{\tilde{a}^2+\tilde{a}^2}=\sqrt{2}\tilde{a},\ \tilde{n}_2=\frac{1}{2}\tilde{m}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{a},$$

$$\tilde{p}_3=\sqrt{\tilde{k}^2-\tilde{n}_2^2},\ \tilde{q}_4=\sqrt{\tilde{p}_3^2+\tilde{p}_3^2}=\sqrt{2}\tilde{p}_3,$$

$$\tilde{r}_5=\frac{1}{2}\tilde{q}_4.$$

Определив отрезок $\tilde{r}_5$, строим окружность $(M,\ \tilde{r}_5)$, которая является искомой.

Построения рассмотренных множеств включим в число основных. В дальнейшем, ссылаясь на эти множества, не будем приводить их построения.

65. Дан треугольник ABC. Найти множество вершин всех треугольников, равновеликих данному и имеющих с ним общее основание $[BC]$.

66. Даны две параллельные прямые a и b и отрезки $\tilde{m}$, $\tilde{n}$. Построить множество всех точек плоскости, делящих произвольный отрезок, концы которого лежат на прямых a и b, в отношении $\tilde{m}:\tilde{n}$, считая от прямой a.

67. Даны две пересекающиеся прямые a и b и отрезки $\tilde{m}$, $\tilde{n}$. Построить множество всех точек плоскости, делящих произвольный отрезок, концы которого лежат на прямых a и b и параллельный данной прямой c, в отношении $\tilde{m}:\tilde{n}$, считая от прямой a.

68. Даны две концентрические окружности. Построить множество всех точек, которые являются центрами окружностей, касающихся данных.

69. Даны окружность и точка A. Построить множество середин всех хорд данной окружности, принадлежащих секущим, проходящим через точку A.

70. Даны окружность и ее хорда. Построить множество середин всех хорд этой окружности, равных данной хорде.

71. Окружность видна из точки под углом φ, если угол между касательными, проведенными из данной точки к ней, равен φ. Построить множество всех точек плоскости, из которых эта окружность видна под данным углом.

72. Построить множество всех точек плоскости, для которых отрезки касательных, заключенные между ними и данной окружностью, равны данному отрезку.

73. Под степенью точки A относительно окружности $\omega=(0, \tilde{r})$ понимается число $C_\omega^A=|OA|^2-r^2$. Построить множество всех точек плоскости, для которых степени относительно данных окружностей равны между собой (радикальная ось двух окружностей).

74. Построить множество всех точек плоскости, для которых их степени относительно трех данных окружностей равны между собой (радикальный центр трех окружностей).

II. Применение свойств множеств при решении задач на построение

75. Построить окружность, если известны ее радиус $\tilde{r}$, точка A, принадлежащая ей, и угол α, под которым она видна из второй точки B.

Решение. Анализ. Пусть ω — искомая окружность, O — ее центр, A и B — данные точки, BM и BN — касательные (рис. 13). Угол, под которым видна окружность ω из точки B, равен $\angle NBM$.

Из условия следует, что $\angle NBM=\alpha$. Тогда $\angle OBM=\frac{1}{2}\alpha$.

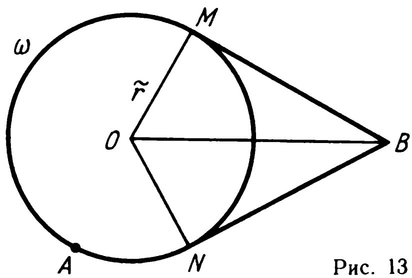


Рис. 13

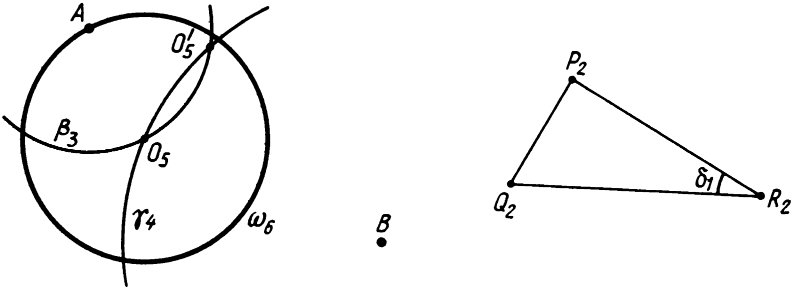


Рис. 14

В прямоугольном треугольнике OMB известны катет OM, равный радиусу $\tilde{r}$, и противолежащий ему $\angle OBM$. Поэтому этот треугольник можно построить и определить отрезок OB. Решение сводится к построению центра окружности ω, точки O. Она принадлежит окружности β с центром в точке A и радиуса $\tilde{r}$, а также окружности γ с центром в точке B и радиуса OB.

Построение (рис. 14). Строим:

1) угол δ_1, равный $\frac{1}{2}\alpha$ (см. § 1, задача 4);

2) прямоугольный треугольник $P_2Q_2R_2$ по катету Q_2P_2, равному $\tilde{r}$, и углу $Q_2R_2P_2$, равному $\angle\delta_1$;

3) окружность β_3: $\beta_3=(A, \tilde{r})$;

4) окружность γ_4: $\gamma_4=(B, [Q_2R_2])$;

5) точку O_5, принадлежащую пересечению окружностей β_3 и γ_4;

6) окружность ω_6: $\omega_6=(O_5, \tilde{r})$.

Окружность ω_6 искомая.

Доказательство. Окружность ω_6 имеет радиус, равный $\tilde{r}$ (построение 6), и проходит через точку A (построения 3, 5 и 6). Так как точка O_5 принадлежит окружности γ_4, центр которой находится в точке B, а радиус $[Q_2R_2]$, то треугольник, образованный отрезком касательной, проведенной из точки B к окружности ω_6, с радиусом этой окружности, соединяющим центр и точку касания, и отрезком O_5B, равен $\triangle Q_2P_2R_2$. Поэтому угол, под которым окружность ω_6 видна из точки B, равен данному углу α.

Исследование. Из анализа следует, что центр искомой окружности принадлежит пересечению окружностей β и γ. Задача имеет связанное решение. Причем если β и γ не пересекаются, то не имеем решения; если касаются, то одно решение; если пересекаются в двух точках (как показано на рисунке 14, точки O_5 и O_5'), то имеем два решения. Отметим, что β и γ не могут совпадать, так как их радиусы различны.

76. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

77. Построить окружность, которая касается двух других окружностей и имеет данный радиус.

78. Построить окружность данного радиуса, проходящую через точку и пересекающую данную окружность по хорде данной длины.

79. Построить окружность, если известен ее радиус, точка, через которую она проходит, и отрезок, равный отрезку касательной, проведенной к ней через вторую данную точку.

80. Даны окружность и внутри ее точка P. Провести через эту точку хорду так, чтобы разность ее отрезков, определяемых точкой P, была равна данному отрезку.

81. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{m}_a$.

82. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{m}_a$ и точка пересечения высоты $\tilde{h}_a$ с основанием $\tilde{a}$.

83. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{R}$, $\tilde{m}_a$.

84. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{m}_b$.

85. Построить треугольник, если известны $\angle A$, $\tilde{m}_a$, $\tilde{h}_b$.

86. Построить треугольник, если даны $\tilde{h}_a$, $\tilde{a}$, $\tilde{R}$.

87. Построить треугольник, если известны $\tilde{h}_a$, $\tilde{m}_a$, $\tilde{m}_c$.

88. Дан прямоугольный треугольник. Построить окружность с центром на одном из катетов так, чтобы она касалась гипотенузы и содержала вершину прямого угла.

89. Построить ромб, если даны две его противоположные вершины и известно, что третья вершина лежит на данной прямой.

90. Даны окружность α, прямая l и точка A, принадлежащая l. Построить окружность, касающуюся окружности α и прямой l в точке A.

91. Даны окружности α и β, а также точка A на окружности α. Построить окружность, касающуюся α и β, причем окружности α в точке A.

92. Даны две концентрические окружности α и β и точка A. Построить окружность, проходящую через точку A и касающуюся α и β.

93. Через точку B, находящуюся внутри окружности, провести хорду, которая делится данной прямой пополам.

94. Через данную точку провести секущую, отсекающую от окружности хорду, равную данному отрезку.

95. Через точку A, находящуюся внутри окружности, провести хорду, длина которой равна удвоенному расстоянию от точки A до центра окружности.

96. Построить параллелограмм, две смежные вершины которого находятся в данных точках, а две другие — на окружности.

97. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\tilde{a}$, $\tilde{h}_a$.

Решение. Анализ. Пусть треугольник ABC искомый. Тогда вершина A удалена от прямой BC на высоту $\tilde{h}_a$. Кроме того, из точки A отрезок BC виден под данным $\angle A$. Поэтому точка A принадлежит двум множествам:

а) множеству всех точек плоскости, удаленных от прямой BC на длину высоты $\tilde{h}_a$;

б) множеству всех точек плоскости, из которых данный отрезок BC (отрезок $\tilde{a}$) виден под данным углом A.

Для построения треугольника достаточно отложить на произвольной прямой отрезок $\tilde{a}$, построить указанные конструктивные множества и найти их точку пересечения.

Построение (рис. 15). Строим:

1) отрезок B_1C_1, равный данному отрезку $\tilde{a}$;

2) прямые p_2 и p_2', параллельные B_1C_1 и удаленные от нее на длину отрезка $\tilde{h}_a$ (множество 3^0);

3) дуги α_3 и α_3', которые представляют собой множество всех точек плоскости, из которых отрезок B_1C_1 виден под $\angle A$ (множество 6^0);

4) точку A_4, принадлежащую пересечению множеств (построения 2, 3).

Треугольник $A_4B_1C_1$ искомый.

Доказательство. Отрезок C_1B_1 равен $\tilde{a}$ (построение 1). В силу построения 4 точка A_4 лежит или на прямой p_2, или на прямой p_2'. Поэтому из построения 2 следует, что высота вершины A_4 треугольника $A_4B_1C_1$ равна $\tilde{h}_a$. Аналогично из построений 3 и 4 также следует, что $\angle C_1A_4B_1 = \angle A$. Построенный треугольник удовлетворяет всем требованиям задачи.

Исследование. В анализе доказано, что вершина A искомого треугольника принадлежит двум множествам. Поэтому

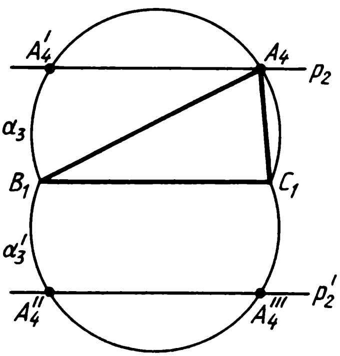


Рис. 15

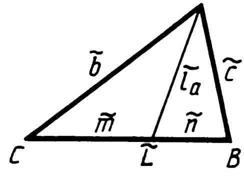


Рис 16

решение зависит от существования точек пересечения этих множеств. Если прямые p_2, p_2' и дуги α_3, α_3' не пересекаются, то решений нет. Прямые и дуги либо могут касаться, тогда существуют две общие точки рассматриваемых множеств, либо пересекаются, тогда существуют четыре общие точки (см. рис. 15). Ясно, что в каждом из этих случаев построенные треугольники равны друг другу. Поэтому если задача имеет решение, то оно единственное.

98. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\angle A$ и точка D, которая является основанием высоты вершины A и принадлежит прямой, содержащей основание $\tilde{a}$.

99. Построить треугольник, если известны $\angle A$, $\tilde{a}$, $\tilde{m}_a$.

100. Построить параллелограмм, если даны его высота, сторона, на которую она опущена, и угол между диагоналями.

101. В окружность вписать прямоугольник так, чтобы две его смежные стороны проходили через две данные точки.

102. Построить прямоугольный треугольник, вписанный в данную окружность, если известен его острый угол и точка, через которую проходит один из катетов.

103. Построить треугольник наибольшей площади, если известны $\angle A$ и $\tilde{a}$.

104. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\angle(\tilde{m}_a, \tilde{c})$.

105. Построить треугольник, если известны $\angle B$, $\tilde{m}_b$, $\tilde{m}_c$.

106. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\tilde{a}$, $\tilde{r}$.

107. Построить прямую, проходящую через данную точку и пересекающую окружность под данным углом.

108. Даны точка, окружность и угол. Построить окружность с центром в данной точке, пересекающую окружность под данным углом.

109. Даны две окружности и их общая внешняя касательная. Построить на касательной точку X так, чтобы сумма углов, под которыми видны окружности из этой точки, была равна данному углу.

110. Через точку провести две прямые так, чтобы они образовывали между собой данный угол и высекали на одной из прямых данный отрезок.

111. Построить треугольник, если известны $\angle A$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{m}_a$.

112. Построить прямоугольный треугольник, если даны его гипотенуза и медиана одного из катетов.

113. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{R}$, $\tilde{m}_b$.

114. Построить равносторонний треугольник ABC, если даны его сторона $\tilde{a}$, а также точки M, N и P пересечения данной прямой m со сторонами AB и AC и биссектрисой AL.

115. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{l}_a$ и известна точка L пересечения основания $\tilde{a}$ с биссектрисой $\tilde{l}_a$ (точка L отлична от середины отрезка $\tilde{a}$).

Решение. Анализ. Пусть треугольник ABC искомый, $[AL]$ — биссектриса $\angle A$, $[AL]=\tilde{l}_a$ (рис. 16). Известно, что $[CL]=$ $=\tilde{m}$ и $[BL]=\tilde{n}$, $\tilde{m}\neq\tilde{n}$. Определим конструктивные множества, содержащие точку A.

1) Точка A удалена от L на длину $\tilde{l}_a$. Поэтому A принадлежит окружности с центром в точке L и радиуса $\tilde{l}_a$.

2) По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника боковые стороны $[AC]=\tilde{b}$ и $[AB]=\tilde{c}$ относятся так же, как отрезки $\tilde{m}$ и $\tilde{n}$: $\tilde{b}:\tilde{c}=\tilde{m}:\tilde{n}$. Так как $\tilde{m}:\tilde{n}\neq 1$, то точка A принадлежит окружности Аполлония, определяемой отрезком $\tilde{a}$ и отношением $\tilde{m}:\tilde{n}$.

Для построения треугольника достаточно на произвольной прямой отложить отрезок $\tilde{a}$, построить указанные множества и найти их точку пересечения.

Построение (рис. 17).

1) Строим отрезок C_1B_1: $[C_1B_1]=\tilde{a}$.

2) На луче C_1B_1 от точки C_1 отложим отрезок C_1L_2:

$$[C_1L_2]=\tilde{m}.$$

Далее строим:

3) окружность α_3: $\alpha_3=(L_2, \tilde{l}_a)$;

4) окружность Аполлония β_4, определяемую отрезком C_1B_1 и отношением $\lambda=\tilde{m}:\tilde{n}$, где $\tilde{n}=\tilde{a}-\tilde{m}$.

5) Определим точку A_5 пересечения α_3 и β_4.

Треугольник $A_5B_1C_1$ — искомый.

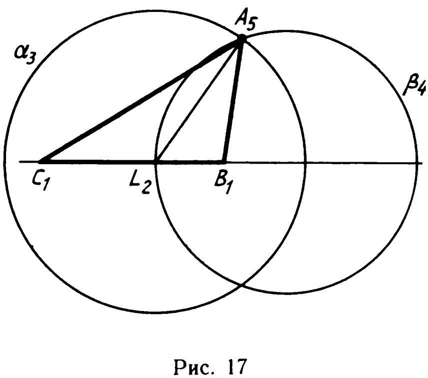


Рис. 17

Доказательство. Основание C_1B_1 равно данному отрезку $\tilde{a}$ (построение 1). Отрезок C_1L_2 равен данному отрезку $\tilde{m}$ (построение 2). Вершина A_5 принадлежит окружности Аполлония β_4 (построения 4, 5), поэтому $[C_1A_5]:[B_1A_5]=$ $=[C_1L_2]:[B_1L_2]$. Отсюда и из теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника следует: отрезок A_5L_2 является биссектрисой $\angle C_1A_5B_1$ построенного треугольника. Вершина A_5 лежит на окружности α_3 (построение 5), поэтому $[A_5L_2]=l_a$ (построение 4). Треугольник $C_1A_5B_1$ искомый.

Исследование. В анализе доказано, что вершина A принадлежит двум множествам: окружности $(L, \tilde{l}_a)$ и окружности Аполлония. Центр L первой окружности лежит на окружности Аполлония. Поэтому они могут:

а) не пересекаться (в этом случае решений нет);

б) касаться (также нет решений, так как их общая точка лежит на прямой CB);

в) пересекаться в двух точках (задача имеет одно решение, так как полученные треугольники равны между собой).

116. На прямой m даны последовательно три точки A, C и B. На второй прямой n найти такую точку X, для которой луч XC является биссектрисой угла AXB.

117. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{l}_a$, $\tilde{b}:\tilde{c}$.

118. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{m}_a$ и отрезки $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$, на которые основание $\tilde{a}$ разделилось биссектрисой угла A.

119. Построить треугольник, если известно его основание $\tilde{a}$ и точки пересечения этого основания с биссектрисой и высотой.

120. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\angle A$ и отношение $\tilde{b}:\tilde{c}$.

121. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{h}_a$ и отношение $\tilde{h}_b:\tilde{h}_c$.

122. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{k}$, где $\tilde{k}^2=\tilde{b}^2+\tilde{c}^2$.

123. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{m}_a$, $\tilde{k}$, где $\tilde{k}^2=\tilde{b}^2+\tilde{c}^2$.

124. На прямой найти такую точку, для которой сумма квадратов длин отрезков касательных, проведенных из этой точки к двум окружностям, равна квадрату длины данного отрезка.

125. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{k}$, где $\tilde{k}^2=\tilde{b}^2-\tilde{c}^2$.

126. Построить треугольник, если известны $\tilde{R}$, $\angle A$, $\tilde{k}$, где $\tilde{k}^2=\tilde{b}^2-\tilde{c}^2$.

127. Даны три окружности. Построить точку, отрезки касательных из которой к этим окружностям равны между собой.

128. Построить окружность, отрезки касательных к которой из трех точек равны трем данным отрезкам.

129. Построить точку так, чтобы отрезки касательных, проведенных через нее к двум окружностям, были равны между собой, а одна из окружностей была видна из этой точки под данным углом.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], § 100.

В § 4—7 приведены задачи, при решении которых используются различные виды движения. При этом цель проведения преобразования состоит в упрощении задачи, построении вспомогательной фигуры, в отыскании закономерностей, позволяющих построить искомое решение.

130. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина лежала на одной прямой, другая — на данной окружности, а высота, проходящая через третью вершину,— на второй прямой.

Решение. Анализ. Допустим, что задача решена и треугольник ABC искомый (рис. 18). Вершины A и B лежат соответственно на окружности ω и прямой m, вершина C и высота $\tilde{h}_c$ — на прямой l. Тогда точки A и B симметричны друг другу относительно прямой l. Поэтому точка B принадлежит как прямой m, так и окружности ω', симметричной окружности ω относительно l. Для построения достаточно найти точку B пересечения m и ω', затем определить ее прообраз, точку A, и достроить отрезок AB до равностороннего треугольника.

Построение. Строим:

1) окружность ω_1', симметричную окружности ω относительно прямой l;

2) точку B_2 пересечения ω_1' и прямой m;

3) точку A_3, симметричную точке B_2 относительно прямой l;

4) окружность α_4: $\alpha_4=(A_3, [A_3B_2])$.

5) Находим точку C_5 пересечения α_4 и l.

Треугольник $A_3B_2C_5$ искомый.

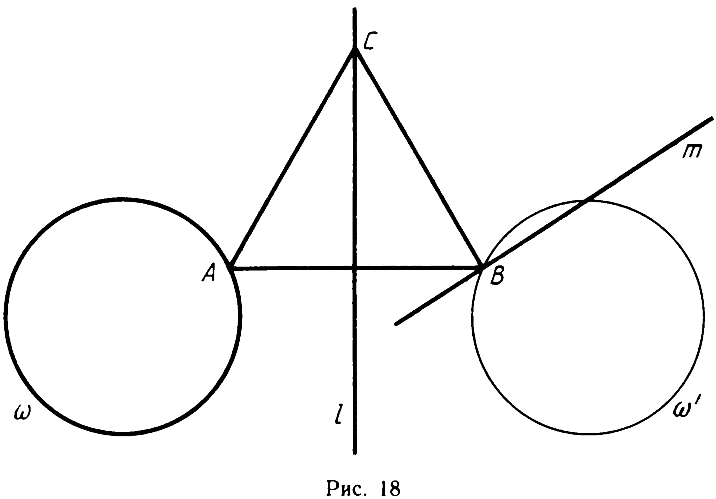


Рис. 18

Доказательство. Точка B_2 принадлежит прямой m (построение 2). Точки A_3 и B_2 симметричны друг другу относительно прямой l (построение 3). Так как точка B_2 лежит на окружности ω_1' (построение 2), то точка A_3 лежит на ее образе при осевой симметрии, т. е. на окружности ω. Как следует из построения 5, точка C_5 принадлежит прямой l, которая является осью симметрии точек B_2 и A_3, поэтому содержит высотv треугольника $A_3B_2C_5$. Построенный треугольник равносторонний, так как отрезки $[A_3B_2]$ и $[A_3C_5]$ равны между собой в силу построений 4, 5, а $[A_3C_5]=[C_5B_2]$, так как прямая l — ось симметрии точек A_3 и B_2.

Исследование. Как показано в анализе, вершины A и B симметричны друг другу относительно прямой l. Ясно, что задача тогда и только тогда имеет решение, когда прямая m и окружность ω_1' имеют общие точки. Если определены вершины A и B треугольника, то существуют точки C и C', каждая из которых является вершиной искомого треугольника. Они совпадают с точками пересечения прямой l и окружности α: $\alpha=(A, [AB])$. Поэтому если окружность ω' касается прямой m, то имеем два решения и четыре решения, если ω' пересекает m (рис. 19).

131. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина лежала на одной окружности, другая — на другой, а высота, проходящая через третью вершину, принадлежала данной прямой.

132. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник

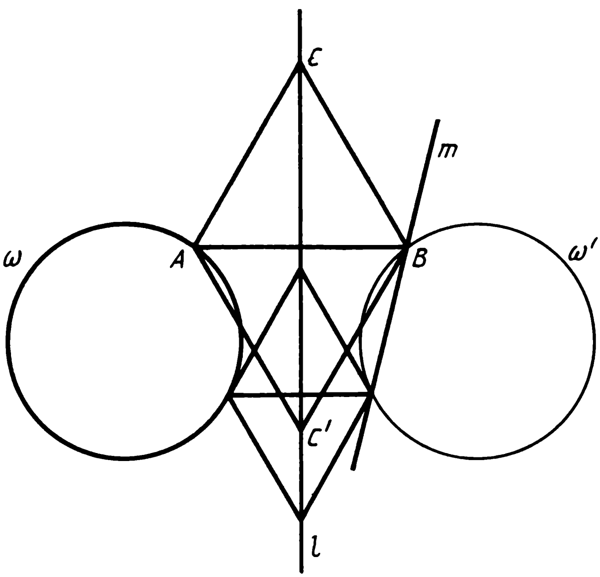


Рис. 19

так, чтобы вершины его острых углов лежали на окружностях, а высота прямого угла — на данной прямой.

133. Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей имела данную длину и лежала на прямой, а две не принадлежащие ей вершины — на двух данных окружностях.

134. В прямоугольник вписать ромб так, чтобы они имели общую диагональ.

135. Построить четырехугольник, если даны его стороны и известно, что диагональ является биссектрисой одного из его углов.

136. Построить треугольник, если даны его вершина и прямые, содержащие биссектрисы, проходящие через две другие вершины.

137. Окружности ω_1 и ω_2 находятся в одной полуплоскости относительно прямой l. Найти такую точку на прямой l, чтобы касательные, проведенные из нее к окружностям ω_1 и ω_2, составляли с ней одинаковые углы.

138. На прямой AB найти такую точку X, соединив которую с данными точками M и N получим углы NXA и MXB, из которых один вдвое больше другого.

139. Построить треугольник наименьшего периметра, если даны $\tilde{a}$ и $\tilde{h}_a$.

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена и треугольник ABC искомый (рис. 20). Вершина A принадлежит l (по условию), параллельной основанию $[BC]$ и отстоящей от нее на длину высоты $\tilde{h}_a$. Поэтому задача сводится к определению на прямой l такой точки A, для которой сумма отрезков AB и AC является минимальной. Пусть точка C' симметрична точке C относительно l. Тогда $[AC]=[AC']$. Нетрудно видеть, что искомая точка A является точкой пересечения прямых l и (BC'). Действительно, пусть точка A' лежит на l и не совпадает с точкой A. $[A'C]=[A'C']$, поэтому $[BA']+[A'C]=[BA']+[A'C']$.

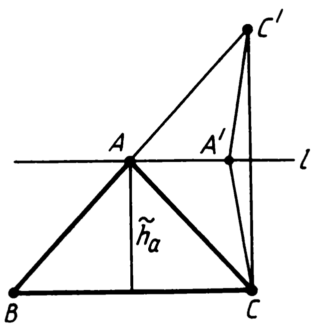


Рис. 20

Но длина отрезка BC' меньше длины ломаной $[BA']+[A'C']$, соединяющей его концы. Следовательно, периметр треугольника BAC меньше периметра треугольника $BA'C$. Для решения достаточно отложить на плоскости отрезок $[BC]$: $[BC]=\tilde{a}$, провести прямую l, отстоящую от (BC) на длину отрезка $\tilde{h}_a$, построить точку C', симметричную точке C относительно l, и соединить точки C' и B.

Построение. Строим:

1) отрезок B_1C_1: $[B_1C_1]=\tilde{a}$;

2) прямую l_2, параллельную B_1C_1 и отстоящую от нее на длину отрезка $\tilde{h}_a$;

3) точку C_3, симметричную точке C_1 относительно l_2;
4) прямую $m_4 : m_4 = (C_3 B_1)$.
5) Определим точку A_5 пересечения l_2 и m_4.
Треугольник $A_5 B_1 C_1$ искомый.

Доказательство. Основание B_1C_1 равно $\tilde{a}$ (построение 1). Высота, опущенная на основание B_1C_1, равна $\tilde{h}_a$ (построения 2, 5). В анализе задачи было доказано, что периметр треугольника $A_5B_1C_1$ минимален.

Исследование. Из анализа следует, что решение всегда существует и единственно. Искомый треугольник является равнобедренным.

140. На прямой l найти точку, сумма расстояний от которой до двух данных точек M и N является минимальной.

141. Внутри угла AOB дана точка M. На сторонах угла AO и BO найти такие точки X и Y, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.

142. Внутри угла даны точки A и B. На прямых, содержащих стороны угла, найти такие точки M и N, для которых ломаная $AMNB$ имеет наименьшую длину.

143. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. Найти на прямой a такую точку X, для которой модуль разности $||AX| - |BX||$ является наибольшим.

144. Даны точки A и B и прямая CD. Найти такую точку X на прямой CD, для которой разность $\angle AXC - \angle BXD$ равна данному углу φ.

145. Даны точки A и B и прямая l. Найти на прямой l такую точку X, для которой разность $\angle BAX - \angle ABX$ равна данному углу φ.

146. Построить треугольник, если известны $\tilde{a}$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{l}_a$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], § 100.

147. Построить параллелограмм так, чтобы две его противоположные вершины лежали в данных точках, а две другие — на окружностях.

Решение. Анализ. Допустим, что параллелограмм $ABCD$ искомый, B и D — данные точки, α и β — данные окружности (рис. 21). Так как даны противоположные вершины B и D параллелограмма, то середина O отрезка BD является точкой пересечения его диагоналей, т. е. центром симметрии. Вершины A и C центрально-симметричны относительно точки O. Поэтому точка C принадлежит как окружности β, так и окружности α' — образу окружности α при центральной симметрии относительно точ-

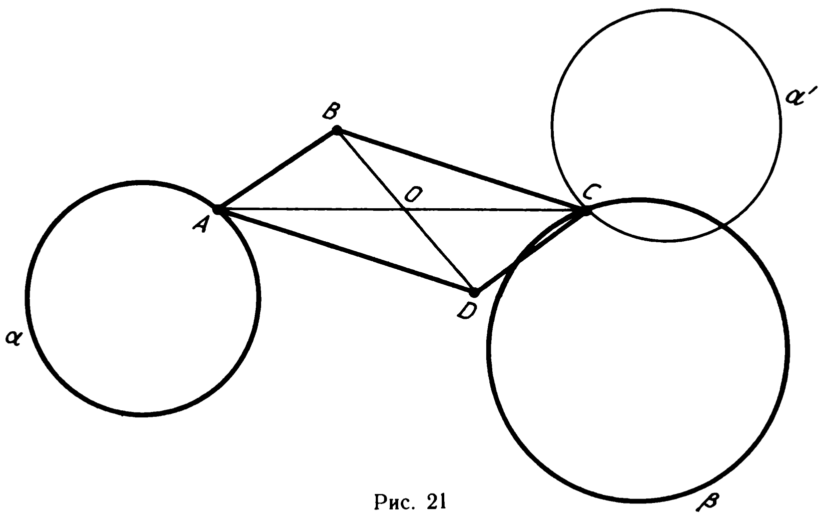


Рис. 21

ки O. Для решения достаточно определить точку O, построить окружность α' и найти точку C как точку пересечения окружностей α' и β.

Построение.

1) Строим точку O_1 — середину отрезка BD.

2) Проводим окружность α_2' — образ окружности α при центральной симметрии с центром в точке O_1.

3) Находим точку C_3 пересечения окружностей β и α_2'.

4) Определим точку A_4, центрально-симметричную точке C_3 относительно точки O_1.

Четырехугольник A_4BC_3D искомый.

Доказательство. Следует доказать, что построенный четырехугольник A_4BC_3D — параллелограмм, а его вершины A_4 и C_3 лежат на окружностях α и β. Вершина C_3 принадлежит β (построение 3). Точки C_3 и A_4 центрально-симметричны друг другу относительно точки O_1 (построение 4). Так как точка C_3 принадлежит окружности α_2', образу окружности α при центральной симметрии с центром в точке O_1 (построения 2, 3), то точка A_4 лежит на окружности α. Точка O_1 — середина отрезка BD (построение 1). Точки A_4 и C_3 центрально-симметричны относительно O_1, поэтому точка пересечения диагоналей является центром симметрии данного четырехугольника. Отсюда четырехугольник A_4BC_3D — параллелограмм.

Исследование. Из анализа следует, что вершины A и C симметричны друг другу относительно середины отрезка BD. Поэтому число решений совпадает с числом общих точек окружностей α' и β. Если окружности: а) не пересекаются, то решений нет; б) касаются, то одно решение; в) пересекаются, то два решения; г) совпадают, то бесконечное множество решений.

148. Даны точка, прямая и окружность. Построить отрезок так, чтобы один из его концов находился на этой окружности, другой — на прямой, а середина совпадала с данной точкой.

149. Даны две пересекающиеся окружности α и β. Построить секущую, проходящую через их точку пересечения так, чтобы хорды, высекаемые на ней этими окружностями, были равны между собой.

150. Построить параллелограмм $ABCD$, если дан его центр O и известно, что противоположные вершины A и C лежат на данных окружностях, а вершины B и D — на данных прямых.

151. Построить квадрат, если известен его центр и две точки, принадлежащие противоположным сторонам.

152. Вписать в окружность прямоугольник так, чтобы две его параллельные стороны проходили через две данные точки.

153. Даны хорды AB и CD окружности ω, а также точка E на хорде CD. На окружности ω найти такую точку X, для которой прямые AX и BX отсекают от (CD) отрезок $[PQ]$ с серединой в точке E.

154. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы разность высекаемых на ней хорд была равна данному отрезку.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], § 100.

155. Даны две окружности. Построить отрезок, равный и параллельный данному, концы которого лежат на этих окружностях.

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена, отрезок XY равен и параллелен отрезку AB, точки X и Y лежат на данных окружностях α и β (рис. 22). Тогда точка X переходит в точку Y при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$. Отсюда точка Y принадлежит как окружности β, так и окружности α', образу окружности α при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$. Для построения точки Y достаточно построить окружность α' и найти ее точку пересечения с окружностью β. Построив точку Y, можно определить точку X как прообраз точки Y при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$, или, что то же самое, как образ точки Y при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$.

Построение. Строим:

1) окружность α_1' — образ окружности α при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$;

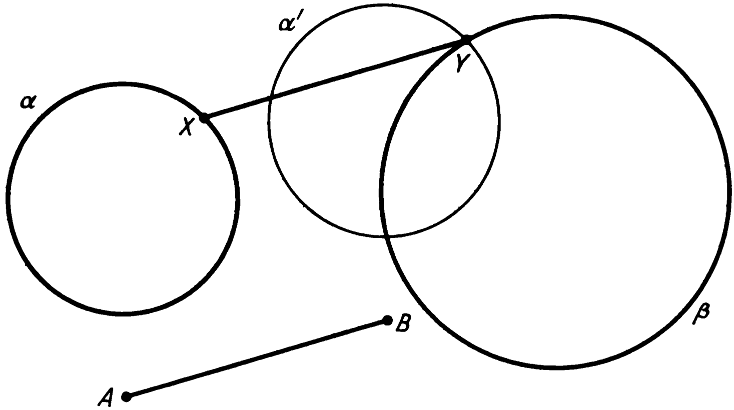


Рис. 22

2) точку Y_2 пересечения окружностей α_1' и β;

3) точку X_3 — образ точки Y_2 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$.

Отрезок X_3Y_2 искомый.

Доказательство. Следует доказать, что $X_3 \in \alpha$, $Y_2 \in \beta$, $[X_3Y_2]=[AB]$, $(X_3Y_2) \| (AB)$, $\overrightarrow{Y_2X_3}=\overrightarrow{BA}$ (построение 3), следовательно, прямые X_3Y_2 и AB параллельны друг другу и $[X_3Y_2]=$ $=[AB]$. Точка Y_2 лежит на окружности β (построение 2). Точка Y_2 также принадлежит окружности α_1', образу окружности α при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ (построения 1, 2). Отсюда следует, что точка X_3 при этом параллельном переносе лежит на окружности α.

Исследование. Из анализа задачи следует, что любой отрезок, удовлетворяющий условию, может быть построен способом, разобранным выше. Число решений зависит от числа общих точек окружностей α' и β. Наряду с параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$ окружность α можно переносить на вектор $\overrightarrow{BA}$. Обозначим через α'' ее образ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$. Возможны следующие случаи:

а) Окружности α' и α'' не имеют общих точек с окружностью β (рис. 23, *а*). В этом случае решения нет.

б) Одна из окружностей α' или α'' касается окружности β, а другая не имеет с ней общих точек. Существует единственное решение (рис. 23, *б*).

в) Одна из окружностей α' или α'' пересекает окружность β, а другая не имеет с ней общих точек. В этом случае существует два решения (рис. 23, *в*). Задача имеет также два решения, если каждая из окружностей α' и α'' касается β.

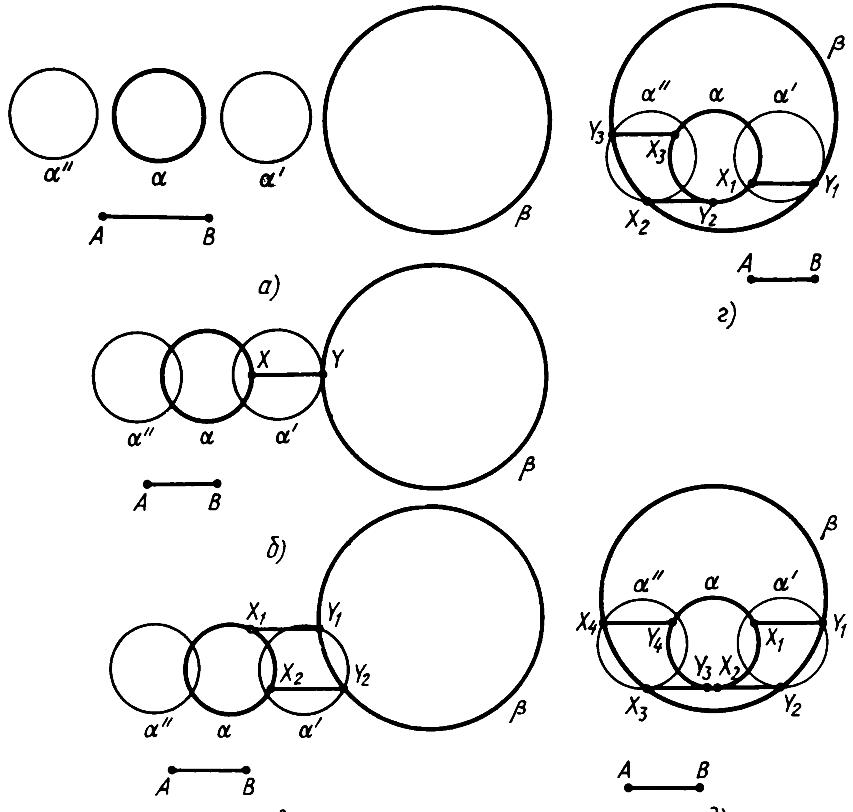


Рис. 23

г) Одна из окружностей α' или α'' касается окружности β, а другая пересекает ее в двух точках. В этом случае существует три решения (рис. 23, *г*).

д) Каждая из окружностей α' и α'' пересекает окружность β. Задача имеет четыре решения (рис. 23, *д*).

е) Одна из окружностей α' или α'' совпадает с окружностью β. В этом случае решений бесконечно много.

156. Даны окружность и прямая. Построить отрезок, равный и параллельный данному, один конец которого лежит на окружности, а другой — на прямой.

157. Даны две прямые. Построить отрезок, равный и параллельный данному, концы которого лежат на этих прямых.

158. Построить трапецию, если известны ее четыре стороны.

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена, трапеция $ABCD$ искомая (рис. 24), $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ — данные отрезки. Если основание $\tilde{a}$ зафиксировано на плоскости, то известно на-

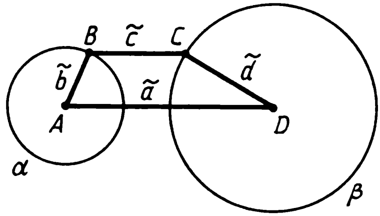


Рис. 24

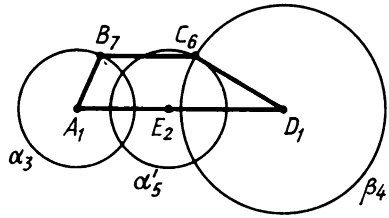


Рис. 25

правление основания $\tilde{c}$. Следовательно, можно построить отрезок, равный и параллельный основанию BC. Вершина B принадлежит окружности α с центром в точке A и радиуса $\tilde{b}$. Аналогично вершина C лежит на окружности β с центром в точке D и радиуса $\tilde{d}$. Поэтому задача сводится к размещению отрезка, равного и параллельного данному, между двумя окружностями.

Построение.

1) На плоскости строим отрезок A_1D_1, равный $\tilde{a}$ (рис. 25).

2) От точки A_1 на прямой A_1D_1 отложим отрезок A_1E_2, равный $\tilde{c}$.

3) Строим окружность $\alpha_3=(A_1, \tilde{b})$.

4) Проводим окружность $\beta_4=(D_1, \tilde{d})$.

5) Находим образ α'_5 окружности α_3 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{A_1E_2}$: $\alpha'_5=(E_2, \tilde{b})$.

6) Определим точку C_6 пересечения окружностей α'_5 и β_4.

7) Строим точку B_7 — образ C_6 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{E_2A_1}$. Четырехугольник $A_1B_7C_6D_1$ искомый.

Доказательство. Требуется доказать, что четырехугольник $A_1B_7C_6D_1$ — трапеция, у которой $[A_1D_1]=\tilde{a}$, $[A_1B_7]=$ $=\tilde{b}$, $[B_7C_6]=\tilde{c}$, $[C_6D_1]=\tilde{d}$. Отрезок $[A_1D_1]=\tilde{a}$ (построение 1). $[B_7C_6]=\tilde{c}$ и $(B_7C_6)\parallel(A_1D_1)$ (построения 2 и 7). Точка C_6 лежит на окружности β_4 (построение 6). Так как из построения 4 следует, что радиус окружности β_4 равен $\tilde{d}$, а центр находится в точке D_1, то $[D_1C_6]=\tilde{d}$. Окружность α_3 имеет центр в точке A_1 и радиус $\tilde{b}$, окружность α'_5 — ее образ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{A_1E_2}$ (построения 3 и 5), поэтому из построения 7 следует, что точка B_7 лежит на окружности α_3, т. е. $[A_1B_7]=\tilde{b}$. Четырехугольник $A_1B_7C_6D_1$ — искомая трапеция.

Исследование. Существование решений зависит от взаимного расположения окружностей α'_5 и β_4. Так как центр E_2 окружности α'_5 лежит на прямой A_1D_1, то, если окружности α'_5 и

β_4 пересекаются, их точки пересечения симметричны относительно (A_1D_1). Решение в этом случае единственное. Если α_5' и β_4 касаются друг друга, то их общая точка лежит на прямой A_1D_1. В этом случае решения нет. Также нет решения, если окружности α_5' и β_4 не имеют общих точек.

159. Построить четырехугольник, если известны три его стороны и углы, прилежащие к четвертой стороне.

160. Построить четырехугольник, если известны его диагонали, две противоположные стороны и угол между ними.

161. Построить четырехугольник, если известны его стороны и угол между одной парой противоположных сторон.

162. Построить четырехугольник, если известны его диагонали, угол между ними и две противоположные стороны.

163. Построить трапецию, если даны ее угол, средняя линия и диагонали.

Решение. Анализ. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция (рис. 26), $[AC]=\tilde{m}$, $[BD]=\tilde{n}$ — данные диагонали, а $\angle BAD=\alpha$ — данный угол. Осуществим параллельный перенос диагонали BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. Получим отрезок CE. Четырехугольник $BCED$ — параллелограмм. $[CE]=[BD]=\tilde{n}$. Так как $ABCD$ — трапеция, то точка E лежит на прямой AD. Отрезок AE равен сумме оснований, т. е. удвоенной средней линии. Поэтому в треугольнике ACE известны три стороны. Построив этот треугольник по трем сторонам, можно определить точку B. Для этого через построенную точку C следует провести прямую, параллельную AE, затем отложить от луча AE угол, равный α. Точка B является точкой пересечения построенных прямой и стороны угла. Затем для нахождения точки D следует от точки E отложить отрезок BC.

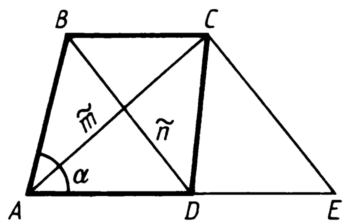


Рис. 26

Построение. Строим:

1) отрезок $\tilde{b}_1$, равный $2\tilde{a}$, где $\tilde{a}$ — данная средняя линия;

2) треугольник $A_2C_2E_2$ по трем сторонам: $[A_2E_2]=\tilde{b}_1$, $[A_2C_2]=\tilde{m}$, $[C_2E_2]=\tilde{n}$.

3) Через точку C_2 проводим прямую l_3, параллельную (A_2E_2).

4) Проводим угол $(p_4, (A_2E_2))=\alpha$.

5) Находим точку B_5 пересечения l_3 и p_4.

6) На луче E_2A_2 от начала E_2 отложим отрезок $E_2D_6=B_5C_2$.

Четырехугольник $A_2B_5C_2D_6$ искомый.

Доказательство. Требуется доказать, что построенный четырехугольник $A_2B_5C_2D_6$ является трапецией, у которой диагонали $[A_2C_2]=\tilde{m}$, $[B_5D_6]=\tilde{n}$, средняя линия равна $\tilde{a}$, а $\angle BAD=\alpha$.

Построенный четырехугольник является трапецией, так как из построений 3, 5 и 6 следует, что $(B_5C_2)\|(A_2D_6)$. Из построений 5 и 6 вытекает, что четырехугольник $B_5C_2E_2D_6$ — параллелограмм. Поэтому $[B_5D_6]=[C_2E_2]$, $[B_5C_2]=[D_6E_2]$. Отсюда диагональ $[B_5D_6]$ равна $-\tilde{n}$, а средняя линия трапеции $A_2B_5C_2D_6$ равна $\tilde{a}$, так как $[A_2E_2]$ совпадает с суммой ее оснований, а по построениям 1 и 2 $[A_2E_2]=2\tilde{a}$. Из построения 2 также следует, что $[A_2C_2]=\tilde{m}$ и $\angle B_5A_2D_6=\alpha$ (по построению 4).

Исследование. Существование решения зависит от того, можно ли построить треугольник $A_2C_2E_2$ по трем сторонам. Если нельзя, то решения нет, если можно, то решение единственно.

164. Построить трапецию, если известны ее диагонали, угол между ними и одна из боковых сторон.

165. Построить трапецию, если даны ее основания и диагонали.

166. Даны прямая l, две параллельные прямые m и n и точки A и B, лежащие вне полосы, определяемой этими прямыми. На прямых m и n найти такие точки X и Y, чтобы прямая XY была параллельна l, а ломаная $AXYB$ имела наименьшую длину.

167. Даны точки A и B, расположенные в одной полуплоскости относительно прямой l. Найти на прямой l такие точки M и N, для которых отрезок MN равен данному отрезку, а ломаная $AMNB$ имеет наименьшую длину.

168. Построить треугольник по трем медианам.

169. Построить треугольник, если даны $\tilde{m}_a$, $\tilde{m}_b$, $\angle(\tilde{m}_a, \tilde{m}_c)$.

170. Построить треугольник, если известны $\angle(\tilde{m}_a, \tilde{m}_c)$, $\angle(\tilde{m}_b, \tilde{m}_c)$, $\tilde{m}_a$.

171. Построить треугольник, если даны $\tilde{m}_a$, $\tilde{m}_c$, $\angle(\tilde{m}_b, \tilde{a})$.

172. Даны хорды AB и CD окружности ω. Найти на окружности ω такую точку X, для которой прямые XA и XB отсекают от хорды CD отрезок, равный данному.

173. Даны точка и две окружности. Через точку провести секущую так, чтобы окружности высекали на ней равные между собой хорды.

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ВРАЩЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], § 100.

174. Даны точка, прямая и окружность. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин лежала в этой точке, другая — на прямой, а третья — на окружности.

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена, вершина A равностороннего треугольника ABC лежит в данной точке, вершина B — на окружности α, вершина C — на прямой l (рис. 27). Отсюда следует, что точка B переходит в точку C при вращении вокруг точки A на ориентированный угол величиной $-\frac{\pi}{3}$. Поэтому точка C принадлежит как прямой C, так и окружности α' — образу окружности при вращении на угол $-\frac{\pi}{3}$ вокруг точки A. Точка C является точкой пересечения α' и l. Построив ее, определим точку B как прообраз точки C при указанном вращении, или, что то же самое, как образ точки C при вращении вокруг точки A на ориентированный угол величиной $+\frac{\pi}{3}$.

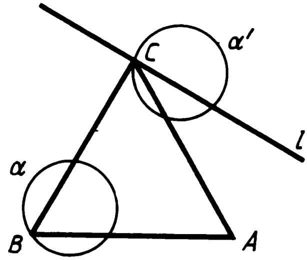


Рис. 27

Заметим, что угол величиной $+\frac{\pi}{3}$ или $-\frac{\pi}{3}$ всегда определен на плоскости. Для этого достаточно построить произвольный равносторонний треугольник.

Построение. Строим:

1) окружность α_1' — образ окружности α при вращении вокруг точки A на угол $-\frac{\pi}{3}$;

2) точку C_2 пересечения α_1' и l;

3) точку B_3 как образ точки C_2 при вращении вокруг точки A на угол $+\frac{\pi}{3}$.

Треугольник AB_3C_2 искомый.

Доказательство. Так как точка B_3 — образ точки C_2 при вращении вокруг точки A на угол $+\frac{\pi}{3}$ (построение 3), то $[C_2A]=[B_3A]$, $\angle B_3AC_2=\frac{\pi}{3}$. Треугольник AB_3C_2 равносторонний. Точка C_2 лежит на прямой l (построение 2), она также принадлежит окружности α' (построение 2), образу окружности α при вращении вокруг точки A на угол величиной $-\frac{\pi}{3}$ (построение 1). Поэтому точка B_3, которая является прообразом точки C_2 при указанном вращении, принадлежит окружности α.

Исследование. Из анализа следует, что в искомом треугольнике вершина C является образом вершины B при указанном вращении вокруг точки A на угол величиной $-\frac{\pi}{3}$. Ясно, что окружность α следует поворачивать не только на угол $-\frac{\pi}{3}$, но и на угол $+\frac{\pi}{3}$. Обозначим через α' образ окружности α

при повороте на угол $-\frac{\pi}{3}$, а через α'' — при повороте на угол $+\frac{\pi}{3}$. Число решений совпадает с числом точек пересечения окружностей α' и α'' с прямой l. Возможны следующие случаи. Прямая l:

а) не имеет общих точек ни с окружностью α', ни с окружностью α'' (рис. 28, *а*). Задача не имеет решения;

б) касается одной из окружностей α' или α'', а с другой не имеет общих точек (рис. 28, *б*). Существует одно решение;

в) либо пересекает одну из окружностей α' или α'', а с другой не имеет общих точек (рис. 28, *в*), либо l касается и α' и α''. В этом случае имеется два решения;

г) касается одной из окружностей α' или α'', другую пересекает в двух точках (рис. 28, *г*). Существует три решения;

д) пересекает в двух точках как окружность α', так и окружность α'' (рис. 28, *д*). Задача имеет четыре решения.

175. Даны точка и окружность. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин находилась в этой точке, а две другие — на окружности.

176. Построить квадрат, если даны его центр и известно, что две смежные вершины принадлежат двум данным окружностям.

177. Даны точка и две прямые. Построить равносторонний треугольник так, чтобы центр его находился в этой точке, а две вершины — на данных прямых.

178. На одной из сторон квадрата дана точка. Вписать в квадрат равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпадала с этой точкой.

179. Даны точка O, две прямые и угол. Построить окружность с центром в точке O так, чтобы ее дуга, заключенная между этими прямыми, определяла центральный угол, равный данному.

180. Даны точка O, две окружности и угол. Построить окружность с центром в точке O, для которой одна из дуг, заключенная между этими окружностями, определяет центральный угол, равный данному.

181. Даны отрезки $[BC]$, $[DE]$, углы φ_1, φ_2 и точка A. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник AMN с вершиной прямого угла в точке A так, чтобы углы BMC и EMD были равны углам φ_1 и φ_2.

182. Построить равносторонний треугольник так, чтобы вершины лежали на трех параллельных прямых, а центр — на четвертой прямой, их пересекающей.

183. Даны окружность с центром в точке O, точки A и B и угол φ. Найти на окружности такие точки C и D, для которых прямые AC и BD являются параллельными, а угол COD равен углу φ.

184. Даны две концентрические окружности с центром в точке O, точка A и угол φ. Провести луч с началом в точке O так,

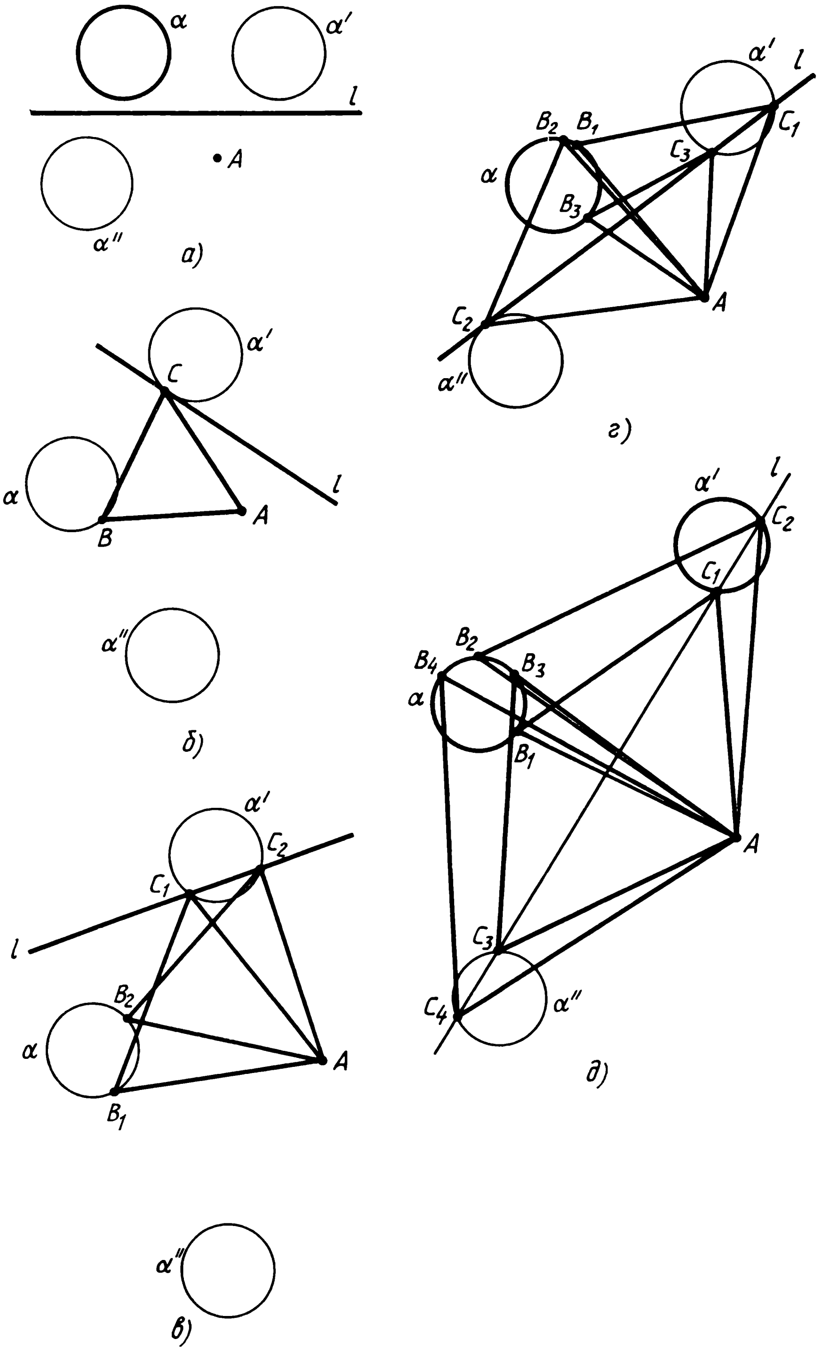


Рис 28

чтобы его отрезок между окружностями был виден из точки A под углом φ.

185. Даны точка A, две окружности и угол φ. Через точку A под углом φ провести прямые l и m, высекающие на данных окружностях равные хорды.

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ПОДОБИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], § 101.

Способ применения преобразования подобия и его частного вида — гомотетии при решении задач на построение отличается от способа применения движения. Хотя в некоторых случаях удобно рассматривать подобие или гомотетию для упрощения и для отыскания закономерностей, позволяющих найти решение, в большинстве задач применяется следующий метод.

Условие задачи делят на две части. Первая определяет искомую фигуру с точностью до преобразования из группы подобия или ее подгруппы, состоящей из гомотетий с фиксированным центром. Ясно, что первую часть образуют такие данные элементы искомой фигуры, которые одинаковы для всех фигур, подобных или гомотетичных искомой. Вторая часть условия позволяет из множества этих фигур выделить решение.

186. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\angle B$, $\tilde{b}+\tilde{c}$.

Решение. Анализ. По условию известны $\angle A$ и $\angle B$, а также отрезок $\tilde{m}$, равный сумме сторон $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ треугольника. Разделим задачу на две части. Первую образуют $\angle B$ и $\angle\ C$, вторую — отрезок $\tilde{m}$. Углы B и C определяют треугольник с точностью до подобия. Построив произвольный треугольник $A'B'C'$, подобный искомому, определим сумму: $\tilde{m}'=\tilde{b}'+\tilde{c}'$, где $\tilde{b}'$ и $\tilde{c}'$ — стороны треугольника $A'B'C'$. Коэффициент подобия искомого треугольника ABC и построенного $A'B'C'$ равен $\tilde{m}:\tilde{m}'$. Отсюда $\tilde{c}=\frac{\tilde{m}}{\tilde{m}'}\tilde{c}'$. Определив сторону $\tilde{c}$, легко построить треугольник ABC по стороне $\tilde{c}$ и двум углам: $\angle A$, $\angle B$.

Построение.

1) Начертим произвольный отрезок $\tilde{c}_1'$.

2) Отложим на концах отрезка $\tilde{c}_1'$ $\angle A$ и $\angle B$. Получим треугольник $A_2'B_2'C_2'$.

Строим:

3) отрезок $\tilde{m}_3':\tilde{m}_3'=\tilde{b}'+\tilde{c}'$, где $\tilde{b}'=[A_2'C_2']$, $\tilde{c}'=[A_2'B_2']$;

4) отрезок по формуле $\tilde{c}_4=\frac{\tilde{m}\tilde{c}_1'}{\tilde{m}_3'}$;

5) треугольник $A_5B_5C_5$ по стороне c_4 и двум прилежащим к ней углам B и A. Треугольник $A_5B_5C_5$ искомый.

Доказательство. Так как в треугольнике $A_5B_5C_5$ $\angle A_5 = \angle A$, $\angle B_5 = \angle B$ (построение 5), то достаточно доказать, что сумма сторон $\tilde{c}_4$, $\tilde{b} = [A_5C_5]$ треугольника $A_5B_5C_5$ равна $\tilde{m}$. Углы треугольников $A_5B_5C_5$ и $A_2'B_2'C_2'$ связаны соотношениями $\angle A_2' = \angle A_5 = \angle A$, $\angle B_2' = \angle B_5 = \angle B_1$ (построения 2 и 5), поэтому они подобны между собой. Коэффициент их подобия равен отношению сходственных сторон. Так как $\tilde{c}_1' : \tilde{c}_4 = \tilde{m}_3' : \tilde{m}$ (построение 4), то $\tilde{b}' : \tilde{b} = \tilde{m}_3' : \tilde{m}$, где $\tilde{b}$ — сторона треугольника $A_5B_5C_5$, противолежащая вершине B_5. Поэтому $\tilde{c}_4 + \tilde{b} = (\tilde{c}_1 + \tilde{b}')\frac{\tilde{m}}{\tilde{m}_3'} \times$ $\times \tilde{c}_1 + \tilde{b}' = \tilde{m}_3'$ (построение 3). Отсюда и из предыдущего равенства вытекает: $\tilde{c}_4 + \tilde{b} = \tilde{m}$.

Исследование. В анализе показано, что любой треугольник, удовлетворяющий условию, подобен треугольнику $A'B'C'$. Коэффициент подобия равен $\tilde{m} : \tilde{m}'$. Так как он определен однозначно, то произвольный треугольник, удовлетворяющий условию, совпадает с ранее построенным. Задача имеет единственное решение, если сумма $\angle A$ и $\angle B$ меньше развернутого.

187. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\angle B$, $\tilde{R}$.

188. Построить треугольник, если известны $\angle A$, $\tilde{b} : \tilde{c}$, $\tilde{r}$*.

189. Вписать в окружность треугольник, подобный данному.

190. Построить треугольник, если даны $\angle B$, $\angle C$, $\tilde{m}_a + \tilde{h}_a + \tilde{l}_a$.

191. Построить прямоугольный треугольник по отношению катета к гипотенузе и другому катету.

192. Построить треугольник, если даны $\tilde{b} : \tilde{c}$, $\tilde{c} : \tilde{a}$, $\tilde{h}_a + \tilde{a}$.

193. Построить треугольник, если известны $\tilde{a} : \tilde{b}$, $\tilde{b} : \tilde{c}$, $\tilde{m}_a + \tilde{m}_b + \tilde{m}_c$.

194. Построить ромб по стороне и отношению диагоналей.

195. Построить прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

196. Построить параллелограмм по стороне, отношению диагоналей и углу между ними.

197. Построить треугольник, если известны $\tilde{h}_a$, $\tilde{h}_b$, $\tilde{a} : \tilde{c}$.

198. Построить треугольник, если даны $\tilde{h}_a$, $\tilde{h}_b$, $\tilde{h}_c$.

199. Построить треугольник, если известны $\tilde{h}_c$, $\tilde{h}_b$, $\angle(\tilde{h}_c, \tilde{a})$.

200. Построить треугольник, если даны $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c} : \tilde{h}_c$.

---

* В этой и последующих задачах предполагается, что если дано отношение $\tilde{b} : \tilde{c}$, то известны два отрезка, отношение которых равно $\tilde{b} : \tilde{c}$.

201. Построить трапецию, если известны отношение $\tilde{a}:\tilde{b}$, основания $\tilde{a}$ к боковой стороне $\tilde{b}$, угол между ними и две другие стороны $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$.

202. Построить четырехугольник, если даны его угол, отношение сторон, составляющих этот угол, диагонали, а также известно, что он вписывается в окружность.

203. Даны точка A и окружность α. Построить секущую, проходящую через точку A, так, чтобы отрезки AM и MN были равны друг другу, где M и N — точки пересечения секущей и окружности α.

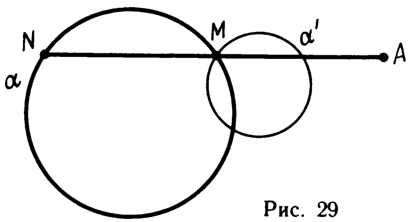


Рис. 29

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена, секущая AN построена, $[AM]=[MN]$ (рис. 29). Тогда $[AM]:[AN]=1:2$. Поэтому точка M является образом точки N при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $1:2$. Отсюда следует, что точка M принадлежит окружности α', образу окружности α при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 1:2. Точка M является точкой пересечения окружностей α и α'. Для построения секущей достаточно найти окружность α' и построить ее точку пересечения с окружностью α.

Построение.

1) Строим окружность α_1' — образ окружности α при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ (см. задачу 27).

2) Находим точку M_2 пересечения окружностей α и α_1'.

3) Проводим прямую $l_3: l_3=(AM_2)$.

Прямая l_3 искомая.

Доказательство. Пусть N — точка пересечения прямой l_3 и окружности α. Так как точки M_2 и N лежат на одной прямой с точкой A, N принадлежит окружности α, M — окружности α_1', образу окружности α при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $\frac{1}{2}$, то точка N переходит в точку M при указанной гомотетии. Отсюда $[NA]:[MA]=2$ или $[NM]=[MA]$.

Исследование. Как следует из анализа, для произвольной секущей, удовлетворяющей условию задачи, точки M и N ее пересечения с окружностью α переходят друг в друга при указанной гомотетии. Задача не имеет решения, если α и α' не имеют общих точек; одно решение, если α и α' касаются; два решения, если пересекаются.

204. Даны прямые a и b, а также точка A. Провести прямую AMN так, чтобы $[AM]=2[MN]$, где $M \in a$, $N \in b$.

205. Через данную точку M провести прямую, пересекающую две концентрические окружности ω_1 и ω_2 в точках A, B и C, так, чтобы $[AB]=[BC]=[CD]$, $A\in\omega_1$, $D\in\omega_1$, $B\in\omega_2$, $C\in\omega_2$.

206. Даны три концентрические окружности. Через данную точку M провести секущую так, чтобы ее отрезки AB и BC были равны между собой. (A, B и C — три последовательные точки пересечения секущей с каждой из этих окружностей.)

207. Построить хорду окружности, которая делится двумя ее радиусами на три равные части.

208. Даны прямые a и b и точка M. На прямой b найти такую точку X, для которой расстояние до прямой a совпадает с расстоянием до точки M.

209. Через точку пересечения двух окружностей провести две хорды (первую в одной, вторую в другой окружности), если известны угол между ними и их отношение.

210. В треугольник ABC вписать ромб $MNPQ$ так, чтобы его острый угол NMQ был равен данному углу, вершины M и Q лежали на стороне AC треугольника, а вершины N и P соответственно на сторонах AB и BC.

Решение. Анализ. Пусть ABC — данный треугольник, $MNPQ$ — искомый ромб (рис. 30). Сформулируем задачу иначе. Даны $\angle BAC$ и прямая BC, пересекающая стороны угла. Построить ромб с данным острым углом так, чтобы две его вершины лежали на стороне AC угла BAC, третья вершина — на стороне AB, а четвертая — на прямой BC. Это условие можно разбить на две части: 1) вписать в $\angle BAC$ ромб $MNPQ$ с данным острым углом NMQ так, чтобы вершины M и Q лежали на стороне AC, а вершина N принадлежала стороне AB угла; 2) вписать ромб так, чтобы четвертая вершина P лежала на прямой BC.

Покажем, что первая часть условий определяет ромб с точностью до гомотетии с центром в точке A. Пусть $MNPQ$ и $M'N'P'Q'$ — два ромба с одинаковыми острыми углами, вписанные в $\angle BAC$ (см. рис. 30). Пусть $\tilde{a}$ — сторона первого ромба, $\tilde{a}'$ — сторона второго. Так как $\angle NMC=\angle N'M'C$, то $(NM)\parallel(N'M')$. Следовательно, $\triangle ANM\sim\triangle AN'M'$. Отсюда $[AN]:[AN']=\tilde{a}:\tilde{a}'$; $[AM]:[AM']=\tilde{a}:\tilde{a}'$. Из последнего соотношения и из равенств $[MQ]=\tilde{a}$, $[M'Q']=\tilde{a}'$ получим: $[AQ]:[AQ']=\tilde{a}:\tilde{a}'$. Таким образом, вершины M, N и Q первого ромба преобразуются в вершины M', N' и Q' второго при гомотетии с центром в точке A и коэффициентом k, равным $\tilde{a}:\tilde{a}'$. Покажем, что вершины P и P' также соответствуют друг другу при

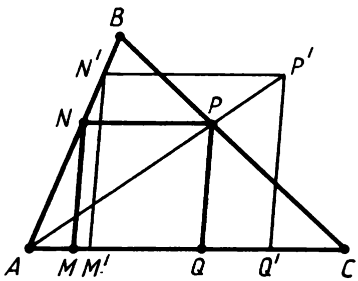


Рис. 30

этой гомотетии. Действительно, $(NP)\|(N'P')$, поэтому $\angle ANP = \angle AN'P'$, $[NP]=\tilde{a}$, $[N'P']=\tilde{a}'$. Как было показано ранее, $[AN]:[AN']=\tilde{a}:\tilde{a}'$. Поэтому $\triangle ANP$ подобен $\triangle AN'P'$ (по первому признаку подобия). Отсюда $[AP]:[AP']=\tilde{a}:\tilde{a}'$, $\angle NAP=\angle N'AP'$. Следовательно, точки A, P и P' лежат на одной прямой. Точка P переходит в точку P' при указанной гомотетии.

Вторая часть условий позволяет выделить из множества всех гомотетичных между собой ромбов искомый. Для этого следует рассмотреть прямую AP', на которой лежат вершины, соответствующие вершине P', всех гомотетичных ромбов. Вершина P искомого ромба совпадает с точкой пересечения прямых BC и AP'. Для решения достаточно вписать в $\angle BAC$ ромб $M'N'P'Q'$ с данным острым углом, построить прямую AP' и найти точку P пересечения AP' и BC, затем построить ромб $MNPQ$, гомотетичный $M'N'P'Q'$.

Построение.

1) На луче AC обозначим произвольную точку M_1'.

2) Отложим от точки M_1' данный угол α. Получим луч m_2: $\angle(m_2, (M_1'C))=\alpha$ (рис. 31).

3) Строим точку N_3' пересечения m_2 и (AB).

4) От точки M_1' отложим отрезок $\tilde{a}':\tilde{a}'=[M_1'N_3']$. Получим точку Q_4' прямой $AC:[Q_4'M_1']=\tilde{a}'$.

Строим:

5) окружность $\alpha_5:\alpha_5=(N_3', \tilde{a}')$;

6) окружность $\beta_6:\beta_6=(Q_4', \tilde{a}')$;

7) точку P_7' пересечения α_5 и β_6;

8) прямую $n_8:n_8=(AP_7')$;

9) точку P_9 пересечения n_8 и (BC).

10) Через точку P_9 проводим прямую p_{10}, параллельную (AC).

11) Строим точку N_{11} пересечения p_{10} и (AB).

12) Через точку P_9 проводим прямую q_{12}, параллельную m_2.

Строим:

13) точку Q_{13} пересечения q_{12} и (AC);

14) прямую r_{14}, проходящую через N_{11} и параллельную m_2;

15) точку M_{15} пересечения r_{14} и (AC).

Четырехугольник $M_{15}N_{11}P_9Q_{13}$ искомый.

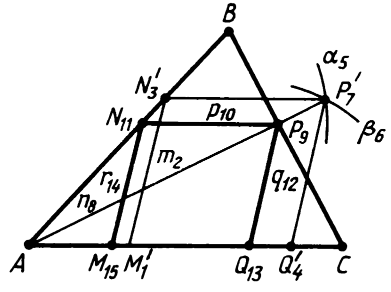


Рис. 31

Доказательство. Из построений 4—6 следует, что $[M_1'N_3']=[M_1'Q_4']=[Q_4'P_7']=[N_3'P_7']$. Поэтому в четырехугольнике $M_1'N_3'P_7'Q_4'$ все стороны равны между собой, т. е. он является ромбом. Угол $N_3'M_1'Q_4'$

этого ромба равен данному острому углу (построение 2). Точка P_9 принадлежит $[BC]$ (построение 9). Из построений 10, 12 и 14 следует, что противоположные стороны четырехугольника $M_{15}N_{11}P_9Q_{13}$ параллельны между собой. Следовательно, он является параллелограммом. Из параллельности прямых $N_{11}P_9$ и $N_3'P_7'$ вытекает, что $\triangle AN_{11}P_9 \sim \triangle AN_3'P_7'$. Поэтому $[N_{11}P_9]:[N_3'P_7'] = [AP_9]:[AP_7']$. Аналогично $\triangle AP_9Q_{13} \sim \triangle AP_7'Q_4'$, $[P_9Q_{13}]:[P_7'Q_4'] = [AP_9]:[AP_7']$. Отсюда и из равенства $[N_3'P_7'] = [P_7'Q_4']$ следует $[N_{11}P_9] = [P_9Q_{13}]$.

Четырехугольник $M_{15}N_{11}P_9Q_{13}$ — ромб.

Исследование. Из анализа видно, что искомый ромб $MNPQ$ гомотетичен ромбу $M'N'P'Q'$. Центр гомотетии совпадает с точкой A. Поэтому при любом способе построения вершина P искомого ромба лежит на прямой AP'. Отсюда всякий ромб, удовлетворяющий условию, совпадает с построенным ромбом. Задача имеет единственное решение.

211. В данный треугольник вписать прямоугольник, подобный данному.

212. В полуокружность вписать квадрат так, чтобы две его вершины находились на диаметре, а две другие — на ее дуге.

213. В данный сектор AOB вписать квадрат так, чтобы две его смежные вершины находились на дуге, а две другие — на радиусах OA и OB.

214. В треугольнике ABC провести прямую DE, параллельную стороне BC так, чтобы $[BD]+[EC]=2[DE]$, где $D \in [AB]$, $E \in [AC]$.

215. На сторонах AB и BC треугольника ABC найти такие точки D и E, чтобы $[AD]=[DE]=[EC]$.

216. Построить треугольник, если известны $\angle B$, $\tilde{a}+\tilde{b}$, $\tilde{b}+\tilde{c}$.

217. Даны точка и две прямые. Построить окружность, проходящую через эту точку и касающуюся прямых.

218. Даны две точки и прямая. Построить окружность, проходящую через эти точки и касающуюся прямой.

219. Даны две прямые и окружность. Построить окружность, которая касается этих прямых и данной окружности.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ИНВЕРСИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Литература: [1], § 102.

При решении задач на построение методом инверсии обычно используются два ее основных свойства: а) при инверсии сохраняются углы между линиями; б) образом окружности, содержащей центр инверсии, является прямая линия.

С помощью инверсии решается целый класс задач на построение окружностей. Например: «Даны объекты: точки, прямые или окружности F_1, F_2, ..., F_n. Требуется построить окружность, которая либо пересекает эти объекты под данными углами, либо их касается, либо их содержит». При решении центр инверсии обычно выбирают в данной точке на искомой окружности. Радиус инверсии берут произвольным. Затем определяют образы F_1', ..., F_n' данных объектов при инверсии. Искомая окружность ω преобразуется в прямую ω', которая либо пересекает объекты F_i' под данными углами, либо касается их, либо содержит. При этом задача существенно упрощается. Вместо окружности требуется построить прямую, удовлетворяющую тем же условиям. Построив прямую ω', проводят ту же инверсию второй раз. Так как инверсия — инволютивное преобразование, т. е. совпадает со своим обратным, то объекты F_1', ..., F_n' преобразуются в свои прообразы F_1, ..., F_n, а прямая ω' — в искомую окружность ω. Если нельзя выбрать точку, принадлежащую искомой окружности, то для упрощения задачи центр инверсии выбирают так, чтобы одна или несколько данных окружностей преобразовались в прямые.

220. Даны окружность α и точки A и B, где $A \in \alpha$. Построить окружность, которая проходит через эти точки и пересекает окружность α под данным углом.

Решение. Анализ. Пусть задача решена, ω — искомая окружность. Угол между касательными к окружностям α и ω в точке их пересечения, т. е. в точке A, равен данному углу φ. Примем точку A за центр инверсии. Радиус ее окружности можно взять произвольным. Но для упрощения построения удобно радиус выбрать так, чтобы окружность инверсии пересекала окружность α в двух точках M и N. Тогда образом окружности α при инверсии является прямая MN. При инверсии с центром в точке A искомая окружность преобразуется в прямую ω', не проходящую через точку A, точка B — в точку B', окружность α, как уже отмечалось ранее,— в прямую m: $m = (MN)$. Так как окружность ω проходит через точку B и образует $\angle\varphi$ с окружностью α, то ее образ, прямая ω', проходит через точку B' и составляет тот же угол с прямой m. Таким образом, задача приобретает следующий вид: через данную точку B' провести прямую ω', пересекающую прямую m под данным $\angle\varphi$. Построив прямую ω', найдем ее образ при той же инверсии. Получим искомую окружность ω.

Построение. Строим:

1) окружность β_1 с центром в точке A и с произвольным радиусом. Радиус выберем так, чтобы окружность β_1 пересекала окружность α в двух точках (рис. 32);

2) точки M_2 и N_2 пересечения α и β_1;

3) прямую m_3: $m_3 = (M_2N_2)$;

4) точку B_4' — образ точки B при инверсии с центром в точке A.

5) От произвольной точки прямой m_3 отложим данный $\angle\varphi$. Получим прямую n_5: $\angle\varphi\ (m_3, n_5) = \varphi$.

6) Через точку B_4' проводим прямую ω_6', параллельную n_5.

7) Строим образ прямой ω_6' при инверсии относительно ок-

ружности β_1 (см. § 1, задачу 29). Получим искомую окружность ω_7.

Доказательство. Так как прямая ω_6' не проходит через центр инверсии, точку A, то окружность ω_7 содержит точку A. Прямая ω_6' проходит через точку B_4' (построение 6), поэтому окружность ω_7 содержит точку B. Угол между прямыми ω_6' и m_3 равен данному $\angle\varphi$ (построения 5, 6). Отсюда угол между их образами при инверсии, окружностями ω_7 и α, равен $\angle\varphi$.

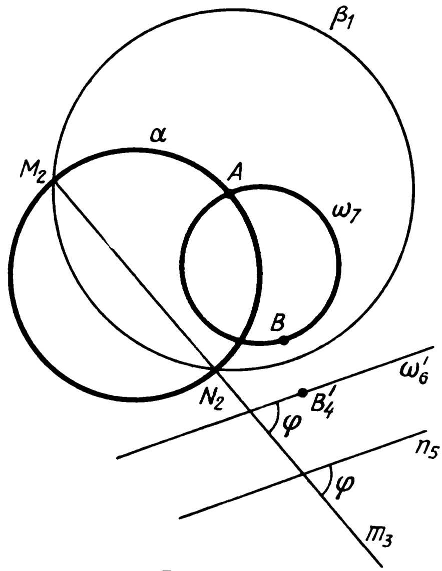


Рис 32

Исследование. Из анализа следует, что образ искомой окружности при указанной инверсии прямая ω' проходит через точку B' и образует данный $\angle\varphi$ с прямой m. Если $\angle\varphi$ отличен от прямого, то существуют две прямые ω' и ω'', удовлетворяющие данным условиям. Если ω' и ω'' не содержат точки A, то прообразы этих прямых при инверсии являются окружностями, не проходящими через центр A. В этом случае имеем два решения. Если $\angle\varphi$ равен углу между прямыми (AB') и m, то одна из прямых ω или ω'' совпадает с (AB'), т. е. проходит через центр инверсии. При инверсии она преобразуется не в окружность, а сама в себя. В этом случае задача имеет одно решение. Если данный $\angle\varphi$ прямой, то существует единственная прямая, проходящая через B' и перпендикулярная m. Если этот перпендикуляр не содержит точки A, то имеем единственное решение, если же содержит, то решения нет. Легко видеть, что в этом случае задача не имеет решения как раз тогда, когда точки A и B и центр данной окружности α лежат на одной прямой.

221. Центр инверсии является точкой касания двух окружностей. Построить образ этих окружностей при инверсии.

222. Дан квадрат, одна вершина которого совпадает с центром инверсии, а другая лежит на ее окружности. Построить образ квадрата при инверсии.

223. Дан квадрат, вписанный в окружность инверсии. Построить его образ при этой инверсии.

224. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а две другие — на ее окружности. Найти образ треугольника при инверсии.

225. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а противоположная сторона касается ее окружности. Найти образ треугольника при инверсии.

226. Даны три окружности, пересекающиеся в точке M. Приняв точку M за центр инверсии, построить фигуры, инверсные данным окружностям.

227. Даны прямые a и b, точка A и отрезок $\tilde{r}$. Построить секущую AMN так, чтобы $[AM]\cdot[AN]=\tilde{r}^2$, где $M\in a$, $N\in b$.

228. Даны прямая a, окружность ω, точка A и отрезок $\tilde{r}$. Построить такую секущую AMN, для которой $[AM]\cdot[AN]=\tilde{r}^2$, где $M\in a$, $N\in\omega$.

229. Даны отрезок $\tilde{r}$, точка A и окружность ω. Построить секущую AMN так, чтобы $[AM]\cdot[AN]=\tilde{r}^2$, где M, $N\in\omega$.

230. Даны две точки и окружность. Построить окружность, ортогональную данной и проходящую через эти точки.

231. Даны две окружности и точка. Построить окружность, проходящую через эту точку и пересекающую данные окружности под прямыми углами.

232. Даны окружность, две не принадлежащие ей точки и угол. Построить окружность, проходящую через эти точки и пересекающую данную окружность под заданным углом.

233. Даны две точки, прямая и угол. Построить окружность, проходящую через эти точки и пересекающую данную прямую под заданным углом.

234. Даны точка, прямая и окружность. Построить окружность, проходящую через эту точку и пересекающую данную окружность и прямую под заданными углами.

235. Даны точка и две окружности. Построить окружность, проходящую через эту точку и пересекающую данные окружности под заданными углами.

236. Даны две точки и прямая. Построить окружность, проходящую через эти точки и касающуюся прямой.

237. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

238. Даны три окружности, пересекающиеся в одной точке. Построить окружность, касающуюся трех данных.

239. Даны окружность и прямая. Построить окружность, касающуюся этой окружности и прямой в выбранной на ней точке.

240. Даны прямая и окружность. Построить окружность, касающуюся прямой и этой окружности в выбранной на ней точке.

241. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одну из них в выбранной на ней точке.

242. Даны точка, прямая и окружность. Построить окружность, проходящую через эту точку и касающуюся прямой и данной окружности.

243. Даны точка и две окружности. Построить окружность, проходящую через эту гочку и касающуюся данных окружностей.

244. Даны три окружности, причем две из них касаются друг друга. Построить окружность, касающуюся трех данных.

245. Даны три окружности. Построить окружность, касающуюся трех данных (задача Аполлония).

§ 10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Литература: [1], § 103.

При использовании алгебраического метода решение задачи сводят к построению отрезка. Искомый отрезок выражают через данные, а затем строят его по полученной формуле. Алгебраический метод является универсальным. С его помощью можно решить любую задачу на построение, но из-за громоздких выкладок его следует применять лишь к тем задачам, которые не поддаются решению другими методами.

246. Построить отрезок по формуле:

а) $\tilde{x}=\frac{\tilde{a}\sqrt{\tilde{m}^2+\tilde{n}^2}}{\sqrt{\tilde{d}^2-\tilde{e}^2}}$; б) $\tilde{x}=\frac{(\sqrt{\tilde{a}\tilde{b}}+\sqrt{\tilde{c}\tilde{d}})\tilde{m}}{\sqrt{\tilde{n}^2+\tilde{p}^2}}$,

в) $\tilde{x}=\sqrt[4]{\tilde{a}^4-\tilde{b}^4}$; г) $\tilde{x}=\frac{\tilde{a}^3+\tilde{b}^3}{\tilde{a}^2+\tilde{b}^2}$;

д) $\tilde{x}=\sqrt[4]{\tilde{a}^4+\tilde{b}^4}$, где $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$, $\tilde{e}$, $\tilde{m}$, $\tilde{n}$ — данные отрезки.

247. Построить отрезок, длина которого является корнем уравнения (a и b — длины данных отрезков):

а) $x^2-\sqrt{ab}\,x+a^2=0$; б) $ax^2-\sqrt{ab^3}\,x-b\sqrt{a^4-b^4}=0$.

248. Построить угол, если известно, что:

а) $\sin\hat{\alpha}=\frac{a}{b}$; б) $\cos\hat{\alpha}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

в) $\cos\hat{a}=\frac{\sqrt[2]{a^4-b^4}}{a^2+b^2}$; г) $\operatorname{tg}\hat{\alpha}=\frac{a}{b}\sin\beta$;

д) $\operatorname{ctg}\hat{\alpha}=\frac{a^2-cb}{a^2+cb}\cos\beta$, где a, b и c — длины данных отрезков, β — данный угол.

249. Построить треугольник, равновеликий данному квадрату, если известны $\tilde{a}$, $\angle C$.

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена, треугольник ABC искомый (рис. 33). Проведем высоту $\tilde{h}_a$:$\tilde{h}_a=$ $=[AH]$. Так как площадь треугольника совпадает с площадью данного квадрата, то $\tilde{a}\tilde{h}_a=2\tilde{m}^2$, где $\tilde{m}$ — сторона квадрата. Отсюда получим:

$$\tilde{h}_a=2\frac{\tilde{m}\cdot\tilde{m}}{\tilde{a}}. \qquad (1)$$

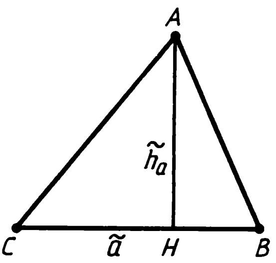


Рис. 33

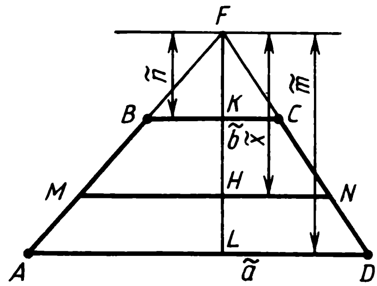


Рис. 34

Построив отрезок $\tilde{h}_a$, можно найти треугольник AHC по катету и острому углу. Для решения достаточно достроить треугольник AHC до треугольника ABC.

П о с т р о е н и е. Строим:

1) отрезок $\tilde{b}_1$ по формуле $\tilde{b}_1 = \frac{\tilde{m} \cdot \tilde{m}}{\tilde{a}}$ (см. § 1, задача 32);

2) отрезок $\tilde{h}_{a_2} : \tilde{h}_{a_2} = 2\tilde{b}_1$;

3) угол $\varphi_3 : \angle\varphi_3 = d - \angle C$, где d — прямой угол;

4) треугольник $A_4H_4C_4$ по стороне $[A_4H_4] = \tilde{h}_{a_2}$ и двум углам: $\angle C_4A_4H_4 = \varphi_3$, $\angle A_4H_4C_4 = d$.

5) На луче C_4H_4 от его начала, точки C_4, отложим отрезок $\tilde{a}$. Получим точку $B_5 : [C_4B_5] = \tilde{a}$. Треугольник $A_4B_5C_4$ искомый.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Основание $[C_4B_5]$ построенного треугольника равно $\tilde{a}$ (построение 5). Высота вершины A_4 равна $\tilde{h}_{a_2}$ (построение 4). Так как отрезок $\tilde{h}_{a_2}$ построен по формуле (1) (построения 1 и 2), то площадь построенного треугольника равна площади данного квадрата. $\angle C_4$ совпадает с данным $\angle C$ (построения 3 и 4).

И с с л е д о в а н и е. В анализе показано, что высота $\tilde{h}_a$ любого треугольника, удовлетворяющего условию, определяется соотношением (1). Легко видеть, что два треугольника, имеющие одинаковые основания, высоты, опущенные на эти основания, и один из прилежащих к ним углов, равны между собой. В этом случае задача имеет единственное решение.

250. Построить круг, площадь которого равна разности площадей двух данных окружностей.

251. Площадь данного сектора разделить пополам концентрической дугой.

252. Построить квадрат, площадь которого равна площади данного прямоугольника.

253. Построить квадрат с площадью, равной сумме площадей двух данных треугольников.

254. Построить прямоугольник, равновеликий данному квадрату, отношение сторон которого равно 2:3.

255. Построить равносторонний треугольник, равновеликий данному прямоугольнику.

256. Построить треугольник, равновеликий данному квадрату, если известны две его стороны.

257. Дана окружность. Построить прямоугольник, вписанный в эту окружность и равновеликий данному квадрату.

258. Дана окружность. Построить прямоугольный треугольник, вписанный в эту окружность, площадь которого равна площади данного прямоугольника.

259. Построить прямую, параллельную основаниям трапеции, так, чтобы она разделила ее на две равновеликие фигуры.

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена, $ABCD$ — данная трапеция, MN — искомая прямая (рис. 34). Площади трапеций $MBCN$ и $AMND$ равны между собой. Продолжим боковые стороны AB и CD трапеции до пересечения в точке F. Проведем прямую FK, перпендикулярную (AD). Обозначим $[AD]=\tilde{a}$, $[BC]=\tilde{b}$, $[FK]=\tilde{n}$, $[FL]=\tilde{m}$, $[FH]=\tilde{x}$. Выразим отрезок $\tilde{x}$ через отрезки $\tilde{m}$, $\tilde{n}$, $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Пусть S_1, S_2 и S соответственно площади треугольников FAD, FBC и FMN. $S_1=\frac{1}{2}|\tilde{a}||\tilde{m}|$, $S_2=\frac{1}{2}|\tilde{b}||\tilde{n}|$. Так как площади трапеций $MBCN$ и $AMND$ равны между собой, то $S_1-S=S-S_2$. Отсюда $S=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$, т. е.

$$S=\frac{1}{4}(|\tilde{a}||\tilde{m}|+|\tilde{b}||\tilde{n}|). \qquad (1)$$

Треугольники AFD и MFN подобны между собой. Поэтому

$$|\tilde{x}|^2:|\tilde{m}|^2=S:S_1. \qquad (2)$$

Подставляя формулу (1) в соотношение (2), получаем:

$$\frac{|\tilde{x}|^2}{|\tilde{m}|^2}=\frac{|\tilde{a}||\tilde{m}|+|\tilde{b}||\tilde{n}|}{2|\tilde{a}||\tilde{m}|}. \qquad (3)$$

Отсюда
$$\tilde{x}=\sqrt{\left(\tilde{m}+\frac{\tilde{b}\tilde{n}}{\tilde{a}}\right)\frac{\tilde{m}}{2}}. \qquad (4)$$

Построив отрезок $\tilde{x}$ по формуле (4), отложим его на прямой FK, получим точку H, через которую проходит искомая прямая MN.

Построение.

1) Определим точку F_1 пересечения прямых AB и CD, содержащих боковые стороны трапеций.

2) Через F_1 проводим прямую l_2, перпендикулярную (AD). Строим:

3) точку L_3 пересечения l_2 и (AD), отрезок $\tilde{m}_3$ равен: $\tilde{m}_3=|F_1\tilde{h}_3|$;

4) точку K_4 пересечения l_2 и (BC), отрезок $\tilde{n}_4$ равен:

$$\tilde{n}_4=[F_1K_4];$$

5) отрезок $\tilde{c}_5$ по формуле $\tilde{c}_5=\frac{\tilde{b}\tilde{n}}{\tilde{a}}$;

6) отрезок $\tilde{d}_6: \tilde{d}_6=\tilde{m}_3+\tilde{c}_5$;

7) отрезок $\tilde{e}_7: \tilde{e}_7=\frac{1}{2}\tilde{m}_3$;

8) отрезок $\tilde{x}_8: \tilde{x}_8=\sqrt{\tilde{a}_6\tilde{e}_7}$.

9) Отложим отрезок $\tilde{x}_8$ на луче F_1K_3 от его начала, точки F_1. Получим точку $H_9: [F_1H_9]=\tilde{x}_8$.

10) Проводим прямую h_{10}, проходящую через точку H_9 и перпендикулярную l_2. Прямая h_{10} искомая.

Доказательство. Из построений 2 и 10 следует, что прямая h_{10} параллельна основаниям трапеции. Докажем, что она делит площадь трапеции пополам. Пусть M и N — точки пересечения прямой h_{10} с боковыми сторонами трапеции; S_1, S_2 и S — площади треугольников F_1AD, F_1BC и F_1MN. Из построений 5—8 следует, что отрезок x_8 выражается через отрезки $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{m}_3$ и $\tilde{n}_4$ по формуле (4). Действительно,

$$\tilde{x}_8=\sqrt{\tilde{d}_6\tilde{e}_7}=\sqrt{(\tilde{m}_3+\tilde{c}_5)\frac{\tilde{m}_3}{2}}=\sqrt{\left(\tilde{m}_3+\frac{\tilde{b}\tilde{n}_4}{\tilde{a}}\right)\frac{\tilde{m}_3}{2}}$$

Из подобия треугольников AF_1D и MF_1N следует:

$$|\tilde{x}_8|^2:|\tilde{m}_3|^2=S:S_1.$$

Так как из формулы (4) следует соотношение (3), то

$$\frac{S}{S_1}=\frac{|\tilde{a}||\tilde{m}_3|+|\tilde{b}||\tilde{n}_4|}{2|\tilde{a}||\tilde{m}_3|}.$$

$S_1=\frac{1}{2}|\tilde{a}||\tilde{m}_3|$, $S_2=\frac{1}{2}|\tilde{b}||\tilde{n}_4|$, поэтому S удовлетворяет формуле (1), т. е. $2S=S_1+S_2$.

Исследование. Из анализа следует, что искомая прямая отстоит от точки F на отрезок $\tilde{x}$, вычисляемый по формуле (4). Поэтому задача всегда имеет единственное решение.

260. Построить три прямые, параллельные основанию треугольника и делящие его площадь на три равные части.

261. Провести прямую, параллельную диагонали прямоугольника и отсекающую от него треугольник площадью, равной одной трети площади всего прямоугольника.

262. Построить прямую, параллельную основаниям трапеции и делящую ее площадь в отношении 2:1, считая от меньшего основания.

263. Построить три окружности, попарно касающиеся друг друга, центры которых лежат в вершинах данного треугольника.

264. Даны две точки, прямая и отрезок. Построить окружность, проходящую через эти точки, отсекающие от прямой заданный отрезок.

265. Построить прямоугольный треугольник, если известны сумма его катетов и высота, опущенная на гипотенузу.

266. Построить прямоугольный треугольник, если даны его гипотенуза $\tilde{c}$ и биссектриса $\tilde{l}_a$ острого угла.

267. В окружность вписать трапецию с данной боковой стороной и данным отношением оснований.

268. Разделить окружность на n равных частей, если:

а) $n=3$; б) $n=4$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=5$.

269. Построить треугольник, если дан его периметр $2\tilde{p}$, высота $\tilde{h}_a$ и радиус $\tilde{r}$ вписанной окружности.

§ 11. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

270. Построить ромб, если известны его периметр и разность диагоналей.

271. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\tilde{R}$, $\angle(\tilde{m}_a, \tilde{h}_a)$.

272. Построить треугольник с основанием $\tilde{a}$ и медианой $\tilde{m}_a$, равновеликий данному параллелограмму.

273. Построить треугольник, равновеликий разности двух данных треугольников, если известны его высота $\tilde{h}_a$ и медиана $\tilde{m}_a$.

274. Построить треугольник, если даны $\tilde{h}_a$, $\tilde{l}_a$ и $\tilde{R}$.

275. Даны точка, три прямые и окружность. Вписать в нее треугольник так, чтобы две его стороны были параллельны двум прямым, а третья прямая проходила через эту точку.

276. Построить треугольник, если известны $\tilde{R}$, $\tilde{m}_a$, $\tilde{h}_a$.

277. Построить треугольник, если даны $\angle B$, $\tilde{m}_a$, $\tilde{m}_c$.

278. Построить равносторонний треугольник ABC, если даны его сторона и три точки, принадлежащие прямым AB, AC и биссектрисе AL угла BAC.

279. Построить треугольник, если известны точки пересечения медианы, высоты и биссектрисы одного из его углов с описанной окружностью.

280. Построить квадрат, если даны четыре точки, принадлежащие его сторонам.

281. Даны точка S и три прямые, пересекающиеся в одной точке. Через точку S провести прямую, отрезки которой между заданными прямыми находились бы в отношении $\tilde{m}:\tilde{n}$.

282. На прямой даны точки A, B, C и D, расположенные последовательно в указанном порядке. Построить такую точку X, для которой $\angle AXB=\angle CXD$.

283. Даны прямая и две окружности. На этой прямой найти центр окружности, пересекающей две данные в диаметрально противоположных точках.

284. Построить треугольник по стороне, прилежащему углу и разности двух других сторон.

285. Построить треугольник, если даны $\angle B$, $\angle C$, $2\tilde{p}$.

286. Построить треугольник, если известны $\angle A$, $\tilde{h}_a$, $2\tilde{p}$.

287. На окружности даны точки A и B. Найти на ней такую точку X, чтобы сумма $[AX]+[XB]$ равнялась данному отрезку.

288. Построить треугольник, если даны его медиана и радиусы двух окружностей, описанных около двух треугольников, на которые эта медиана разбила данный.

289. Построить трапецию, если известны ее диагонали, угол между ними и разность двух смежных сторон.

290. Через две данные точки на окружности провести две параллельные хорды, сумма которых равна заданному отрезку.

291. Построить трапецию по ее боковым сторонам, углу между продолжениями боковых сторон и углу между диагоналями.

292. В треугольник ABC вписать треугольник MNP, равный данному треугольнику DEF, так, чтобы $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [AC]$.

293. В сектор вписать треугольник, равный данному, так, чтобы две его вершины принадлежали радиусам, а одна — дуге сектора.

294. В сегмент вписать треугольник, равный данному, чтобы две его вершины принадлежали дуге, а одна — хорде сегмента.

295. Построить треугольник, подобный данному, вписанный в сегмент, так, чтобы две его вершины принадлежали дуге, а третья находилась в данной точке хорды сегмента.

296. Построить треугольник, подобный данному, вписанный в треугольник ABC, так, чтобы одна из его вершин совпадала с точкой P отрезка $[AB]$.

297. Даны три концентрические окружности. Построить треугольник, подобный данному, вершины которого лежат на этих окружностях.

298. Даны отрезок и окружность. Построить касательную к этой окружности, отрезок которой между продолжениями двух ее данных радиусов равен заданному отрезку.

299. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной стороне угла, вершина — на другой, а боковые стороны проходят через две точки, заданные внутри угла.

300. Построить прямую, параллельную данной и образующую в пересечении с данными окружностями хорды, сумма которых равна данному отрезку.

301. Даны прямая и отрезок. На прямой найти точку, из которой этот отрезок виден под наибольшим углом.

302. Построить равнобедренный треугольник, если даны его радиусы вписанной и описанной окружностей.

Глава II
МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

§ 12. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ФИГУР ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Литература: [2], § 26, 27.

Будем считать, что в каждой из нижеприведенных задач выбраны направления проектирования и плоскость изображения.

303. Даны изображения двух вершин треугольника и точки пересечения его медиан. Построить изображение третьей вершины.

Решение. Пусть треугольник ABC (рис. 35) является изображением треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Как известно, любые два треугольника аффинно-эквивалентны, середины сторон M, N и P являются изображениями середин соответствующих сторон треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, а точка пересечения медиан O — изображением точки пересечения медиан.

Нам даны точки A, B и O. Для построения вершины C следует воспользоваться свойством точки пересечения медиан треугольника. Отложим от точки O на прямой AO половину отрезка AO и получим точку P. Вершина C строится как точка, симметричная B относительно P.

304. Дано изображение треугольника. Построить изображение точки пересечения его медиан.

305. Даны изображения M, N, P середин сторон треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Построить изображения его вершин.

306. Даны изображения середин сторон треугольника. Построить изображение его точки пересечения медиан.

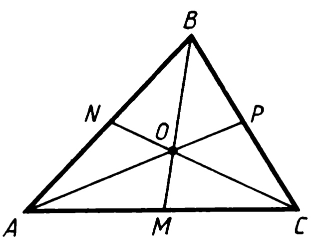


Рис. 35

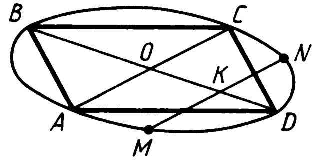


Рис. 36

307. Даны изображения A и B двух вершин четырехугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, а также изображение M точки $\bar{M}$ пересечения его диагоналей. Построить изображение вершин $\bar{C}$ и $\bar{D}$, если точка $\bar{M}$ делит диагонали четырехугольника в отношениях:

а) $(\bar{A}\bar{C},\ \bar{M})=2$, $\qquad(\bar{B}\bar{D},\ \bar{M})=1$;

б) $(\bar{A}\bar{C},\ \bar{M})=3$, $\qquad(\bar{B}\bar{D},\ \bar{M})=5$.

308. Даны изображения A, B и C трех вершин четырехугольника. Построить изображение четвертой вершины D, если точка $\bar{M}$ пересечения диагоналей делит их в отношениях

$$(\bar{A}\bar{C},\ \bar{M})=\frac{1}{2},\ (\bar{B}\bar{D},\ \bar{M})=3.$$

309. Даны изображения двух смежных вершин квадрата, а также точки пересечения его диагоналей. Построить изображения остальных вершин.

310. Построить изображение трапеции, отношение оснований которой 1:2.

311. Даны изображения трех вершин трапеции. Построить изображение четвертой вершины, если отношение оснований 1:3.

312. Даны изображения большого основания трапеции и точки пересечения диагоналей. Построить изображения остальных вершин, если основания относятся как 2:3.

313. Построить изображение квадрата, если даны изображения описанной вокруг него окружности, ее центра O и одной из его вершин.

Решение. Изображением окружности является эллипс, вписанного в нее квадрата — параллелограмм, взаимно перпендикулярных диаметров окружности — сопряженные диаметры эллипса (рис. 36). Точка A является изображением вершины $\bar{A}$. Противоположная ей вершина $\bar{C}$ изображается точкой C, симметричной A относительно центра O. Для того чтобы найти изображение двух других вершин квадрата, следует построить диаметр эллипса, сопряженный AC. Сопряженный диаметр является множеством середин всех хорд, параллельных AC. Построим такую хорду MN, найдем ее середину K, проведем искомый сопряженный диаметр OK. Его точки пересечения B и D с эллипсом являются изображениями остальных вершин квадрата.

314. Дано изображение окружности. Построить изображение ее центра.

315. Построить изображение правильного треугольника, если даны изображения описанной вокруг него окружности и одной из его вершин.

316. Построить изображение правильного шестиугольника, если даны изображения описанной вокруг него окружности и одной из его вершин.

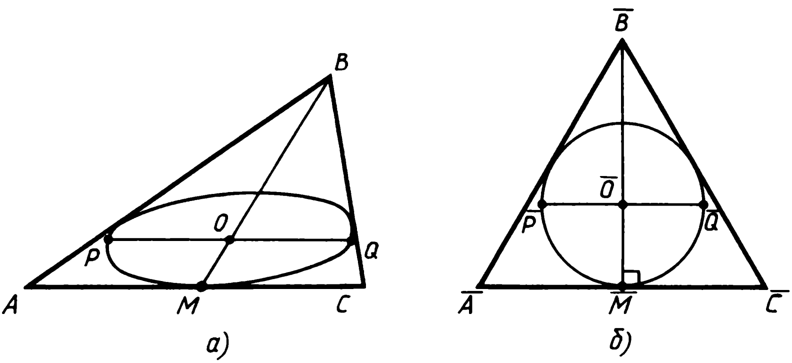


Рис. 37

317. Дано изображение окружности вместе с выбранной на ней точкой. Построить изображение правильного восьмиугольника, вписанного в эту окружность, с вершиной в данной точке.

318. Дано изображение окружности вместе с выбранной на ней точкой. Построить изображение равностороннего треугольника, описанного вокруг окружности, если эта точка является точкой касания окружности и стороны треугольника.

Решение. Изображение окружности представляет собой эллипс, а равностороннего треугольника — произвольный треугольник. Так как фигура и ее изображение аффинно-эквивалентны, то центр эллипса O делит медиану BM (рис. 37, *а*) в том же отношении, что и центр $\overline{O}$ окружности, вписанной в оригинал (см. рис. 37, *б*), высоту $\overline{B}\overline{M}$, т. е. в отношении $1:2$. Таким образом, для построения изображения $\overline{B}$ вершины $\overline{B}$ следует на прямой MO отложить от точки O удвоенный отрезок OM. Затем построим диаметр PQ, сопряженный MO, определим точки P и Q — изображения концов $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ диаметра окружности, параллельного основанию AC треугольника. В аффинно-эквивалентных фигурах отношения параллельных отрезков равны между собой. Поэтому если C — изображение вершин $\overline{C}$, то $MC:OQ=\overline{M}\overline{C}:\overline{O}\overline{Q}=$ $=\sqrt{3}$. Используя эти соотношения, построим отрезок MC, затем точки A и C.

Треугольник ABC искомый.

319. Построить изображение квадрата, если даны изображения вписанной в него окружности и точки касания с ней одной из сторон.

320. Построить изображение равнобедренного прямоугольного треугольника, если даны изображения вписанной в него окружности и точки касания с ней: а) гипотенузы; б) одного из катетов.

321. Построить изображение правильного шестиугольника, если даны изображения вписанной в него окружности и точки касания с ней одной из сторон.

322. Даны изображения окружности и точки, лежащей вне ее. Построить изображения касательных, проходящих через эту точку к данной окружности.

323. Даны изображения центра окружности и ее ортогональных диаметров. Построить изображение какой-либо точки окружности, не лежащей на данных диаметрах.

§ 13. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Литература: [2], § 28.

324. Даны изображения вершин A, B, C и A' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Построить изображения остальных вершин.

Решение. Основания и боковые грани параллелепипеда изображаются параллелограммами. Поэтому для построения изображения вершины D следует найти точку пересечения прямых, проходящих через точки A и C и соответственно параллельных BC и AB (рис. 38). Аналогично строятся изображения остальных вершин.

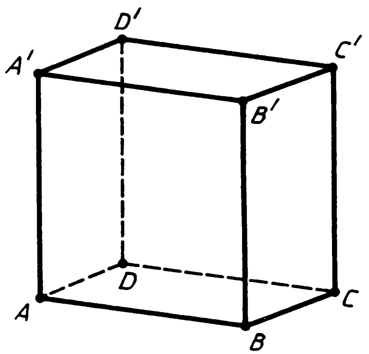


Рис. 38

325. Даны изображения вершин A, B, D, A' призмы $ABCDA'B'C'D'$. Известно, что ее основанием служит трапеция, отношение оснований которой равно $AD:BC=3:2$. Построить изображения остальных вершин.

326. Даны изображения вершин A, B, D и A' призмы $ABCDA'B'C'D'$. Построить изображения остальных вершин, если диагонали основания делятся точкой M их пересечения в отношениях $(AC, M)=2$, $(BD, M)=1$.

327. Дано изображение правильной четырехугольной пирамиды. Построить изображение ее высоты.

328. Даны изображения трех вершин основания ABC и вершины S правильной четырехугольной пирамиды. Построить изображение оставшейся вершины.

329. Даны изображения вершин A, B и A' правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$, а также центра M основания ABC. Найти изображения остальных вершин.

330. Даны изображения цилиндра и точки на одном из его оснований. Построить изображение правильной призмы, вписанной в цилиндр, вершина которой совпадает с данной точкой при условии, что она: а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная; г) восьмиугольная.

331. Даны изображения конуса и точки на его основании. Построить изображение правильной пирамиды, вписанной в конус, вершина основания которой совпадает с данной точкой при условии, что она: а) четырехугольная; б) треугольная; в) шестиугольная; г) восьмиугольная.

332. Даны изображения конуса и точки на его боковой поверхности. Построить изображение правильной усеченной пирамиды, вписанной в конус, одна из вершин верхнего основания которой совпадает с данной точкой, при условии, что она: а) четырехугольная; б) треугольная; в) шестиугольная; г) восьмиугольная.

333. Даны изображения конуса и точки на его боковой поверхности. Построить изображение правильной призмы, вершины верхнего основания которой лежат на боковой поверхности, одна из них совпадает с данной точкой, а нижнее основание принадлежит основанию конуса, если она: а) четырехугольная; б) треугольная; в) шестиугольная; г) восьмиугольная.

§ 14. АКСОНОМЕТРИЯ

Л и т е р а т у р а: [2], § 30.

Во всех задачах этого параграфа будем придерживаться обозначений пособия [2]. Будем считать, что в пространстве дан аффинный репер $\bar{O}$, $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, $\bar{E}_3$, а на основной плоскости σ дано его изображение O, E_1, E_2, E_3. Если $\bar{M}$ — точка пространства, то под M_1, M_2, M_3 будем понимать вторичные проекции точки $\bar{M}$, т. е. изображения проекций $\bar{M}$ соответственно на координатные плоскости $\bar{O}\bar{E}_2\bar{E}_3$, $\bar{O}\bar{E}_1\bar{E}_3$ и $\bar{O}\bar{E}_1\bar{E}_2$. Под предложением «Дана точка (M, M_3)» будем понимать, что на основной плоскости σ дано изображение M точки $\bar{M}$ и ее вторичной проекции M_3.

«Дана прямая (l, l_3)» означает, что на основной плоскости σ дано изображение (аксонометрическая проекция) l прямой $\bar{l}$ и ее вторичной проекции l_3.

334. Дана точка (M, M_3). Построить ее вторичные проекции M_1 и M_2.

Р е ш е н и е. На рисунке 39 изображен репер O, E_1, E_2, E_3 и точка (M, M_3). Так как M_3 — вторичная проекция точки $\bar{M}$, то прямые MM_3 и OE_3 параллельны между собой. Через точку M проведем прямую l, параллельную OE_2. Искомая вторичная проек-

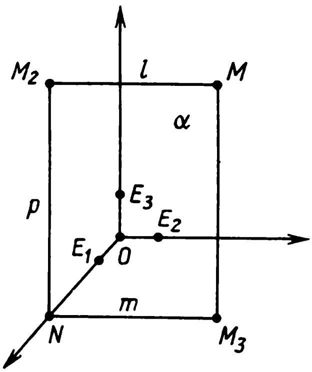


Рис. 39

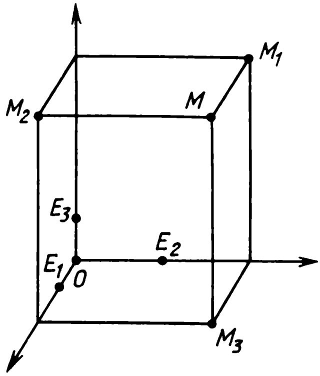


Рис. 40

ция M_2 является изображением точки пересечения прямой $\bar{l}$ и плоскости $\bar{O}\bar{E}_1\bar{E}_3$. Рассмотрим плоскость $\bar{\alpha}$, проходящую через $\bar{l}$ и $\bar{M}_3$. Через точку M_3 проведем прямую m, параллельную l, она представляет собой изображение прямой пересечения плоскостей $\bar{\alpha}$ и $\bar{O}\bar{E}_1\bar{E}_2$. Точка N является изображением точки пересечения плоскости $\bar{\alpha}$ и прямой $\bar{O}\bar{E}_1$. Так как $\bar{\alpha}$ параллельна координатной оси $\bar{O}\bar{E}_3$, то M_2 лежит на прямой p, проходящей через N и параллельной OE_3. Таким образом, M_2 определяется как пересечение p и l.

Аналогично строится проекция M_1. Определите ее самостоятельно.

335. Даны координаты x_1, x_2, x_3 точки $\bar{M}$ относительно репера $\bar{O}$, $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ $\bar{E}_3$. Построить изображение M и вторичные проекции M_1, M_2 и M_3.

Решение. Так как $\overrightarrow{OM}=x_1\overrightarrow{OE_1}+x_2\overrightarrow{OE_2}+x_3\overrightarrow{OE_3}$, то $\overrightarrow{OM_1}=$ $=x_2\overrightarrow{OE_2}+x_3\overrightarrow{OE_3}$, $\overrightarrow{OM_2}=x_1\overrightarrow{OE_1}+x_3\overrightarrow{OE_3}$, $\overrightarrow{OM_3}=x_1\overrightarrow{OE_1}+x_2\overrightarrow{OE_2}$. Отсюда следует построение вторичных проекций M_1, M_2, M_3 (рис. 40).

336. Дана точка (M_1, M_3). Найти координаты точки $\bar{M}$.

337. Дана прямая (l, l_3). Найти ее следы.

Решение. Следом L прямой (l, l_3) на плоскости OE_1E_2 является точка пересечения прямых l и l_3. Пусть K — след прямой (l, l_3) на плоскость OE_1E_3. Тогда $K\in l$, $K_3=l_3\cap OE_1$. Но прямая KK_3 параллельна прямой OE_3. Отсюда следует построение следа K (рис. 41). Строим точку пересечения L прямых l и l_3 — след прямой (l, l_3) на плоскость OE_1E_2. Затем находим точку пересечения K_3 прямых l_3 и OE_1. Через K_3 проводим прямую m, параллельную оси OE_3. Искомая точка K находится как точка пере-

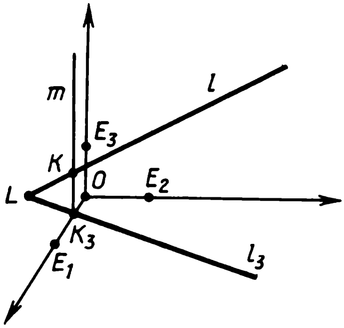


Рис. 41

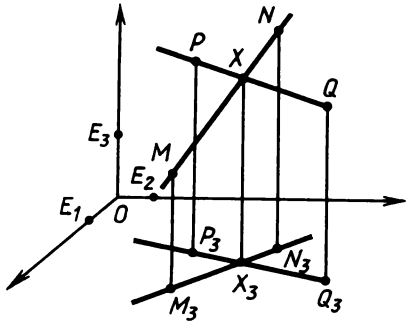


Рис. 42

сечения прямых m и l. Аналогично строится след прямой (l, l_3) на плоскость OE_2E_3. Определите его самостоятельно.

338. Построить следы прямой на координатных плоскостях, если прямая задана точками:
а) (M, M_3) и (N, N_3); в) (M, M_3) и (N, N_2);
б) (M, M_3) и (N, N_1); г) (M, M_1) и (N, N_2).

339. Определить, лежит ли точка (M, M_3) на прямой, определенной точками:
а) (P, P_3) и (Q, Q_3); в) (P, P_3) и (Q, Q_1);
б) (P, P_3) и (Q, Q_2); г) (P, P_1) и (Q, Q_2).

340. Определить, пересекаются ли прямые. В случае пересечения построить их общую точку. Прямые заданы точками:
а) (P, P_3), (Q, Q_3) и (M, M_3), (N, N_3);
б) (P, P_3), (Q, Q_3) и (M, M_2), (N, N_1);
в) (P, P_3), (Q, Q_3) и (M, M_3), (N, N_1);
г) (P, P_3), (Q, Q_2) и (M, M_1), (N, N_2).

Решение. а) На прямой M_3N_3 (рис. 42) лежат все вторичные проекции точек прямой MN. Аналогично вторичные проекции точек прямой PQ принадлежат P_3Q_3. Поэтому если прямые пересекаются, то вторичная проекция X_3 точки пересечения X совпадает с точкой пересечения прямых P_3Q_3 и M_3N_3. При этом прямая XX_3 должна быть параллельна оси OE_3. Таким образом, для того чтобы выяснить, пересекаются ли прямые, следует построить точку X пересечения прямых PQ и MN и точку X_3 пересечения P_3Q_3 и M_3N_3. Если прямая XX_3 параллельна оси OE_3, то данные прямые пересекаются в точке (X, X_3).

341. Построить следы плоскости α на координатных плоскостях, если α определена тремя точками, не лежащими на одной прямой:
а) (M, M_3), (N, N_3), (P, P_3);
б) (M, M_1), (N, N_3), (P, P_3);
в) (M, M_1), (N, N_2), (P, P_3).

Решение. а) Построим изображение линии пересечения искомой плоскости с координатной плоскостью $\overline{OE_1E_2}$. Для этого достаточно построить изображения двух точек, принадлежащих искомой прямой пересечения. Рассмотрим точку S пересечения прямых $\overline{PN}$ и $\overline{P_3N_3}$ (рис. 43). Эта точка лежит в координатной плоскости $\overline{OE_1E_2}$, так как ей принадлежит прямая $\overline{P_3N_3}$. Она также лежит и в плоскости $\bar{\alpha}$, так как находится на прямой $\overline{PN}$. Аналогично точка $\bar{T}$ пересечения $\overline{M_3P_3}$ и $\overline{MP}$ лежит и в $\bar{\alpha}$, и в плоскости $\overline{OE_1E_2}$. Прямая l, проходящая через S и T, является искомой. Аналогично строятся изображения линий пересечения с другими координатными плоскостями. Для этого следует использовать вторичные проекции данных точек на эти плоскости. Постройте их самостоятельно.

342. Даны следы прямой $\bar{l}$ на двух координатных плоскостях. Найти след прямой l на третьей координатной плоскости.

343. Плоскость $\bar{\alpha}$ задана двумя пересекающимися прямыми (l, l_3) и (m, m_3). Построить следы плоскости $\bar{\alpha}$ на координатных плоскостях.

344. Даны точка (A, A_3), принадлежащая плоскости $\bar{\alpha}$, и след плоскости $\bar{\alpha}$ на координатной плоскости $\overline{OE_1E_2}$. Построить следы плоскости $\bar{\alpha}$ на координатных плоскостях $\overline{OE_1E_3}$ и $\overline{OE_2E_3}$.

345. Дана точка (K, K_3). Найти такую точку (X, X_3), чтобы прямая KX была параллельна прямой, проходящей через точки:

а) (M, M_3) и (N, N_3);

б) (M, M_1) и (N, N_3);

в) (M, M_1) и (N, N_2).

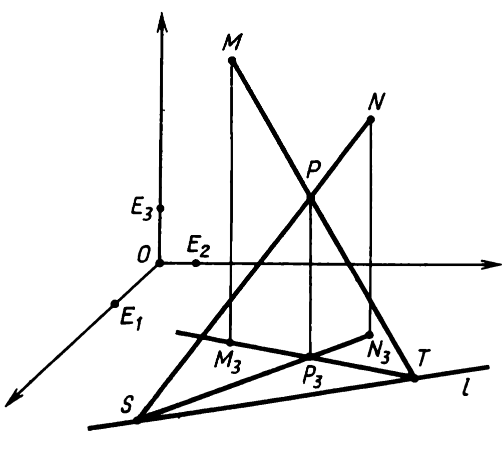


Рис. 43

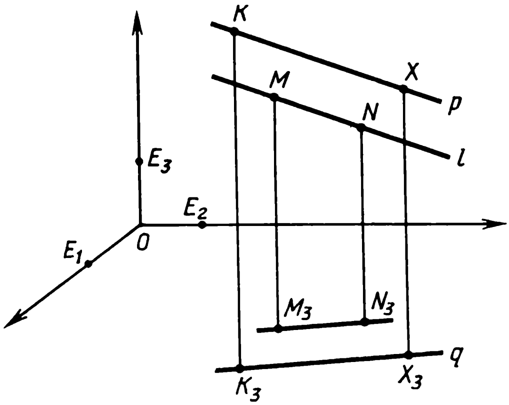


Рис. 44

а) Р е ш е н и е. Пусть точка (X, X_3) искомая (рис. 44). Рассмотрим плоскости, проходящие через прямые $\overline{MN}$ и $\overline{KX}$, параллельные координатной оси $\overline{OE}_3$. Так как прямые параллельны между собой, то и эти плоскости также параллельны друг другу. Поэтому они пересекают координатную плоскость $\overline{OE_1E_2}$ по параллельным прямым. Таким образом, для построения точки X через K следует провести прямую p, параллельную $l=MN$, а через K_3 — прямую q, параллельную (M_3N_3). В качестве точки X можно взять любую точку прямой p. Ее вторичная проекция X_3 совпадает с точкой пересечения прямой q с прямой, проходящей через X и параллельной $\overline{OE}_3$.

346. Даны плоскость $\bar{\alpha}$ и точка (P, P_3). Построить такие точки (Q, Q_3) и (R, R_3), чтобы плоскость, определяемая точками P, Q и R, была параллельна плоскости $\bar{\alpha}$, если $\bar{\alpha}$ задана тремя точками:
а) (L, L_3), (M, M_3), (N, N_3);
б) (L, L_3), (M, M_3), (N, N_2);
в) (L, L_1), (M, M_2), (N, N_3).

347. Даны точка (M, M_3) и плоскость $\bar{\alpha}$, заданная своими следами. Выяснить, принадлежит ли точка $\bar{M}$ плоскости $\bar{\alpha}$.

Р е ш е н и е. Пусть плоскость $\bar{\alpha}$ задана следами KL, LN и NK, а точка $\bar{M}$ — (M, M_3). $\bar{M} \in \bar{\alpha}$ тогда и только тогда, когда KM и OM_3 пересекаются на следе NL как аксонометрическая и вторичная проекции одной и той же прямой (рис. 45).

348. Даны плоскость $\bar{\alpha}$ и аксонометрическая проекция M точки $\bar{M}$, принадлежащей плоскости $\bar{\alpha}$. Плоскость $\bar{\alpha}$ задана своими следами. Построить вторичные проекции точки $\bar{M}$.

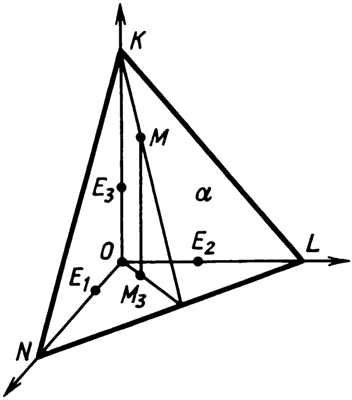


Рис. 45

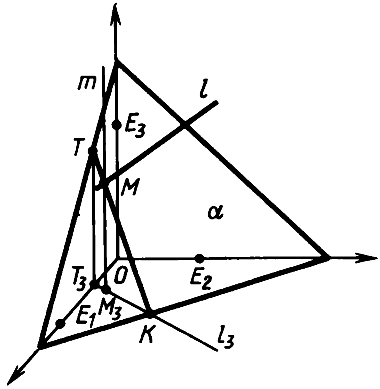


Рис. 46

349. Даны плоскость $\bar{\alpha}$ и вторичная проекция M_3 точки $\bar{M}$, принадлежащей плоскости $\bar{\alpha}$. Плоскость $\bar{\alpha}$ задана своими следами. Построить аксонометрическую проекцию точки $\bar{M}$.

350. Дана точка (M, M_3). Выяснить, принадлежит ли она плоскости, определяемой тремя точками:
а) (P, P_3), (Q, Q_3), (R, R_3);
б) (P, P_3), (Q, Q_1), (R, R_1);
в) (P, P_1), (Q, Q_2), (R, R_2);
г) (P, P_1), (Q, Q_2), (R, R_3);
д) (P, P_1), (Q, Q_1), (R, R_1).

351. Даны прямая (l, l_3) и плоскость $\bar{\alpha}$, заданная своими следами. Построить точку их пересечения.

Решение. Пусть (M, M_3) — искомая точка пересечения. Тогда $M_3 \in l_3$. Пусть T_3 — точка пересечения OE_1 и l_3. По вторичной проекции T_3 найдем аксонометрическую проекцию T точки (T, T_3), принадлежащей плоскости α. Прямые TM и T_3M_3 — аксонометрическая и вторичная проекции одной и той же прямой этой плоскости, значит, они пересекаются в точке K, принадлежащей следу плоскости $\bar{\alpha}$ на плоскости $\overline{OE_1E_2}$. Отсюда следует построение точки пересечения (M, M_3). Находим точку K пересечения l_3 со следом плоскости $\bar{\alpha}$ на плоскости $\overline{OE_1E_2}$ (рис. 46). Затем строим точку M пересечения прямых l и TK. Через точку M проводим прямую m, параллельную OE_3, и находим точку M_3 пересечения прямых m и T_3K.

352. Даны прямая (n, n_3) и плоскость $\bar{\alpha}$. Плоскость $\bar{\alpha}$ задана двумя пересекающимися прямыми (l, l_3) и (m, m_3). Найти точку пересечения прямой (n, n_3) и плоскости $\bar{\alpha}$.

353. Даны плоскость α, определенная точкой (MM_3) и следом l на плоскости OE_1E_2 и прямая $\bar{m}$, заданная точками (P, P_3) и (Q, Q_3). Построить точку пересечения прямой $\bar{m}$ и плоскости $\bar{\alpha}$.

354. Даны плоскость $\bar{\alpha}$ и прямая, определенная точками (P, P_3) и (Q, Q_3). Построить их точку пересечения, если $\bar{\alpha}$ задана точками:
а) (Z, Z_3), (M, M_3), (N, N_3);
б) (Z, Z_1), (M, M_1), (N, N_1);
в) (Z, Z_1), (M, M_2), (N, N_3);
г) (Z, Z_2), (M, M_2), (N, N_1).

355. Две плоскости заданы своими следами. Найти прямую пересечения этих плоскостей.

356. Даны точка (M, M_3) и плоскость $\bar{\alpha}$, заданная своими следами. Построить плоскость, проходящую через точку (M, M_3) и параллельную плоскости $\bar{\alpha}$.

357. Даны две плоскости. Одна определена точкой (M, M_3) и следом l на плоскости $\overline{OE_1E_2}$. Другая — тремя точками (M, M_3), (P, P_3) и (Q, Q_3). Построить их линию пересечения.

358. Даны плоскости $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, причем плоскость $\bar{\alpha}$ определена точкой (M, M_3) и следом l на координатной плоскости $\overline{OE_1E_2}$. Построить изображение прямой пересечения плоскостей $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, если $\bar{\beta}$ определена точками:
а) (N, N_3), (P, P_3), (Q, Q_3);
б) (N, N_3), (P, P_1), (Q, Q_1);
в) (N, N_1), (P, P_2), (Q, Q_3).

359. Даны плоскости $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Построить изображение их прямой пересечения, если они определены тройками точек:
а) (L, L_3), (M, M_3), (N, N_3) и (P, P_3), (Q, Q_3), (R, R_3);
б) (L, L_3), (M, M_3), (N, N_3) и (P, P_1), (Q, Q_2), (R, R_2);
в) (L, L_1), (M, M_2), (N, N_3) и (P, P_1), (Q, Q_2), (R, R_3).

360. Даны плоскости $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$. Найти их линию пересечения, если $\bar{\alpha}$ определена пересекающимися прямыми (a, a_3) и (b, b_3), а плоскость $\bar{\beta}$ — прямыми (c, c_3) и (d, d_3).

§ 15. АФФИННЫЕ ЗАДАЧИ АКСОНОМЕТРИИ

Литература: [2], § 31, 32.

Следуя школьной практике, не будем отличать точки, прямые и плоскости оригинала от их аксонометрических проекций. Будем называть и обозначать их одними и теми же буквами.

361. Доказать, что изображение треугольной призмы $ABCA'B'C'$ является полным.

Решение. Изображение фигуры $\overline{F}$ является полным, если к нему можно присоединить изображение аффинного репера (т. е. в изображении фигуры F выделить изображение аффинного репера) так, что все точки, прямые и плоскости, определяющие фигуру $\overline{F}$, являются заданными. Напомним, что точка M задана, если на плоскости изображения дана ее аксонометрическая проекция M и одна из вторичных проекций, например M_3. Прямая определена, если заданы две ее точки, плоскость — если заданы три ее точки, не лежащие на одной прямой. Выделим в изображении треугольной призмы изображение репера $(A,\ B,\ C,\ A')$ (рис. 47). Тогда вершины призмы лежат в координатных плоскостях. Поэтому их изображения совпадают с соответствующими вторичными проекциями, т. е. являются заданными.

362. Доказать, что изображения следующих многогранников являются полными: а) четырехугольной призмы; б) n-угольной призмы; в) треугольной пирамиды; г) четырехугольной пирамиды; д) n-угольной пирамиды.

363. Доказать, что изображение шестигранника на рисунке 48 не является полным. Определить коэффициент неполноты.

Решение. Изображение многогранника будет неполным, если существует такое присоединенное к нему изображение репера, в котором хотя бы одна из его точек не задана. Рассмотрим репер $(\overline{B}\overline{A}\overline{C}\overline{D})$. Вторичная проекция точки $\overline{E}$ в этом репере не определена. Этой проекцией может служить любая точка прямой, проходящей через E параллельно BD. Задав эту точку, получим полное изображение. Поэтому коэффициент неполноты равен единице.

364. Доказать, что изображения многогранников на рисунке 49, *а — г* не являются полными. Определить их коэффициенты неполноты.

365. Доказать, что изображение правильного октаэдра является полным.

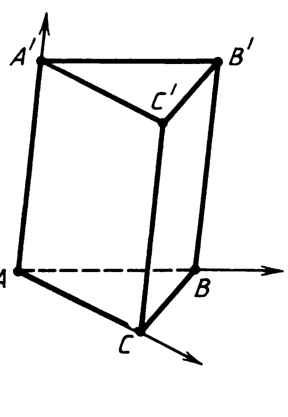


Рис. 47

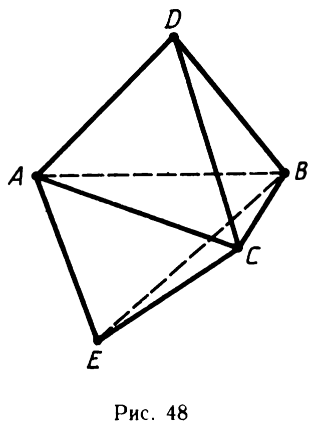


Рис. 48

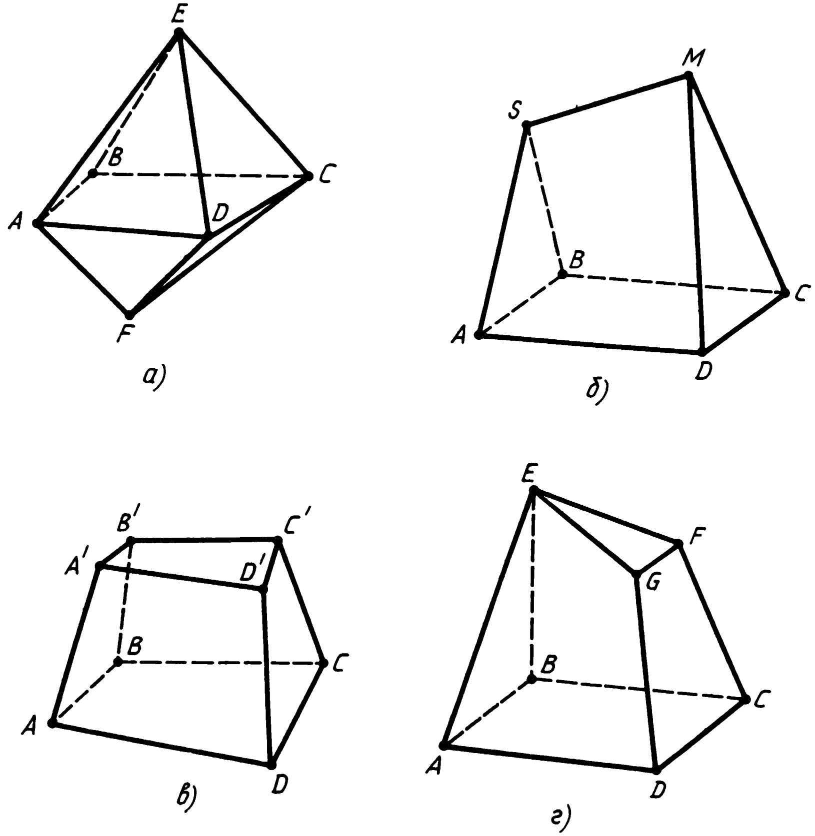


Рис. 49

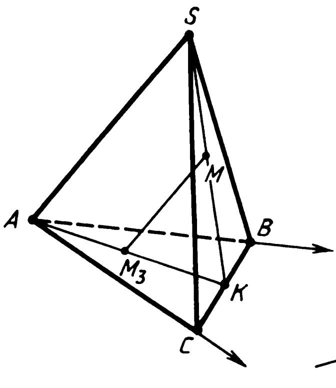


Рис. 50

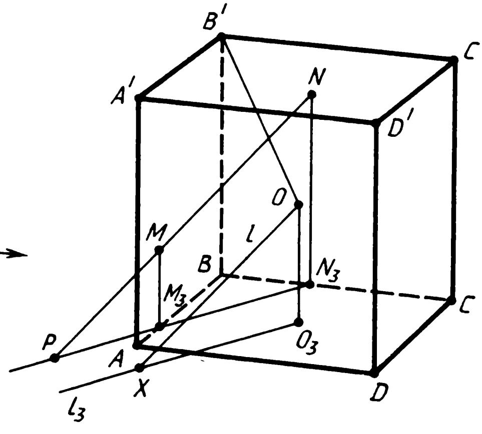


Рис. 51

366. Дано изображение усеченной n-угольной пирамиды. Доказать, что оно является полным.

367. Дано изображение треугольной пирамиды $ABCS$ и точки M на грани BCS. К данной пирамиде присоединим репер (A, B, C, S). Найти вторичную проекцию M_3 точки M.

Решение. Искомая проекция совпадает с точкой пересечения прямой, проходящей через M_3 параллельно AS, с плоскостью ABC. Ясно, что эта прямая лежит в плоскости ASM. Проведем через S и M прямую. Пусть K — точка ее пересечения с ребром CB (рис. 50). Тогда плоскость ASM совпадает с плоскостью ASK. Точка M_3 лежит на пересечении прямой, проходящей через M параллельно AS, и прямой AK.

368. Дана четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$. Построить точку пересечения прямой MN с основанием $ABCD$, если точки M и N принадлежат: а) ребру AA' и грани $BB'C'C$; б) граням $AA'B'B$ и $AA'D'D$; в) верхнему основанию $A'B'C'D'$ и грани $DD'C'C$.

369. Дана четырехугольная пирамида $ABCDS$. Построить точки пересечения прямой MN с основанием $ABCD$, если точки M и N принадлежат: а) ребру AS и грани CSD; б) граням ABS и BSC; в) граням ABS и CSD.

370. Даны четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$ и точки M и N на гранях $AA'B'B$ и $BB'C'C$. Найти точку пересечения прямой, параллельной MN и проходящей через центр симметрии призмы, с плоскостью основания.

Решение. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — изображение данной призмы, а M и N — данных точек (рис. 51). Обозначим через M_3 и N_3 вторичные проекции точек M и N. Центр симметрии O_3 параллелограмма $ABCD$ является вторичной проекцией центра симметрии O призмы на координатную плоскость ABD. Точка P пересечения прямых MN и M_3N_3 представляет собой изображение точки пересечения прямой MN с плоскостью основания призмы. Так как изображением параллельных прямых являются параллельные прямые, то прямые l и l_3, проходящие через O и O_3, соответственно параллельные MN и M_3N_3, служат изображениями искомой прямой и ее вторичной проекции. Искомая точка X совпадает с точкой пересечения l и l_3.

371. Даны треугольная призма $ABCA'B'C'$ и точки M и N на гранях $AA'B'B$ и $AA'C'C$. Найти точку пересечения прямой, параллельной MN и проходящей через середину ребра $B'C'$, с плоскостью основания ABC.

372. Даны четырехугольная пирамида $ABCDS$ и точки M и N на гранях ABS и ADS. Найти точку пересечения прямой, проходящей через точку пересечения медиан треугольника BCS и параллельной MN, с плоскостью основания пирамиды.

373. Даны треугольная призма $ABCA'B'C'$ и точки M, N, P, расположенные соответственно на ребрах AA', $A'B'$ и грани $BB'C'C$. Построить сечение призмы плоскостью MNP.

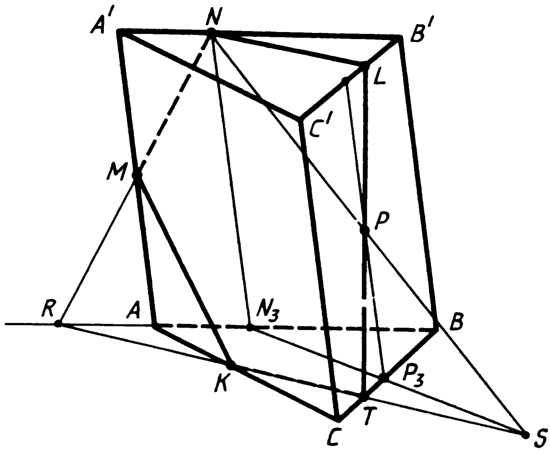


Рис. 52

Решение. Пусть $ABCA'B'C'$ — изображение данной призмы (рис. 52), а M, N и P — данных точек. Присоединим к данному изображению репер (A, B, C, A'). Тогда A — вторичная проекция точки M на плоскость ABC. Построим изображение прямой пересечения секущей плоскости с плоскостью основания ABC. Для этого построим вторичные проекции N_3 и P_3 точек N и P и найдем точки R и S пересечения прямых MN и NP с плоскостью ABC как точки пересечения прямых MN и AN_3, PN и P_3N_3. Прямая RS представляет собой прямую пересечения плоскостей MNP и ABC. Прямая RS пересекает ребра AC и CB в точках K и T. Прямая TP пересекает ребро $C'B'$ в точке L. Пятиугольник $KMNLT$ является искомым сечением.

374. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$. Построить сечение призмы плоскостью, определяемой точками, принадлежащими:

а) основанию ABC, грани $AA'B'B$ и ребру AA';
б) основаниям ABC и $A'B'C'$, а также ребру AA';
в) основаниям ABC и $A'B'C'$ и грани $AA'B'B$;
г) ребрам AA' и BB' и грани $AA'C'C$;
д) ребру AA' и граням $AA'B'B$ и $AA'C'C$;
е) основанию ABC и граням $AA'B'B$ и $BB'C'C$;
ж) граням $AA'B'B$, $AA'C'C$ и $BB'C'C$.

375. Дана четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$. Построить сечение плоскостью, определяемой точками, принадлежащими:

а) ребрам AA', BB' и $C'C$;
б) ребрам AA', $B'C'$ и CD;
в) ребрам AA' и AB и грани $CC'D'D$;
г) основанию $ABCD$, ребру AA' и грани $AA'B'B$;

д) основанию $ABCD$ и граням $AA'B'B$ и $BB'C'C$;
е) основаниям $ABCD$ и $A'B'C'D'$ и грани $BB'C'C$;
ж) основанию $ABCD$ и граням $AA'B'B$ и $BB'C'C$;
з) основанию $ABCD$ и граням $AA'B'B$ и $CC'D'D$;
и) граням $AA'B'B$, $CC'D'D$ и $AA'D'D$;
к) основанию $A'B'C'D'$ и граням $AA'B'B$ и $BB'C'C$;
л) основанию $A'B'C'D'$ и граням $AA'B'B$ и $CC'D'D$.

376. Даны треугольная пирамида $ABCD$ и точки M, N и P, принадлежащие граням ACD и CBD и основанию ABC. Построить сечение пирамиды плоскостью MNP.

Решение. Присоединим к данному изображению репер (A, B, C, D) (рис. 53). Построим вторичные проекции M_3, N_3 и P_3 данных точек M, N и P. Точка P совпадает со своей вторичной проекцией P_3 на координатную плоскость ABC. Точка M_3 является пересечением прямой, проходящей через M параллельно AD, с ребром AC. Для построения N_3 следует воспользоваться задачей 367. Затем определяем точку F пересечения прямой MN и плоскости ABC, которая является точкой пересечения прямых M_3N_3 и MN. Так как точки P и F принадлежат секущей плоскости, то прямая PF представляет собой линию пересечения секущей плоскости и основания ABC. Q и T — точки пересечения PF с ребрами AC и BC. Соединим их с точками M и N, найдем точки R и S пересечения QM и TN с ребрами AD и BD. Четырехугольник $QRST$ искомый.

377. Дана треугольная пирамида $ABCS$. Построить сечение плоскостью, заданной точками, принадлежащими:
а) ребру AS, основанию ABC и грани SBC;
б) граням ASB, BSC и ASC.

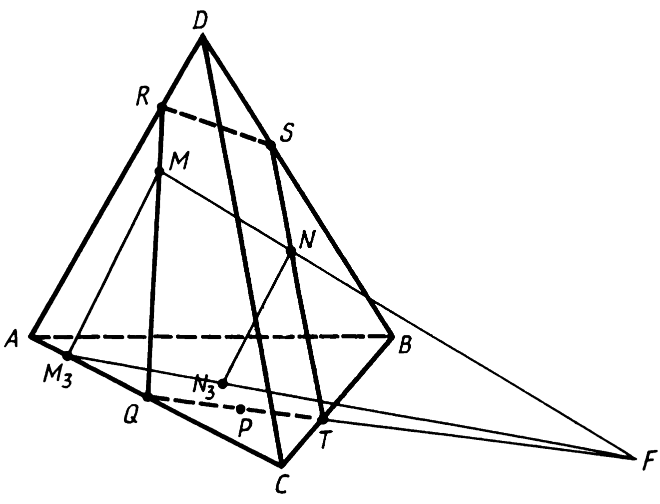


Рис. 53

378. Дано изображение четырехугольной пирамиды $ABCDS$. Построить сечение плоскостью, заданной тремя точками, изображения которых принадлежат:

а) ребрам AS и BS и основанию $ABCD$;

б) ребрам AS и BS и грани SDC;

в) ребру AS, грани BSC и основанию $ABCD$;

г) ребру AS, грани CSD и основанию $ABCD$;

д) ребру AS и граням BSC и ASB;

е) ребру AS и граням BSC и CSD;

ж) основанию $ABCD$ и граням ASB и BSC;

з) основанию $ABCD$ и граням ASB и DSC;

и) граням ASB, BSC и DSC.

379. Дана четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$. Построить прямую пересечения плоскостей, заданных точками:

а) A, B', C и M, N, P, принадлежащими соответственно ребру BB', основанию $ABCD$ и грани $BB'C'C$;

б) K, L, M, принадлежащими ребрам AA', BC', DC, и P, Q, R — граням $AA'B'B$, $BB'C'C$ и основанию $A'B'C'D'$;

в) K, L, M, принадлежащими граням $AA'B'B$, $BB'C'C$ и основанию $A'B'C'D'$, и P, Q, R, принадлежащими граням $CC'D'D$, $DD'A'A$ и основанию $ABCD$.

380. Дана четырехугольная пирамида $ABCDS$. Построить прямую пересечения плоскостей, заданных точками:

а) K, L, M на ребрах AS, SC, AD и P, Q, R на основании $ABCD$, ребре SD и грани BSC;

б) K, L, M на основании $ABCD$, грани ABS и ребре SC и P, Q, R на гранях BSC, DSC и ребре AD.

381. Дана четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$. Точка M — середина ребра BB'. Построить точку пересечения плоскости, проходящей через вершины A, B' и C, с прямой MD.

Решение. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — изображение данной призмы, O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$ (рис. 54). Для построения искомой точки X рассмотрим плоскость, содержащую прямую MD, найдем прямую пересечения этой плоскости с плоскостью $AB'C$. Тогда точка X совпадает с точкой пересечения построенной прямой и прямой MD. Удобнее всего в качестве плоскости, содержащей MD, взять плоскость $BB'D'D$. Эта плоскость пересекается с плоскостью ACB' по прямой $B'O$. Таким образом, искомая точка X совпадает с точкой пересечения прямых MD и $B'O$.

382. Дана четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$. Построить точку пересечения плоскости $AB'C$ с прямой MN, если точки M и N: а) середины ребер AB и $D'C'$; б) середины ребер AB и $B'C'$; в) середина ребра AB и центр грани $DD'C'C$.

383. Дана четырехугольная пирамида $ABCDS$. Найти точку пересечения прямой MN с плоскостью PQR, если:

а) точки M и N служат серединами ребер AB и SC, плоскость PQR совпадает с плоскостью BSD;

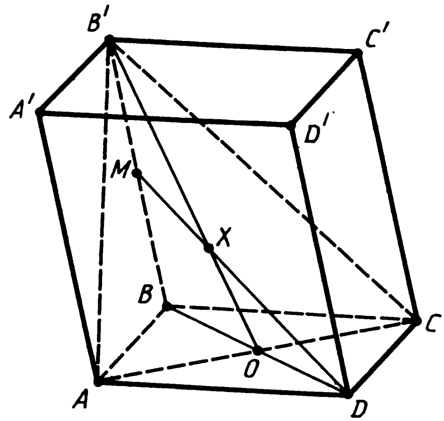


Рис. 54

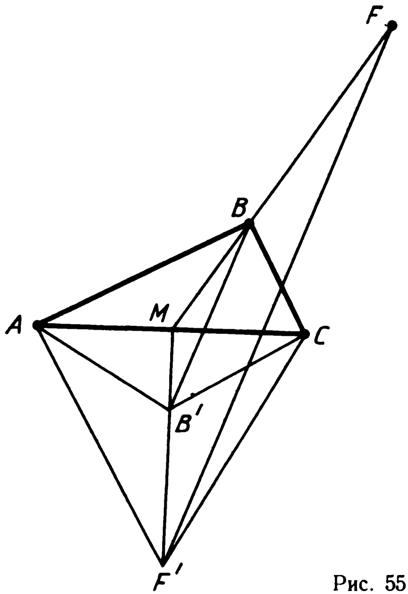


Рис. 55

б) точка M совпадает с A, N принадлежит грани BSC, P совпадает с B, Q — с D, а R — середина ребра SC;

в) точка M лежит на основании $ABCD$, N совпадает с S, точки P, Q и R принадлежат граням ASB, BSC и DSC;

г) точки M и N лежат на гранях ASB и DSC, точка P принадлежит основанию $ABCD$, точки Q и R лежат на гранях ASD и BSC.

§ 16. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АКСОНОМЕТРИИ

Литература: [2], § 33.

В этом параграфе, как и в предыдущем, не будем отличать точки, прямые и плоскости оригинала от их аксонометрических проекций.

384. Установить, являются ли изображения следующих фигур метрически или евклидово определенными. Если нет, то определить число параметров, необходимых для того, чтобы изображение стало таковым:

а) прямоугольного треугольника;
б) равнобедренного прямоугольного треугольника;
в) равнобедренного треугольника со стороной, равной 1;
г) равнобедренного треугольника с углом при основании в 30°;
д) параллелограмма с углом между сторонами в 30°;
е) ромба с углом между сторонами в 45°;
ж) квадрата;

з) прямоугольника, одна сторона которого в три раза больше другой;

и) прямоугольного параллелепипеда;

к) правильной четырехугольной пирамиды;

л) правильной треугольной призмы, высота которой в два раза больше стороны основания;

м) пирамиды, у которой длины боковых ребер равны 5, а в основании лежит прямоугольник со сторонами 3 и 4.

а) Решение. Изображение называется метрически или евклидово определенным, если с ним можно связать метрически или евклидово определенный репер. Репер является метрически определенным, если известны все скалярные произведения между его базисными векторами. В этом случае он определяется с точностью до движения. Репер будет евклидово определенным, если он определен с точностью до подобия. Для этого, например, достаточно знать углы между базисными векторами, определяемыми точками репера, и отношения длин этих векторов.

Изображение прямоугольного треугольника ABC ($\angle A$ прямой) не является ни метрически, ни евклидово определенным. Свяжем с его изображением репер $(A,\ B,\ C)$. $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AC}$. Нам известен только угол между $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Для того чтобы изображение было метрически определенным, необходимо задать еще два параметра, например длины сторон AB и AC. Тогда будут известны все скалярные произведения между векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Для того чтобы изображение было евклидово определенным, необходимо задать один параметр, например отношение $|AB|:|AC|$.

и) Решение. Как и в случае а), свяжем с изображением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ репер $(A,\ B,\ D,\ A')$. Нам известны углы между векторами $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{e}_3=\overrightarrow{AA'}$, определяемыми репером. Изображение будет метрически определенным, если ввести три параметра, например длины отрезков AB, AD, AA'. Изображение будет евклидово определенным, если ввести два параметра, например $|AB|:|AD|$, $|AB|:|AA'|$.

385. Дано изображение равнобедренного треугольника, угол при основании 30°. Построить изображение точки пересечения его высот.

Решение. Пусть ABC — изображение данного треугольника (рис. 55). Оно является евклидово определенным. M — середина отрезка AC. Тогда BM — изображение высоты угла при вершине треугольника. На этой прямой следует найти такую точку F, которая делит отрезок MB в том же отношении, что и точка пересечения высот высоту угла при вершине оригинала. Для построения точки F воспользуемся свойствами перспективно-аффинного преобразования. Построим равнобедренный треугольник $AB'C$ с основанием AC и углом 30° при основании. Пусть F' —

точка пересечения его высот. Рассмотрим перспективно-аффинное преобразование с осью AC, переводящее точку B' в точку B. Тогда прямая, содержащая высоту MB', перейдет в (MB), а точка F' — в искомую точку F. Для построения F через F' провести прямую, параллельную (BB'), и найти точку ее пересечения с прямой MB.

386. Дано изображение равнобедренного треугольника с углом 30° при вершине. Построить изображения его: а) высот; б) биссектрис.

387. Дано изображение треугольника, стороны которого равны 3, 4 и 5. Построить изображения центра: а) описанной окружности; б) вписанной окружности.

388. Дано изображение ромба, острый угол которого равен 60°. Построить изображения его высот.

389. Дано изображение равностороннего треугольника. Построить изображение квадрата, вписанного в него, две смежные вершины которого лежат на основании, а две другие — на сторонах треугольника.

390. Дано изображение треугольника и двух его высот. Построить изображение центра описанной окружности.

391. Дано изображение прямоугольного треугольника с острым углом 30°. Найти изображения квадратов, построенных на катетах и гипотенузе.

392. Даны изображения правильного треугольника и угла. Построить изображение биссектрисы данного угла.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — изображение данного треугольника, а MON — данного угла (рис. 56). Построим равносторонний треугольник ABC' и рассмотрим перспективно-аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в треугольник ABC'. При этом преобразовании любая фигура, лежащая на плоскости изображения, преобразуется в фигуру, аффинно-эк-

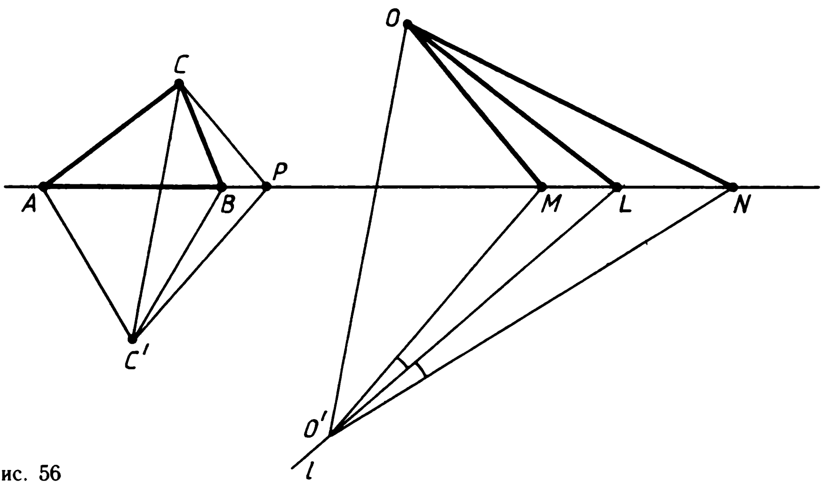


Рис. 56

вивалентную ей. Таким образом, для решения следует найти образ угла при этом преобразовании, построить его биссектрису. Затем найти прообраз этой биссектрисы. Опишем построение. Прямая AB — ось перспективно-аффинного преобразования, состоящая из его неподвижных точек. Точки C и C' соответствуют друг другу при перспективно-аффинном преобразовании. Поэтому прямые, соединяющие соответствующие точки, параллельны CC'. Найдем образ прямой OM. CP параллельна OM. $C'P$ — образ прямой CP при указанном преобразовании. Отсюда следует, что образом прямой OM является прямая l, проходящая через M и параллельная PC'. Образом O' точки O является точка пересечения l с прямой, проходящей через O параллельно CC'. Отсюда следует, что $\angle MO'N$ — образ $\angle MON$ при рассматриваемом перспективно-аффинном преобразовании. Строим биссектрису $O'L$ угла $MO'N$. Тогда OL — искомая биссектриса.

393. Даны изображения равностороннего треугольника, луча и отрезка. Отложить на этом луче от его начала отрезок, оригинал которого равен оригиналу данного изображения.

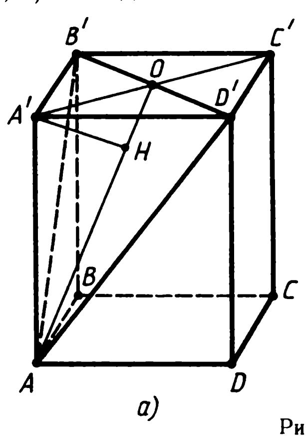
394. Даны изображения квадрата, точки и прямой. Построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

395. Даны изображения квадрата и треугольника. Построить для этого треугольника изображения: а) точки пересечения высот (ортоцентр); б) центра описанной окружности; в) центра вписанной окружности.

396. Даны изображения треугольника и его ортоцентра. Построить треугольник, подобный оригиналу, основание которого совпадает с данным отрезком.

397. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, в основании которого лежит квадрат со стороной a, высота параллелепипеда $2a$. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A' на плоскость $AB'D'$.

Решение. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — данный параллелепипед (рис. 57, a). Найдем плоскость, проходящую через A', которая



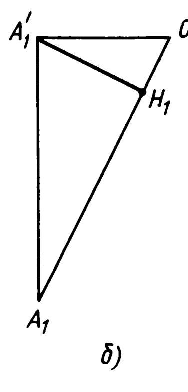


Рис. 57

перпендикулярна плоскости сечения $AB'D'$. Искомый перпендикуляр будет лежать в этой плоскости. В качестве такой плоскости удобнее всего выбрать плоскость $AA'C'C$. Она будет перпендикулярна плоскости $AB'D'$, так как прямая $B'D'$ перпендикулярна плоскости $AA'C'C$ (докажите это самостоятельно). Таким образом, основание искомого перпендикуляра будет лежать на прямой AO пересечения этих плоскостей. Задача свелась к построению высоты $A'H$ прямоугольного треугольника $AA'O$. Так как высота параллелепипеда равна $2a$, сторона основания AB квадрата — a, то из прямоугольного треугольника $AA'O$ получим: $|A'O|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $|AA'|=2a$, $|AO|=\frac{3}{\sqrt{2}}a$. Таким образом, следует построить прямоугольный треугольник $A_1A_1'O_1$ с катетами $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, и $2a$ (рис. 57, *б*), построить высоту $A_1'H_1$ его прямого угла, затем разделить отрезок AO в отношении $\frac{[A_1H_1]}{[H_1O_1]}$, $[A'H]$ — изображение искомого перпендикуляра.

398. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$, высота которой равна стороне основания. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость $A'BC$.

399. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость $A'BD$. Доказать, что он совпадает с диагональю куба.

400. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Построить перпендикуляр, опущенный из середины стороны AA' на плоскость, проходящую через центры граней $A'B'C'D'$, $BB'C'C$ и $DD'C'C$.

401. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$, высота которой в два раза больше стороны основания. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость, проходящую через середину ребер BB' и $A'B'$ и центр основания $A'B'C'$.

402. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, сторона основания которой равна высоте. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость, проходящую через середины ребер BB', $F'E'$ и FE.

403. Дана правильная треугольная пирамида $ABCS$, сторона основания которой равна высоте. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на грань BCS.

404. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, сторона основания которой в два раза меньше высоты. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на боковую грань BCS.

405. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, сторона основания которой равна высоте. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость, проходящую через середины ребер BC, CD, CS.

406. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, сторона основания которой в два раза меньше высоты. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины S на плоскость, проходящую через вершину A и середины ребер BS и CS.

407. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, сторона основания которой равна высоте. Построить сечение, проходящее через вершину A, перпендикулярно ребру SC.

408. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$. В основании лежит правильный треугольник ABC. Ребро AA' составляет углы, равные 60°, с ребрами оснований AB и AC. Построить сечение, проходящее через ребро BC, перпендикулярно AA'.

409. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA'B'C'D'$, сторона основания которой в два раза меньше бокового ребра. Построить сечение плоскостью, которая проходит через:

а) центр грани $AA'B'B$, перпендикулярно диагонали $C'D$ грани $CC'D'D$;

б) вершину A', перпендикулярно диагонали $C'D$ грани $CC'D'D$;

в) середину ребра AB, перпендикулярно диагонали $C'D$ грани $CC'D'D$.

410. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через:

а) середину ребра $A'D'$, перпендикулярно диагонали AC основания;

б) вершину D', перпендикулярно диагонали $A'C$.

411. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, у которой ребро основания равно боковому ребру. Найти основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на грань BCS.

Решение. Пусть $ABCDS$ — данная пирамида (рис. 58). Найдем плоскость, проходящую через точку D, перпендикулярную грани BSC. Тогда искомый перпендикуляр будет лежать в этой плоскости. Решение сводится к построению перпендикуляра, опущенного из точки D на линию пересечения грани BSC, и найденной перпендикулярной плоскости. Пусть M и N — середины ребер AD и BC, поэтому прямые MN и BC перпендикулярны между собой. Плоскость MSN содержит высоту SO пирамиды. Прямая BC перпендикулярна плоскости MSN, следовательно, боковая грань BCS и плоскость MSN перпендикулярны между собой. Так как DC параллельна MN, то в качестве плоскости, проходящей через точку D и перпендикулярной грани BCS, можно взять плоскость, параллельную MSN. Для построения линии пересечения этих плоскостей проведем прямую SK, параллельную AD, DK, параллельную MS, и CK, параллельную NS. Тогда CK — искомая линия пересечения плоскостей. Задача свелась к построению высоты DH треугольника DKC. Треугольники DKC и MNS равны между собой. Если обозначить сторону основания через a, то из условия следует, что $SD=a$. Из прямоугольного треугольника SMD получим $SM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Таким образом, треуголь-

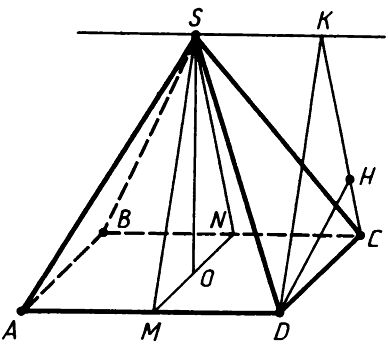


Рис. 58

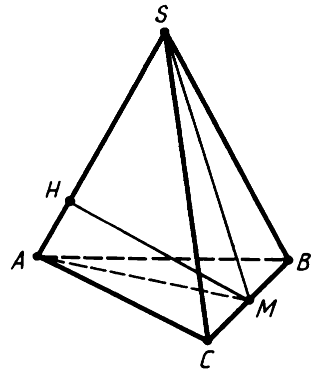


Рис. 59

ник KCD равнобедренный, $DC=a$, $KD=KC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Построив треугольник, подобный оригиналу, проведем в нем высоту и определим, в каком отношении точка H делит сторону KC. Используя это отношение, построим точку H.

412. Дана правильная треугольная пирамида $ABCS$, высота которой равна стороне основания. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на грань BCS.

413. Дана треугольная пирамида $SABC$, у которой все плоские углы при вершине S равны 60°. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины S на плоскость ABC, если длины боковых ребер:

а) SA, SB и SC равны между собой;

б) равны $SA=CB=a$, $SC=2a$.

414. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. M и N — середины ребер BC и CD. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A' на плоскость $C'MN$.

415. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Грани ABC и ADB перпендикулярны между собой. Угол ACB прямой, ребра AC, CB, AD и DB равны между собой. Построить перпендикуляр, опущенный из вершины A на грань CBD.

416. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, боковое ребро которой в два раза больше ребра основания. Построить общий перпендикуляр ребер AS и BC.

Решение. Ребра AS и BC перпендикулярны между собой. Поэтому существует плоскость, проходящая через первую прямую и перпендикулярная второй. Если M — середина отрезка BC, то такой плоскостью является плоскость AMS (докажите это самостоятельно). Поэтому искомым перпендикуляром служит высота MH треугольника AMS (рис. 59).

417. Дана правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой равна боковому ребру. Построить общий перпендикуляр между ребром основания и апофемой противоположной грани.

418. Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$, все ребра которой равны между собой, а плоские углы при вершине A также одинаковы. Построить общий перпендикуляр ребер AA' и BC.

419. Дана четырехугольная прямая призма, в основании которой лежит ромб с острым углом 60°. Построить общие перпендикуляры между боковым ребром и скрещивающимися с ним ребрами оснований.

420. Дана правильная четырехугольная пирамида, у которой ребро основания равно апофеме боковой грани. Построить общий перпендикуляр ребра основания и скрешивающегося с ним бокового ребра.

Решение. Пусть $ABCDS$ — данная пирамида (рис. 60, *а*). Боковое ребро AB не перпендикулярно ребру SD. Поэтому для построения их общего перпендикуляра воспользуемся следующим способом. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые (рис. 60, *б*). Через точку M прямой a проведем плоскость α, перпендикулярную a. Прямая c — проекция b на плоскость α. Опустим перпендикуляр MN из точки M на прямую c. Прямая MN перпендикулярна a, так как лежит в плоскости α. По теореме о трех перпендикулярах MN образует прямой угол с b. Искомый общий перпендикуляр PQ параллелен MN. Для нахождения точки P проведем NP, параллельную a, $P \in b$. Для нахождения точки Q проведем прямую PQ, параллельную MN, $Q \in a$. PQ — искомый общий перпендикуляр.

Рассмотрим скрещивающиеся ребра AB и SD пирамиды (см. рис. 60, *а*). Пусть M и N — середины сторон AB и DC. Тогда плоскость SMN перпендикулярна ребру AB. Так как DC перпендикулярно апофеме SN, то SN — проекция SD на плоскость SMN. Построим перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую SN. Так как по условию треугольник MSN равносторонний, то перпендикуляром является медиана ML этого треугольника.

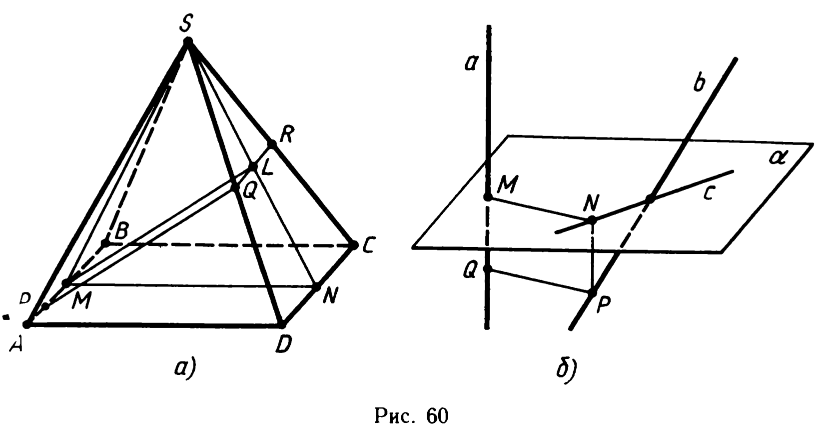


Рис. 60

Через середину L апофемы SN проведем среднюю линию QR треугольника CSD. Прямая QR параллельна AB' и пересекает SD в точке Q. Через точку Q проведем отрезок PQ, параллельный ML. Отрезок PQ — искомый общий перпендикуляр прямых AB и SD. Заметим, что точка P — середина отрезка AM. Аналогично можно построить общий перпендикуляр прямых AB и SC.

421. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Построить общий перпендикуляр ребра $A'B'$ и диагонали AC'.

422. Дана правильная шестиугольная пирамида $ABCDEFS$, сторона основания которой равна боковому ребру. Построить общий перпендикуляр ребер: а) AB и SD; б) AB и SC.

423. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, M и N — середины ребер AC и BC. Построить общий перпендикуляр прямых BM и DN.

424. Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDS$, у которой сторона основания равна боковому ребру. Пусть M и N — середины ребер DC и AS. Построить общий перпендикуляр прямых: а) SM и BD; б) SM и DN.

425. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, у которого боковое ребро в два раза больше ребра основания. Построить общий перпендикуляр скрещивающихся диагоналей AB' и $A'D$ смежных граней.

426. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$, все ребра которой равны между собой. Точки M и N — середины сторон AC и CB. Построить общий перпендикуляр прямых $A'M$ и AN.

§ 17. МЕТОД МОНЖА

Литература: [2], § 34.

Будем придерживаться обозначений учебника [2]. Если $\overline{M}$ — точка пространства, то M_1 и M_2 — ее ортогональные проекции на горизонтальную и вертикальную плоскости $\overline{M}$ (M_1, M_2). Аналогично a_1 и a_2 — горизонтальная и вертикальная проекции прямой $\overline{a}:\overline{a}$ (a_1, a_2).

427. Построить на эпюре изображения:

а) прямоугольного параллелепипеда при условии, что вертикальная и горизонтальная плоскости параллельны его боковой грани и основанию;

б) правильной треугольной пирамиды, если ее основание параллельно горизонтальной плоскости;

в) цилиндра, если его основание параллельно вертикальной плоскости;

г) конуса, если его основание параллельно горизонтальной плоскости;

д) шара.

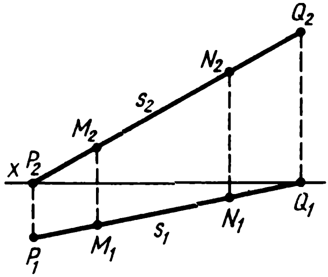


Рис. 61

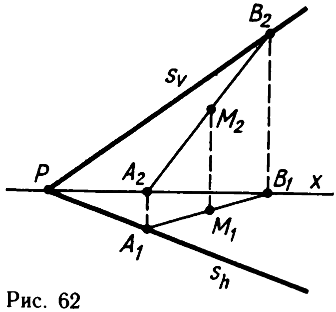


Рис. 62

428. Указать особенности в расположении точки в пространстве, если на эпюре ее горизонтальная и вертикальная проекции совпадают.

429. Прямая $\bar{s}$ задана на эпюре двумя точками $\bar{M}$ (M_1, M_2) и $\bar{N}$ (N_1, N_2). Построить следы этой прямой.

Решение. Требуется построить на эпюре точки пересечения прямой с горизонтальной и вертикальной плоскостями. Заметим: точка $\bar{P}$ (P_1, P_2) принадлежит горизонтальной плоскости, если вертикальная проекция P_2 лежит на прямой x пересечения горизонтальной и вертикальной плоскостей. Аналогично точка $\bar{Q}$ (Q_1, Q_2) лежит на вертикальной плоскости, если ее горизонтальная проекция Q_1 лежит на прямой x. Проведем прямые $s_1 = M_1N_1$ и $s_2 = M_2N_2$. Они служат горизонтальной и вертикальной проекциями прямой $\bar{s}$ на соответствующие плоскости (рис. 61). Обозначим через Q_1 и P_2 точки пересечения s_1 и s_2 с прямой x. Тогда P_2 — вертикальная проекция точки $\bar{P}$ пересечения прямой $\bar{s}$ с горизонтальной плоскостью и Q_1 — горизонтальная проекция следа прямой s на вертикальной плоскости. Проведем через Q_1 и P_2 прямые, перпендикулярные x, до пересечения с s_1 и s_2. Получим проекции P_1 и Q_2 искомых следов $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ соответственно на горизонтальную и вертикальную плоскости. Точки $\bar{P}$ (P_1, P_2) и $\bar{Q}$ (Q_1, Q_2) искомые.

430. Указать особенности в расположении прямой, если на эпюре ее проекции на горизонтальную и вертикальную плоскости совпадают.

431. Даны прямая $\bar{l}$ (l_1, l_2) и точка $\bar{M}$ ($\bar{M}_1$, M_2). Построить проекции x_1 и x_2 прямой $\bar{x}$, проходящей через точку $\bar{M}$ и параллельной $\bar{l}$.

432. Даны прямая $\bar{l}$ (l_1, l_2) и точка $\bar{M}$ (M_1, M_2). Построить следы прямой $\bar{x}$, проходящей через $\bar{M}$ и параллельной $\bar{l}$.

433. Даны прямая $\bar{l}$ и точка $\bar{M}$ (M_1, M_2), принадлежащая прямой. По заданной проекции l_1 построить проекцию l_2.

434. Указать особенности в расположении на эпюре параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых.

435. Даны точка $\overline{M}$ (M_1, M_2) и прямая s_h пересечения плоскости $\overline{\pi}$ с горизонтальной плоскостью. Построить след $\overline{s_v}$ пересечения $\overline{\pi}$ с вертикальной плоскостью, если $\overline{M}$ принадлежит $\overline{\pi}$.

Р е ш е н и е. Пусть на рисунке 62 изображены точки M_1, M_2 и прямая s_h. Выберем точку A_1 на прямой s_h. Будем считать, что это горизонтальная проекция точки $\overline{A}$, лежащей на прямой пересечения плоскости $\overline{\pi}$, проходящей через $\overline{M}$, и горизонтальной плоскости H. Так как $\overline{A}$ принадлежит горизонтальной плоскости H, то ее вертикальная проекция A_2 лежит на прямой x. Таким образом построили проекции A_1 и A_2 точки $\overline{A}$, лежащей в плоскости $\overline{\pi}$. Построим проекции B_1 и B_2 точки $\overline{B}$ пересечения прямой $\overline{AM}$ с вертикальной плоскостью V. Так как прямая $\overline{AM}$ лежит в $\overline{\pi}$, то $\overline{B}$ также принадлежит $\overline{\pi}$. Поэтому для построения следа s_v достаточно соединить точку P пересечения x и s_h с B_2. Построение точек B_1 и B_2 описано в задаче 429. Проведем прямые A_1M_1 и A_2M_2. B_1 — пересечение A_1M_1 с A_2M_2, а B_2 — прямой, проходящей через B_1 и перпендикулярной x, с A_2B_2. Соединим P и B_2, получим s_v.

436. Плоскость задана своими следами s_h и s_v. Точка $\overline{M}$ (M_1, M_2) принадлежит плоскости. По данной проекции M_1 построить M_2.

437. Плоскость задана своими следами s_h и s_v. Установить, принадлежит ли точка $\overline{M}$ (M_1, M_2) плоскости.

438. Плоскость определена своими следами s_h и s_v. Известно, что прямая $\overline{l}$ принадлежит плоскости. По ее заданной проекции l_1 найти проекцию l_2.

439. Плоскость определена своими следами s_h и s_v. Установить, лежит ли прямая $\overline{l}$ (l_1, l_2) в плоскости.

440. Плоскость задана точками $\overline{M}$ (M_1, M_2), $\overline{N}$ (N_1, N_2), $\overline{P}$ (P_1, P_2), не лежащими на одной прямой. Построить ее следы s_h и s_v.

441. Плоскости заданы своими следами s_h и s_v и t_h и t_v. Построить проекции их линии пересечения.

442. Плоскость $\overline{\pi}$ задана своими точками $\overline{M}$ (M_1, M_2), $\overline{N}$ (N_1, N_2) и $\overline{P}$ (P_1, P_2), не лежащими на одной прямой, плоскость $\overline{\alpha}$ определена своими следами s_h и s_v. Построить прямую пересечения этих плоскостей.

443. Плоскость $\overline{\pi}$ задана своими следами s_h и s_v, а прямая $\overline{l}$ — точками $\overline{M}$ (M_1, M_2) и $\overline{N}$ (N_1, N_2). Построить точку пересечения прямой $\overline{M}\overline{N}$ и плоскости $\overline{\pi}$.

Глава III
ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ

§ 18. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА. ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Литература: [2], § 35, 36.

444. На евклидовой плоскости E_2 введена прямоугольная декартова система координат. Множество U называется открытым, если оно либо пустое, либо совпадает с E_2, либо вместе с каждой своей точкой M_0 (x_0, y_0) содержит «полосу» O_ε $(M_0)=\{M(x, y)| |x-x_0|<\varepsilon\}$, где ε — некоторое положительное число. Доказать, что такая система открытых множеств определяет топологическую структуру на E_2.

Решение. Система τ подмножеств множества T определяет на множестве T топологическую структуру (или топологию), если она подчиняется трем условиям:

1. Пустое множество и все множество T принадлежат τ.

2. Объединение любой системы множеств из τ также принадлежит τ.

3. Пересечение любых двух множеств из τ принадлежит τ.

Подмножества, принадлежащие τ, называются открытыми.

Как следует из условия, пустое множество и вся плоскость E_2 являются открытыми множествами. Рассмотрим произвольную систему открытых множеств $\{U_\alpha\}$. Пусть $U=\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, $M_0\,(x_0, y_0)$ — произвольная точка множества U. Тогда M_0 принадлежит некоторому открытому множеству U_{α_0} из рассматриваемой системы. Так как U_{α_0} — открытое множество, то вместе с точкой M_0 оно содержит «полосу» $O_\varepsilon(M_0)=\{M(x, y)||x-x_0|<\varepsilon\}$, где ε — некоторое положительное число. $U_{\alpha_0}\subset U$, поэтому $O_\varepsilon(M_0)\subset U$. Следовательно, множество U вместе с каждой своей точкой M_0 содержит «полосу» $O_\varepsilon(M_0)$, т. е. является открытым.

Пусть U_1 и U_2 — два открытых множества. Рассмотрим точку $M_0 \in U_1 \cap U_2$. Так как U_1 — открытое множество, то U_1 содержит «полосу» $O_{\varepsilon_1}(M_0)$. Аналогично U_2 также содержит «полосу» $O_{\varepsilon_2}(M_0)$. Пусть $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тогда «полоса» $O_\varepsilon(M_0)$ принадлежит $U_1 \cap U_2$. Таким образом, $U_1 \cap U_2$ — открытое множество. Утверждение доказано.

445. Дано метрическое пространство M. Шаровой окрестностью точки X пространства M называется множество, состоящее из всех таких точек Y, для которых $\rho(X, Y) < r$, где r — некоторое положительное число. Множество пространства M будем называть открытым, если оно вместе с любой своей точкой содержит и некоторую ее шаровую окрестность. Доказать, что на M определена топологическая структура (такая топология называется топологией, индуцированной метрикой).

446. Дано произвольное множество T. Под открытым множеством будем понимать множество T и пустое подмножество. Доказать, что на T определена топологическая структура (такая топология называется тривиальной).

447. Дано произвольное множество T. Под открытым множеством будем понимать любое подмножество множества T. Доказать, что на T определена топологическая структура (такая топология называется дискретной).

448. Множество T состоит из двух элементов: $T = \{a, b\}$. Под открытым множеством будем понимать пустое множество, множество T и подмножество N, состоящее из одной точки: $N = \{a\}$. Доказать, что на T определена топологическая структура.

449. Множество T состоит из трех элементов: $T = \{a, b, c\}$. Под открытым множеством будем понимать пустое множество, все множество T и подмножества $N_1 = \{a\}$, $N_2 = \{b\}$, $N_3 = \{a, b\}$. Доказать, что на T определена топологическая структура.

450. Множество T состоит из трех элементов: $T = \{a, b, c\}$. Под открытым множеством будем понимать множество T, пустое множество и подмножества $N_1 = \{a\}$, $N_2 = \{b\}$, $N_3 = \{a, b\}$, $N_4 = \{a, c\}$. Доказать, что на множестве T определена топологическая структура.

451. Дана евклидова плоскость E_2, на которой выбрана прямоугольная декартова система координат. Множество U точек плоскости назовем открытым, если оно вместе с каждой своей точкой содержит открытый круг $\Omega_r = \{A(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$, которому принадлежит точка. Пустое множество также будем считать открытым. Доказать, что на плоскости E_2 определена топологическая структура (такая топология называется концентрической).

452. Пусть T — бесконечное множество. Его подмножество назовем открытым, если оно либо пустое, либо совпадает с T, либо его дополнение до T является конечным множеством. Доказать, что на T определена топологическая структура (такая топология называется топологией Зарисского).

453. Доказать, что на множестве T тогда и только тогда определена дискретная топология (см. задачу 447), когда любое его подмножество, состоящее из одной точки, является открытым.

454. Пусть множество T состоит из трех элементов. Найти все его топологические структуры.

455. Множество T состоит из трех элементов: $T = \{a, b, c\}$. Доказать, что система подмножеств T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ не определяет топологической структуры.

456. Пусть T — бесконечное множество. Рассмотрим систему подмножеств, состоящую из пустого множества, множества T и всех подмножеств, дополнение каждого из которых до T является бесконечным. Доказать, что такая система подмножеств не определяет на T топологической структуры.

457. Найти пример бесконечной системы открытых подмножеств прямой E_1, пересечение которых не является открытым множеством*.

458. Пусть T — множество, состоящее из трех элементов: $T=\{a, b, c\}$. Топологическая структура на T определена так, как указано в задаче 449. Найти все его замкнутые подмножества.

Решение. Подмножество K топологического пространства T называется замкнутым, если его дополнение $T\backslash K$ является открытым множеством. Система открытых множеств, определяющая топологическую структуру на T, имеет вид $\varnothing$, T, $N_1=\{a\}$, $N_2=\{b\}$, $N_3=\{a, b\}$. Поэтому система замкнутых множеств на T состоит из подмножеств T, $\varnothing$, $K_1=T\backslash N_1=\{b, c\}$, $K_2=T\backslash N_2=$ $=\{a, c\}$, $K_3=T\backslash N_3=\{c\}$.

459. Найти все замкнутые множества топологического пространства, определенного в задаче 448.

460. Найти подмножество топологического пространства, определенного в задаче 450, которое является одновременно открытым и замкнутым.

461. На бесконечном множестве T задана топология Зарисского (см. задачу 452). Доказать, что подмножество этого пространства тогда и только тогда является замкнутым, когда оно конечное.

462. На евклидовой плоскости E_2 введена прямоугольная декартова система координат. Доказать, что следующие множества плоскости E_2 являются замкнутыми: а) отрезок; б) прямая линия; в) окружность; г) замкнутый круг $M=\{A\,(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant$ $\leqslant r^2\}$; д) эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; е) гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; ж) парабола $y^2=2px$.

Решение. б) Пусть l — данная прямая. Докажем, что множество $N=E_2\backslash l$ открытое. Для этого достаточно доказать, что оно вместе с любой своей точкой содержит шаровую окрестность с центром в этой точке. Рассмотрим произвольную точку A, не принадлежащую l (рис. 63). Пусть d — расстояние от точки A до l. Тогда шаровая окрестность с центром в точке A, радиус r которой меньше d, не пересекает l и целиком лежит в N.

463. Привести пример бесконечной системы замкнутых множеств прямой E_1, объединение которых не является замкнутым множеством.

---

* Здесь и в дальнейшем (если особо не оговорено) предполагается, что на прямой E_1 и плоскости E_2 задана топология, индуцированная евклидовой метрикой (см. задачу 445).

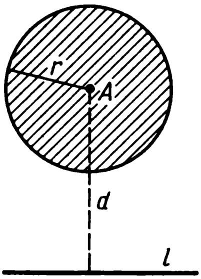


Рис. 63

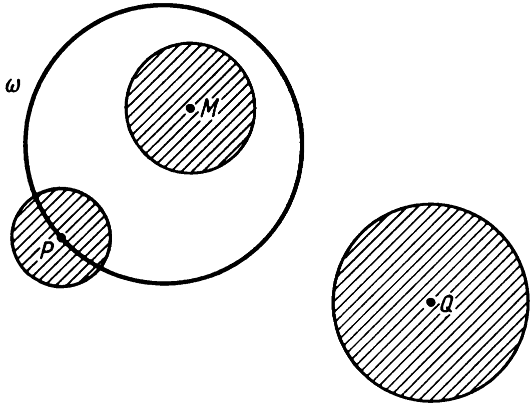


Рис. 64

464. Привести пример множества точек плоскости E_2, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

465. На плоскости E_2 определена концентрическая топология (см. задачу 451). Выяснить, какие из множеств являются открытыми, какие замкнутыми, а какие не являются ни открытыми, ни замкнутыми: а) открытый круг $\Omega=\{A(x, y)\,|\,x^2+y^2<r^2\}$; б) замкнутый круг $\bar{\Omega}=\{A(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$; в) прямая, уравнение которой имеет вид $x-y=0$; г) множество точек $\{A(x, y)\,|\,x^2+y^2>r^2\}$; д) множество точек $\{A(x, y)\,|\,x^2+y^2\geqslant r^2\}$.

466. На плоскости E_2 введена топологическая структура так, как указано в задаче 444. Выяснить, какие из множеств являются открытыми, какие замкнутыми, а какие не являются ни открытыми, ни замкнутыми: а) открытая полуплоскость $\{A(x, y)\,|\,x<a\}$; б) замкнутая полуплоскость $\{A(x, y)\,|\,x\leqslant a\}$; в) замкнутый круг $\{A(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$; г) прямая линия $\{A(x, y)\,|\,x=a\}$; д) квадрат $\{A(x, y)\,|\,-a\leqslant x\leqslant a,\ -a\leqslant y\leqslant a\}$.

467. Пусть U и F соответственно открытое и замкнутое множества топологического пространства. Доказать, что $U\setminus F$ — открытое, а $F\setminus U$ — замкнутое множество этого пространства.

468. Найти пример двух непересекающихся замкнутых множеств евклидовой плоскости E_2, расстояние между которыми равно нулю*.

469. Найти пример двух непересекающихся замкнутых множеств евклидовой прямой E_1, расстояние между которыми равно нулю.

---

* Под расстоянием между двумя множествами X и Y метрического пространства понимается $\inf\{\rho(x, y)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}$.

§ 19. ВНУТРЕННИЕ, ВНЕШНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ. ЗАМЫКАНИЕ МНОЖЕСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Литература: [2], § 36.

470. На плоскости E_2 дано множество T. Найти множества его внутренних точек $\operatorname{int} T$, граничных точек ∂T, внешних точек $\operatorname{ext} T$, если: а) T — открытый круг $T=\{M(x, y) \mid x^2+y^2<r^2\}$; б) T — замкнутый круг $T=\{M(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$; в) T — окружность $\{M(x, y) \mid x^2+y^2=r^2\}$.

Решение. а) Точка M тогда и только тогда принадлежит: 1) $\operatorname{int} T$; 2) ∂T; 3) $\operatorname{ext} T$, когда:

1) существует открытое множество, содержащее M и целиком принадлежащее T;

2) любое открытое множество U, содержащее M, удовлетворяет условиям $U \cap T \neq \varnothing$, $U \setminus T \neq \varnothing$;

3) существует открытое множество, содержащее M и не пересекающее T.

При решении задачи вместо произвольного открытого множества, содержащего точку M, достаточно рассматривать шаровую окрестность точки M.

Обозначим через ω окружность: $\omega=\{M(x, y) \mid x^2+y^2=r^2\}$, через Φ — внешнюю часть окружности: $\Phi=\{Q(x, y) \mid x^2+y^2>r^2\}$. Покажем, что $\operatorname{int} T=T$, $\partial T=\omega$, $\operatorname{ext} T=\Phi$. Пусть $M(x_0, y_0)$ — произвольная точка открытого круга T, $x_0^2+y_0^2<r^2$. Если $x_0^2+y_0^2=r_0^2$ и $0<R_0<r-r_0$, то шаровая окрестность точки M, радиуса R_0, целиком лежит в T (рис. 64). Поэтому $T \subset \operatorname{int} T$. С другой стороны, как следует из определения, $\operatorname{int} T\subset T$, $T=\operatorname{int} T$.

Пусть $P\in\omega$. Очевидно, любая окрестность точки P пересекает как открытый круг T, так и множество $E_2\setminus T$. Поэтому $\omega \subset\partial T$. Рассмотрим точку $Q(x_1, y_1)$, $Q\in\Phi$. Тогда $x_1^2+y_1^2>r^2$. Если $r_1^2=x_1^2+y_1^2$, $0<R_1<r_1-r$, то шаровая окрестность с центром в точке O и радиуса R_1 не пересекает T (см. рис. 64). Таким образом, $\Phi\subset\operatorname{ext} T$. Так как $E_2=T\cup\omega\cup\Phi$, $T=\operatorname{int} T$, $\omega\subset\partial T$, $\Phi\subset\operatorname{ext} T$, $E_2=\operatorname{int} T\cup\partial T\cup\operatorname{ext} T$, то из доказанных включений вытекает: $\operatorname{ext} T=\Phi$, $\partial T=\omega$.

471. На прямой E_1 дано множество T. Найти $\operatorname{int} T$, ∂T, $\operatorname{ext} T$, если: а) T — интервал: $T=\{M(x) \mid a<x<b\}$; б) T — отрезок: $T=\{M(x) \mid a\leqslant x\leqslant b\}$; в) T — полуинтервал: $T=\{M(x) \mid a<x\leqslant b\}$; г) T — открытый луч: $T=\{M(x) \mid a<x\}$; д) T — замкнутый луч: $T=\{M(x) \mid a\leqslant x\}$; е) T — множество точек, координаты которых рациональные числа; ж) T — множество точек, координаты которых иррациональные числа.

472. Привести примеры таких множеств T плоскости E_2, которые не совпадают со всей плоскостью E_2 и удовлетворяют условию: а) $\operatorname{int} T = \varnothing$; б) $\partial T \not\subset T$; в) $\partial T \subset T$; г) $\partial T = T$; д) $T \subset \partial T$, $T \neq \partial T$; е) $\operatorname{int} T = \varnothing$; ж) $\operatorname{ext} T = \varnothing$.

473. На плоскости E_2 задана концентрическая топология (см. задачу 451). Найти $\operatorname{int} T$, ∂T и $\operatorname{ext} T$, если: а) T — открытый круг: $T = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$; б) T — замкнутый круг: $T = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$; в) T — окружность: $T = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$; г) T — внешняя часть открытого круга: $T = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \geqslant r^2\}$; д) T — прямая: $T = \{M(x, y) \mid x = a\}$; е) T — квадрат: $T = \{M(x, y) \mid -a \leqslant x \leqslant a, \ -a \leqslant y \leqslant a\}$.

Решение. а) Как следует из условия задачи 451, множество в том и только в том случае является открытым, когда оно вместе с каждой своей точкой M содержит открытый круг с центром в начале координат, которому принадлежит M. Нам дан открытый круг $T = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$. Если $M_0(x_0, y_0) \in T$, то $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 < r^2$. Поэтому точка M_0 принадлежит $\operatorname{int} T$, так как в качестве открытого множества, содержащего M_0 и принадлежащего T, можно взять само множество T. Таким образом, $T \subset \operatorname{int} T$.

Пусть $N_1(x_1, y_1) \notin T$, $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \geqslant r^2$. Если U — произвольное открытое множество, содержащее N_1, то существует такой открытый круг Ω_R с центром в начале координат, который содержит N_1 и принадлежит U. Очевидно, $\Omega_R \cap T \neq \varnothing$, следовательно, $U \cap T \neq \varnothing$. Таким образом, любое открытое множество, содержащее N_1, пересекает T, т. е. $N_1 \in \partial T$. Отсюда $E_2 \setminus T \subset \partial T$. Так как $T \cup (E_2 \setminus T) = E_2$, то из этих включений следует: $T = \operatorname{int} T$, $E_2 \setminus T = \partial T$, $\operatorname{ext} T = \varnothing$.

474. На плоскости E_2 задана топология так, как указано в задаче 444. Найти $\operatorname{int} T$, ∂T и $\operatorname{ext} T$, если: а) T — открытая полуплоскость: $T = \{M(x, y) \mid x > a\}$; б) T — открытая полуплоскость: $T = \{M(x, y) \mid y > a\}$; в) T — прямая: $T = \{M(x, y) \mid x + y = 0\}$; г) T — окружность: $T = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$; д) T — квадрат: $T = \{M(x, y) \mid -a \leqslant x \leqslant a, \ -a \leqslant y \leqslant a\}$.

475. Множество T состоит из трех элементов: $T = \{a, b, c\}$. На T введена топология так, как указано в задаче 450. Найти $\operatorname{int}\{a, b\}$, $\partial\{a, b\}$, $\operatorname{ext}\{a, b\}$.

476. На множестве T введена дискретная топология (см. задачу 447). A — произвольное подмножество пространства T. Найти $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$.

477. На бесконечном множестве T введена топология Зарисского (см. задачу 452). A — открытое подмножество T. Найти $\operatorname{int} A$, ∂A, $\operatorname{ext} A$.

478. A — произвольное подмножество топологического пространства T. Доказать, что $\operatorname{int} A$ и $\operatorname{ext} A$ — открытые, а $\operatorname{int} A \cup \partial A$ и $\operatorname{ext} A \cup \partial A$ — замкнутые множества.

479. Пусть A и B — подмножества топологического пространства T. Доказать, что: а) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ и б) $\operatorname{ext}(A \cup B) = \operatorname{ext} A \cap \operatorname{ext} B$.

480. Привести примеры множеств плоскости E_2, не удовлетворяющих условиям: а) $\partial(A \cap B) = \partial A \cup \partial B$; б) $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \cap \partial B$; в) $\operatorname{int}(A \cup B) = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$; г) $\operatorname{ext}(A \cap B) = \operatorname{ext} A \cup \operatorname{ext} B$.

481. Найти замыкание следующих множеств плоскости E_2: а) интервала $\mathrm{I} = \{M(x, 0) | b < x < a\}$; б) окружности $\omega = \{M(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}$; в) открытого круга $\Omega = \{M(x, y) | x^2 + y^2 < r^2\}$; г) замкнутого круга $\Omega' = \{M(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$; д) объединения двух открытых полуплоскостей $\lambda_1 = \{M(x, y) | y < 0\}$, $\lambda_2 = \{M(x, y) | y > 0\}$.

Решение. а) Под замыканием $\bar{A}$ понимается множество всех точек прикосновения множества A. Точка называется точкой прикосновения множества A, если в любой ее окрестности находится элемент множества. В данном случае замыканию принадлежат концы интервала $M_1(a, 0)$ и $M_2(b, 0)$. Действительно, в любой шаровой окрестности, а следовательно, и в любой произвольной окрестности этих точек содержатся точки интервала I. Пусть точка N не принадлежит отрезку M_1M_2. Если точка N не лежит на прямой M_1M_2, то под d будем понимать расстояние от N до прямой M_1M_2. Если $N \in (M_1M_2)$, то в качестве d примем наименьшее из расстояний $|NM_1|$ или $|NM_2|$. Шаровая окрестность с центром в точке N и радиуса r, где $r < d$, не пересекает отрезок M_1M_2. Поэтому $N \notin \bar{\mathrm{I}}$. Таким образом, $\bar{\mathrm{I}} = [M_1M_2]$.

482. На плоскости E_2 топология задана так, как указано в задаче 444. Найти замыкания следующих множеств: а) квадрата $K = \{M(x, y) | -a \leqslant x \leqslant a, \ -a \leqslant y \leqslant a\}$; б) открытого круга $\Omega = \{M(x, y) | x^2 + y^2 < r^2\}$; в) прямой $l = \{M(x, y) | x + y = 0\}$; г) прямой $m = \{M(x, y) | x = 0\}$.

Решение. а) Нам необходимо найти все точки прикосновения квадрата K. В рассматриваемой топологии под окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ понимается «полоса» $O_\varepsilon = \{M(x, y) | |x - x_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Поэтому точка в том и только в том случае является точкой прикосновения квадрата, когда в любой ε-окрестности ее абсциссы на оси Ox содержится абсцисса некоторой точки квадрата. Абсциссы точек квадрата заполняют отрезок $[-a, a]$. Поэтому $\bar{K} = \{N(x, y) | -a \leqslant x \leqslant a, \ -\infty \leqslant y \leqslant \infty\}$.

483. На плоскости E_2 задана концентрическая топология (см. задачу 451). Найти замыкания следующих множеств: а) открытого круга $\Omega = \{M(x, y) | x^2 + y^2 < r^2\}$; б) замкнутого круга $\Omega' =$

$=\{M(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$; в) прямой линии $l=\{M(x, y)\,|\,x=y\}$; г) прямой линии $m=\{M(x, y)\,|\,x=r\}$.

484. Множество T состоит из трех элементов: $T=\{a, b, c\}$. На M определена топология так, как указано в задаче 450. Найти замыкания множеств $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

485. На бесконечном множестве T введена топология Зарисского (см. задачу 452). Доказать, что замыкание любого бесконечного множества совпадает со всем множеством T.

486. Доказать, что замыкание любого множества T топологического пространства совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих T.

487. Доказать, что для любых множеств A и B топологического пространства выполнены условия: а) если $A\subset B$, то $\bar{A}\subset\bar{B}$; б) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cap\bar{B}$; в) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$; г) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$.

§ 20. ПОДПРОСТРАНСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ХАУСДОРФОВЫ, КОМПАКТНЫЕ И СВЯЗНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Литература: [2], § 36, 38.

488. Пусть на плоскости E_2 даны точки A, B, C: $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$. Найти все открытые множества пространства $T=\{A, B, C\}$ в индуцированной топологии, если на плоскости:

а) дана концентрическая топология (см. задачу 451);

б) дана топология метрического пространства;

в) топология задана так, как указано в задаче 444.

Решение. а) Если T' — подмножество топологического пространства T, то множество M, принадлежащее T', считается открытым в индуцированной на T' топологии, если $M=T'\cap N$, где N — открытое множество топологического пространства T. В концентрической топологии множество N точек плоскости E_2 тогда и только тогда является открытым, когда любая его точка принадлежит N вместе с некоторым открытым кругом с центром в начале координат, содержащим эту точку. Точки B и C находятся на расстоянии, равном единице, от начала координат, т. е. от точки A. Поэтому если какое-либо открытое множество содержит точку B, то оно содержит также точки A и C. Открытый же круг с центром в начале координат и радиусом, меньшим единицы, содержит точку A, но не содержит точки B и C. Поэтому открытыми множествами пространства $T=\{A, B, C\}$ являются $M_1=\{A\}$, $M_2=T$, $M_3=\varnothing$.

489. На плоскости E_2 дано множество T точек с целочисленными координатами. Доказать, что топология, индуцированная на T, является дискретной.

490. На бесконечном множестве T определена топология Зарисского (см. задачу 452). Доказать, что топология, индуцированная на его бесконечных подмножествах, также является топологией Зарисского, а топология, индуцированная на конечном множестве,— дискретной.

491. Доказать, что топологическое пространство, определенное в задаче 444, не является хаусдорфовым.

Решение. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если его любые две различные точки принадлежат непересекающимся окрестностям, т. е. открытым множествам, содержащим эти точки. В рассматриваемой топологии множество тогда и только тогда является открытым, когда оно вместе с любой своей точкой $M_0(x_0, y_0)$ содержит «полосу» $O_\varepsilon(M_0) = \{M(x, y) \mid |x - x_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. Для решения задачи достаточно найти две различные точки, для которых любая «полоса», содержащая первую точку, содержит и вторую. Рассмотрим точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_0, y_1)$, где $y_0 \neq y_1$. Точки M_0 и M_1 разные, но имеют одинаковые абсциссы. Поэтому «полоса», содержащая точку M_0, содержит и точку M_1.

492. Доказать, что топология любого метрического пространства является хаусдорфовой.

493. Доказать, что концентрическая топология плоскости E_2 (см. задачу 451), не является хаусдорфовой.

494. Выяснить, является ли хаусдорфовым бесконечное множество, в котором определена топология Зарисского.

495. Доказать, что конечное множество в том и только в том случае является хаусдорфовым, когда топология в нем дискретная.

496. Точка a топологического пространства называется пределом бесконечной последовательности точек этого пространства, если в любой окрестности точки a содержатся все члены этой последовательности, за исключением конечного числа. Доказать утверждение: если последовательность точек хаусдорфова пространства имеет предел, то он единствен.

497. Доказать, что из покрытия прямой интервалами U_n, где $U_n =]n-2, n+2[$, n — целое число, нельзя выделить конечного подпокрытия.

498. Привести пример покрытия интервала (a, b), из которого нельзя выделить конечного подпокрытия.

499. Выяснить, являются ли компактными: а) замкнутый круг плоскости E_2 $\Omega' = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$; б) открытый круг плоскости E_2 $\Omega = \{M(x, y) \mid x^2 + y^2 < r^2\}$; в) множество точек плоскости, принадлежащих прямой $m = \{M(x, y) \mid x + y - 2 = 0\}$; г) множество всех иррациональных чисел отрезка $[a, b]$ числовой прямой; д) множество всех рациональных чисел отрезка $[a, b]$ числовой прямой; е) множество всех точек плоскости с целочисленными координатами, принадлежащих кругу $x^2 + y^2 < r^2$; ж) множество всех точек плоскости с рациональными координатами, принадлежащих прямоугольнику $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

Решение. г) Числовая прямая является метрическим пространством. Множество точек метрического пространства в том и только в том случае компактно, когда оно ограничено и замкнуто. Множество иррациональных чисел отрезка $[a, b]$ ограничено, но не замкнуто. Действительно, возьмем рациональное число отрезка $[a, b]$. В любой его окрестности содержится иррациональное число. Поэтому рациональные числа отрезка $[a, b]$ являются точками прикосновения множества иррациональных чисел этого отрезка. Множество иррациональных чисел не является замкнутым, так как не содержит все свои точки прикосновения, следовательно, оно не компактно.

500. На бесконечном множестве T дана топология Зарисского. Доказать, что T — компактное топологическое пространство.

Решение. Пусть система открытых множеств U_α образует покрытие пространства T:

$$T = \bigcup_{\alpha} U_\alpha. \tag{1}$$

Покажем, что из этого покрытия можно выбрать такую подсистему, состоящую из конечного числа подмножеств U_{α_1}, U_{α_2}, ..., U_{α_n}, что

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}. \tag{2}$$

Возьмем произвольное открытое множество U_{α_1}, принадлежащее покрытию. Тогда $T \setminus U_{\alpha_1}$ — конечное множество:

$$T \setminus U_{\alpha_1} = \bigcup_{i=2}^{n} M_i, \tag{3}$$

где M_i — точки T. Обозначим через U_{α_i} одно из множеств системы $\{U_\alpha\}$, которое содержит точку M_i. Такое множество в силу (1) всегда существует. Таким образом, $\bigcup\limits_{i=2}^{n} M_i \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Отсюда из (3) следует (2).

501. На плоскости E_2 топология задана так, как указано в задаче 444. Доказать, что множество T: $T = \{M(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — является компактным.

502. Доказать, что конечное объединение компактных множеств топологического пространства является компактным множеством. Привести пример бесконечной системы компактных множеств некоторого топологического пространства, объединение которых не является компактным.

503. Доказать, что множество T, состоящее из двух точек, топология которого определена в задаче 448, является связным.

Решение. Топологическое пространство T называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся нетривиальных открытых подмножеств, т. е. подмножеств, отличных от пустого множества и всего пространства. В данном топологическом пространстве открытыми множествами являются $\varnothing$, $T=\{a, b\}$ и $\{a\}$. Так как нетривиальное открытое подмножество единственно, оно равно $\{a\}$, то T нельзя представить как объединение двух непересекающихся открытых множеств. Следовательно, T связно.

504. Будет ли топологическое пространство T, состоящее из элементов a, b и c, связным, если его топология определена так, как указано: а) в задаче 449; б) в задаче 450.

505. Доказать, что подпространство рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ не является связным топологическим пространством.

506. На плоскости E_2 дана гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Доказать, что она не является связным топологическим пространством.

507. В топологическом пространстве T дано множество Φ, которое одновременно является открытым и замкнутым. Доказать, что если C — связное подпространство в T и $C\cap\Phi\neq\varnothing$, то $C\subset\Phi$.

508. Даны связные подпространства T_α топологического пространства T, пересечение которых не пусто. Доказать, что $\bigcup\limits_\alpha T_\alpha$ — связное подпространство.

509. Доказать, что замыкание связного подпространства связно. Верно ли обратное утверждение?

510. Доказать, что отрезок прямой E_1 — связное подпространство.

Решение. Пусть отрезок $[a, b]$ не является связным множеством. Это означает, что существуют два непустых множества O_1 и O_2, открытые в топологии, индуцированной на отрезке $[a, b]$ топологией прямой E_1, такие, что $[a, b]=O_1\cup O_2$, $O_1\cap O_2=\varnothing$. Пусть $a\in O_1$. Шаровая окрестность точки a в индуцированной на $[a, b]$ топологии имеет вид $O_\varepsilon(a)=[a, a+\varepsilon[$. Рассмотрим множество M чисел вида $a+\varepsilon$, таких, что $[a, a+\varepsilon[\subset O_1$. O_1 — открытое множество, $a\in O_1$, поэтому a входит в O_1 вместе с некоторой своей шаровой окрестностью. Отсюда следует, что M непустое. Множество M ограничено сверху точками y, где $y>b$. Поэтому существует точная верхняя грань c множества M. Покажем, что $c\in O_1$. Пусть $c\in O_2$. В силу того, что O_2 — открытое множество, существует μ-окрестность $]c-\mu, c+\mu[$ точки c, принадлежащая O_2. Поэтому на промежутке $]c-\mu, c[$ нет точек множества M, т. е. существует число $c-\mu$, меньшее c, ограничивающее M сверху. Мы получили противоречие с утверждением $c=\sup M$. Таким образом, $c\in O_1$. Но O_1 — открытое множество, поэтому существует δ-окрестность точки $]c-\delta, c+\delta[$, которая целиком принадлежит O_1. Так как $c=\sup M$, то на промежутке $]c-\delta, c[$ существует точка p множества M: $[a, p[\subset O_1$. Отсюда следует $[a, c+\delta[\subset O_1$, т. е. $c+\delta \in M$. Поэтому точка c не является верхней гранью множества M. Мы получили противоречие, которое показывает, что предположение о несвязности отрезка $[a, b]$ ложно.

511. Доказать, что следующие подпространства прямой E_1 являются связными: а) интервал $]a, b[$; б) полуинтервал $[a, b[$; в) луч $]a, \infty[$.

Решение. а) Возьмем произвольную точку c интервала $]a, b[$. Пусть $x \in]a, b[$. Обозначим через T_x отрезок $[c, x]$ или $[x, c]$. Ясно, что $]a, b[= \bigcup_{x \in]a, b[} T_x$, $\bigcap_{x \in]a, b[} T_x = c \neq \varnothing$. Каждый отрезок T_x согласно задаче 510 является связным множеством. Поэтому из задачи 508 следует, что интервал $]a, b[$ — связное подпространство.

512. Доказать, что выпуклое множество плоскости E_2 является связным подпространством. Справедливо ли обратное утверждение?

513. Доказать, что подпространство прямой E_1 тогда и только тогда является связным, когда оно выпукло.

514. На плоскости E_2 топология задана так, как указано в задаче 444. Пусть P — объединение двух полуплоскостей $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 = \{M(x, y) \mid y \geqslant 2\}$, $P_2 = \{M(x, y) \mid y \leqslant -2\}$. Доказать, что P — связное подпространство.

515. На плоскости E_2 задана концентрическая топология (см. задачу 451). Даны два луча $l_1 = \{M(x, y) \mid x=0, y \geqslant 2\}$ и $l_2 = \{M(x, y) \mid y=0, x \geqslant 2\}$. Будет ли подпространство $L = l_1 \cup l_2$ связным?

516. Привести пример такой топологии плоскости E_2, в которой окружность не является связным подпространством.

§ 21. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ. ГОМЕОМОРФИЗМЫ

Литература: [2], § 37.

517. На плоскости E_2 задана концентрическая топология (см. задачу 451). Выяснить, является ли непрерывным отображением: а) поворот вокруг начала координат на угол φ; б) гомотетия с центром в начале координат; в) осевая симметрия с осью, проходящей через центр; г) параллельный перенос на ненулевой вектор.

Решение. а) Нам необходимо выяснить, является ли при указанном вращении прообраз открытого множества также открытым. Как следует из задачи 451, в концентрической топологии множество в том и только в том случае является открытым, когда оно вместе с каждой своей точкой содержит открытый круг с центром в начале координат, которому принадлежит эта точка. При вращении вокруг начала координат открытые круги преобразуются сами в себя. Поэтому прообраз открытого множества преобразуется сам в себя, т. е. является открытым.

518. На плоскости E_2 топология задана так, как указано в задаче 444. Выяснить, является ли непрерывным отображением: а) параллельный перенос на произвольный вектор; б) осевая симметрия с осью Ox; в) осевая симметрия относительно прямой $y=x$; г) гомотетия с центром в начале координат; д) поворот вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$.

519. Дано топологическое пространство T, состоящее из двух точек: $T=\{a, b\}$. Топология на T определена так, как указано в задаче 448. Выяснить, является ли непрерывным отображение $\varphi: T \to T$, если $\varphi(a)=b$, $\varphi(b)=a$.

520. Даны два топологических пространства $T_1=\{a, b, c\}$ и $T_2=\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$. Топология на T_1 определена так, как указано в задаче 449, а на T_2 — так, как указано в задаче 448. Отображение φ: $T_1 \to T_2$ имеет вид $\varphi(a)=\tilde{a}$, $\varphi(b)=\tilde{b}$, $\varphi(c)=\tilde{b}$. Доказать, что φ — непрерывное отображение.

521. Даны два топологических пространства $T_1=\{a, b, c\}$ и $T_2=\{\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\}$. Топология на T_1 задана так, как указано в задаче 449, а на T_2 — так, как указано в задаче 450. Будет ли отображение $\varphi: T_1 \to T_2$ непрерывным, если: а) $\varphi(a)=\tilde{a}$, $\varphi(b)=\tilde{b}$, $\varphi(c)=\tilde{c}$; б) $\varphi(a)=\tilde{a}$, $\varphi(b)=\tilde{b}$, $\varphi(c)=\tilde{b}$.

522. Доказать, что параллельное проектирование одного подпространства плоскости E_2 на другое является непрерывным отображением.

523. Пусть φ: $E_2 \to E_1$ — отображение евклидовой плоскости в евклидову прямую, определенное с помощью функции $z=\varphi(x, y)$. Доказать, что φ является непрерывным отображением топологического пространства E_2 в топологическое пространство E_1 тогда и только тогда, когда функция $\varphi(x, y)$ непрерывная.

Решение. **Необходимость.** Дано, что при отображении φ прообраз любого открытого множества прямой E_1 является открытым множеством. Требуется доказать, что для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если координаты произвольной точки $M(x, y)$ удовлетворяют неравенствам

$$|x-x_0| < \delta, \quad |y-y_0| < \delta, \tag{1}$$

то

$$|\varphi(x, y)-\varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Зафиксируем произвольное положительное ε. Рассмотрим ε — окрестность $O_\varepsilon(z_0)=\{z \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$ точки $z_0=\varphi(M_0)$. Так как она является открытым множеством прямой E_1, то ее прообраз $U = \varphi^{-1}(O_\varepsilon(z_0))$ представляет собой открытое множество плоскости E_2. $M_0 \in U$, поэтому существует μ-окрестность $O_\mu(M_0) = \{M(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \mu\}$ точки M_0, такая, что $O_\mu(M_0) \subset U$. Рассмотрим открытый квадрат K с центром в точке M_0, сторона которого имеет длину $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}\mu$: $K = \{M(x, y) \mid |x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta\}$. Ясно, что $K \subset O_\mu(M_0)$, следовательно, $K \subset U$. Таким образом, любому $\varepsilon > 0$ поставлено в соответствие положительное $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}\mu$. Если координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют неравенствам (1), то $M \in K$, следовательно, $M \in U$ и $\varphi(M) \in O_\varepsilon(\varphi(M_0))$. Отсюда расстояние между точками $\varphi(x, y)$ и $\varphi(x_0, y_0)$ прямой E_1 меньше ε, т. е. выполнено (2). Функция $\varphi(x, y)$ непрерывная.

Достаточность. Покажем обратное, т. е. докажем, что из непрерывности функции $z = \varphi(x, y)$ следует непрерывность отображения φ. Рассмотрим произвольное открытое множество V прямой E_1. Требуется доказать, что его полный прообраз $U = \varphi^{-1}(V)$ также является открытым множеством плоскости E_2. Пусть точка $z_0 = \varphi(M_0) \in V$. Так как V — открытое множество, то существует ε-окрестность $O_\varepsilon(z_0) = \{z \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$ точки z_0, такая что $O_\varepsilon(z_0) \subset V$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит U. Покажем, что M_0 принадлежит U вместе с некоторой своей шаровой окрестностью. Функция $z = \varphi(x, y)$ непрерывная. Поэтому для указанного ε существует $\delta > 0$, такое, что для точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам (1), выполнено неравенство (2). Рассмотрим δ-окрестность $O_\delta(M_0)$ точки M_0: $O_\delta(M_0) = \{M(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$. Очевидно, координаты любой ее точки удовлетворяют (1). Поэтому для точек $z = \varphi(M)$, $M \in O_\delta(M_0)$, выполнено (2), т. е. $z \in O_\varepsilon(z_0)$. Отсюда следует, что $O_\delta(M_0) \subset U$. Любая точка входит в U вместе с некоторой своей шаровой окрестностью. Поэтому U — открытое множество. Утверждение доказано.

524. Пусть $\varphi: E_1 \to E_1$ — отображение евклидовой прямой в себя, заданное с помощью функции $y = \varphi(x)$. Доказать, что отображение φ топологического пространства E_1 в себя тогда и только тогда является непрерывным, когда $\varphi(x)$ — непрерывная функция.

525. Пусть $\varphi: E_2 \to E_2$ — отображение евклидовой плоскости в себя, заданное с помощью функций $x' = \varphi_1(x, y)$, $y' = \varphi_2(x, y)$, $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$. Доказать, что отображение φ топологического пространства E_2 в себя тогда и только тогда является непрерывным, когда $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — непрерывные функции.

526. Пусть $\varphi: E_1 \to E_3$ — отображение евклидовой прямой в трехмерное евклидово пространство, заданное с помощью функций

$x'=x(t)$, $y'=y(t)$, $z'=z(t)$, $\varphi(t)=(x(t), y(t), z(t))$. Доказать, что φ тогда и только тогда является непрерывным отображением топологического пространства E_1 в топологическое пространство E_3, когда $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные функции. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для отображения $\varphi: E_1 \to E_2$.

527. Пусть $\varphi: E_2 \to E_3$ — отображение евклидовой плоскости в евклидово трехмерное пространство, заданное с помощью функций $x'=x(u, v)$, $y'=y(u, v)$, $z'=z(u, v)$, $\varphi(u, v)=(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Доказать, что φ тогда и только тогда является непрерывным отображением топологического пространства E_2 в топологическое пространство E_3, когда $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — непрерывные функции.

528. Будет ли движение плоскости E_2 непрерывным отображением плоскости на себя?

529. Будет ли подобие плоскости E_2 непрерывным отображением плоскости на себя?

530. Будет ли аффинное преобразование точек плоскости E_2 непрерывным отображением плоскости на себя?

531. Дано отображение $\varphi: E_2 \to E_2$, определенное функциями $x'=ye^x$, $y'=y^2e^x$. Доказать, что оно непрерывное. Будет ли образ прямой $y=1$ замкнутым множеством при этом отображении?

532. Доказать, что отображение одного топологического пространства в другое тогда и только тогда непрерывно, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

533. Доказать, что отображение $f: T_1 \to T_2$ тогда и только тогда является непрерывным, когда $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ для любого множества A из T_1.

534. Доказать, что при непрерывном отображении образ связного множества является связным.

535. Доказать, что при непрерывном отображении образ компактного множества является компактным.

536. Привести пример такого непрерывного отображения одного топологического пространства в другое, при котором: а) образ открытого множества является замкнутым; б) прообраз связного множества не является связным; в) прообраз компактного множества не является компактным.

537. Пусть f — непрерывная функция на топологическом пространстве T, т. е. непрерывное отображение $f: T \to R_1$. Под нулем функции f понимается такая точка X пространства T, для которой $f(X)=0$. Доказать, что множество нулей замкнуто.

538. Доказать, что пространство T тогда и только тогда несвязно, когда существует непрерывная функция $f: T \to E_1$, принимающая ровно два значения.

539. Доказать, что отображение $\varphi: T_1 \to T_2$ двух подпространств прямой E_1 является гомеоморфизмом:

а) $T_1=[0, 1]$, $T_2=[3, 5]$, $\varphi(x)=2x+3$;

б) $T_1=]-\infty, \infty[$, $T_2=]0, +\infty[$, $\varphi(x)=e^x$;

в) $T_1=]0, +\infty[$, $T_2=]-\infty, \infty[$, $\varphi(x)=\ln x$;

г) $T_1=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $T_2=]-\infty, \infty[$, $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$;

д) $T_1=]-\infty, \infty[$, $T_2=]0, \pi[$, $\varphi(x)=\operatorname{arcctg} x$.

Решение. а) Отображение φ топологического пространства T_1 на топологическое пространство T_2 называется гомеоморфизмом, если оно является непрерывным и имеет обратное отображение, которое также является непрерывным. Данное отображение φ, определяемое функцией $\varphi(x)=2x+3$, непрерывно, так как функция $\varphi(x)$ непрерывна (см. задачу 524). Легко видеть, что обратное отображение $\varphi^{-1}:[3, 5]\to[0, 1]$ определено функцией $\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$. Так как функция $\varphi^{-1}(x)$ непрерывна, то отображение φ^{-1} также непрерывно. Поэтому φ является гомеоморфизмом указанных топологических пространств.

540. Определить функцию $y=\varphi(x)$, которая устанавливает гомеоморфизм между подпространствами T_1 и T_2 прямой E_1:

а) $T_1=[a, b]$, $T_2=[c, d]$;

б) $T_1=]-\infty, \infty[$, $T_2=]a, b[$;

в) $T_1=]-\infty, \infty[$, $T_2=]a, \infty[$;

г) $T_1=]-\infty, \infty[$, $T_2=]-\infty, a[$;

д) $T_1=]a, b[$, $T_2=]c, \infty[$.

Решение. б) Искомая функция должна удовлетворять следующим условиям: 1) отображать подпространство T_1 на подпространство T_2; 2) являться непрерывной на T_1; 3) иметь обратную функцию, которая непрерывна на T_2. Учитывая предыдущую задачу (см. 539, *д*), будем искать функцию $y=\varphi(x)$ в виде

$y=p\operatorname{arcctg} x+q$. Так как $\lim\limits_{x\to-\infty} y=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=b$, то $p\pi+q=a$, $q=b$.

Отсюда $y=\frac{a-b}{\pi}\operatorname{arcctg} x+b$. Найденная функция непрерывна на всей прямой E_1. Она имеет обратную: $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-b)}{a-b}$, которая на интервале $]a, b[$ непрерывна. Поэтому функция $\varphi(x)=\frac{a-b}{\pi}\operatorname{arcctg} x+b$ искомая.

541. Доказать, что движение плоскости является гомеоморфизмом плоскости на себя.

Решение. Движение плоскости — непрерывное отображение плоскости на себя (см. задачу 528). Обратное преобразование также является движением, поэтому оно также непрерывно. Отсюда следует, что движение представляет собой гомеоморфизм плоскости E_2 на себя.

542. Доказать, что подобие точек плоскости E_2 является гомеоморфизмом плоскости на себя.

543. Доказать, что аффинное преобразование точек плоскости E_2 является гомеоморфизмом плоскости на себя.

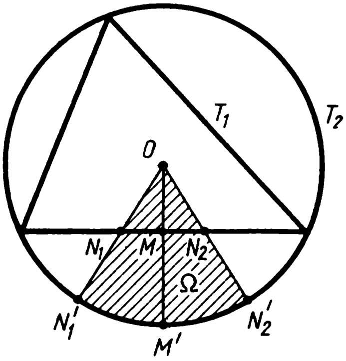


Рис. 65

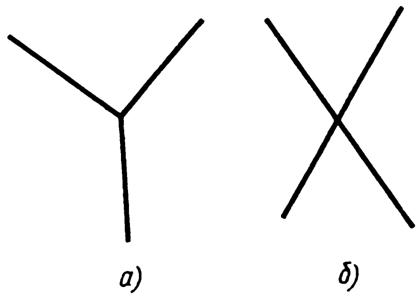


Рис. 66

544. Доказать, что подпространства T_1 и T_2 плоскости E_2 гомеоморфны между собой: а) T_1 и T_2 — две окружности; б) T_1 и T_2 — два открытых круга; в) T_1 и T_2 — два треугольника; г) T_1 — замкнутая ломаная, состоящая из трех звеньев, T_2 — окружность; д) T_1 — парабола, T_2 — прямая линия; е) T_1 — гипербола, T_2 — пара непересекающихся интервалов.

Р е ш е н и е. г) Установим взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение ломаной T_1 на окружность T_2. Учитывая задачи 544, *а* и 544, *в*, без ограничения общности можно считать, что окружность T_2 описана вокруг ломаной T_1, причем ее центр находится внутри ломаной (рис. 65). Каждой точке M ломаной поставим в соответствие точку $M' = \varphi(M)$ — центральную проекцию точки M из центра O на окружность. Это отображение является взаимно однозначным. Покажем, что отображения φ и φ^{-1} непрерывные. Пусть U' — открытое множество окружности T_2 в топологии, индуцированной на T_2 топологией плоскости E_2. Это означает, что каждая точка M' входит в U' вместе со своей шаровой окрестностью, которая в свою очередь является открытой дугой окружности T_2, середина которой совпадает с точкой M'. Нам необходимо показать, что прообраз $U = \varphi^{-1}(U')$ множества U' является открытым множеством ломаной T_1. Для этого достаточно доказать, что прообраз шаровой окрестности точки M' является открытым множеством в T_1, т. е. пересечением T_1 и открытого множества плоскости E_2.

Рассмотрим, например, открытую дугу $\overset{\smile}{N_1'N_2'}$. Пусть ψ — внутренняя область угла $N_1'ON_2'$. Она состоит из внутренних точек угла и является открытым множеством плоскости E_2 (докажите это утверждение самостоятельно). Прообраз $\varphi^{-1}(\overset{\smile}{N_1'N_2'})$ совпадает с пересечением $T \cap \psi$. Поэтому $\varphi^{-1}(\overset{\smile}{N_1'N_2'})$ открыт в T_1. Таким образом, φ — непрерывное отображение. Аналогично доказывается, что φ^{-1} — непрерывное отображение.

545. Доказать, что отображение открытого круга радиуса r с центром в начале координат на плоскость E_2, определяемое формулами $x'=\frac{x}{r-\sqrt{x^2+y^2}}$, $y=\frac{y}{r-\sqrt{x^2+y^2}}$, является гомеоморфизмом.

546. Непрерывное отображение φ, определяемое формулами $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, взаимно однозначно отображает полуинтервал $[0, 2\pi[$ на окружность $x^2+y^2=r^2$. Доказать, что это отображение не является гомеоморфизмом.

547. В пространстве E_3 дана сфера $S: x^2+y^2+(z-r)^2=r^2$. Она центрально проецируется из точки $A=(0, 0, 2r)$ на касательную плоскость Oxy. Найти формулы такой проекции (она называется стереографической). Доказать, что эта проекция устанавливает гомеоморфизм между сферой S, из которой удалена точка A, и плоскостью.

548. Даны топологические пространства T_1 и T_2, f — гомеоморфизм между ними. $Y_1 \subset T_1$, $Y_2 \subset T_2$, $f\, Y_1=Y_2$. Доказать, что:
а) $\operatorname{int} Y_2=f(\operatorname{int} Y_1)$; б) $\operatorname{ext} Y_2=f(\operatorname{ext} Y_1)$;
в) $\partial Y_2=f(\partial Y_1)$; г) $\bar{Y}_2=f\,\bar{Y}_1$.

549. Пусть T — топологическое пространство, M — его точка. Обозначим через $i(M)$ число непересекающихся открытых связных множеств, объединение которых совпадает с $T\setminus M$ (число связных компонент пространства $T\setminus M$). Доказать, что число $i(M)$ не меняется при гомеоморфизме.

550. Доказать, что отрезок, интервал, полуинтервал, окружность, тренога (рис. 66, *а*), крест (рис. 66, *б*) попарно не гомеоморфны между собой как подпространства плоскости E_2.

551. Доказать, что эллипс, гипербола и парабола попарно не гомеоморфны между собой.

552. Найти все поверхности второго порядка пространства E_3, которые гомеоморфны: а) сфере S_2; б) плоскости; в) эллиптическому цилиндру; г) паре параллельных плоскостей.

§ 22. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Литература: [2], § 40—43.

553. Дан тетраэдр $ABCD$. Доказать, что его грани — треугольники ABC, ABD, ACD и BCD — представляют собой клеточное разбиение боковой поверхности тетраэдра.

Решение. Под клеткой понимается любое многообразие с краем, гомеоморфное выпуклому многоугольнику. Образы вершин и ребер многоугольника при этом гомеоморфизме называются соответственно вершинами и сторонами клетки. Говорят, что дано клеточное разбиение двумерного многообразия F, если его можно представить как объединение конечного числа клеток F_1, ..., F_n,

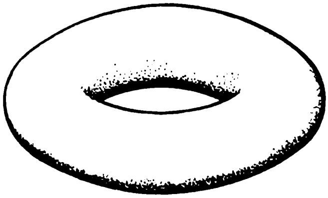


Рис. 67

Рис. 68

таких, что пересечение любых двух клеток либо пусто, либо совпадает с вершиной, либо совпадает со стороной этих клеток.

Грани тетраэдра представляют собой треугольники, т. е. выпуклые многоугольники. Треугольники ABC, ABD, ACD и BCD пересекаются по общим ребрам. Поэтому они служат клеточным разбиением боковой поверхности тетраэдра.

554. Вокруг куба описана сфера. Боковая поверхность куба проецируется из его центра на сферу. Доказать, что образы граней можно рассматривать как клеточное разбиение сферы.

555. На сфере S дана окружность ω. Доказать, что два сферических сегмента F_1 и F_2, пересекающиеся по ω, образуют клеточное разбиение сферы S.

556. Найти клеточное разбиение тора (сферы с одной ручкой) (рис. 67).

557. Найти клеточное разбиение кренделя (сферы с двумя ручками) (рис. 68).

558. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 69, *а*). Отождествим те точки отрезков AB и CD, которые центрально-симметричны относительно центра прямоугольника. Полученное топологическое многообразие называется листом Мебиуса (рис. 69, *б*). Построить его клеточное разбиение.

Р е ш е н и е. Пусть P и Q — точки, лежащие на сторонах BC и AD прямоугольника. Разрежем лист Мебиуса по отрезку PQ. Получим двумерное многообразие, гомеоморфное прямоугольнику. Действительно, как видно из рисунка 69, *а*, отрезки AB и DC отождествляются, точка A — с точкой C, точка B — с точкой D. На рисунке 69, *а*, *б* отмечена одна и та же точка M. Поэтому по-

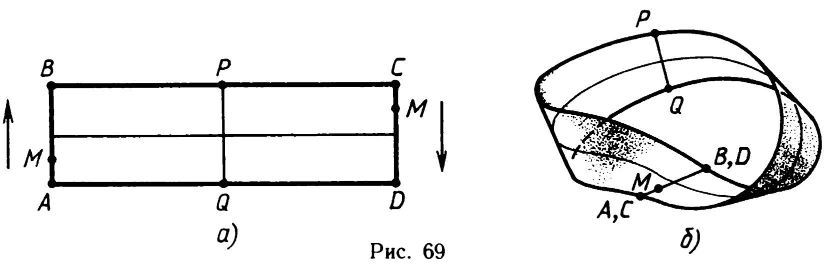


Рис. 69

лученный прямоугольник представляет собой клеточное разбиение листа Мебиуса.

559. Дан прямоугольник $ABCD$. Отождествим те точки сторон AB и CD, которые центрально-симметричны относительно центра прямоугольника. Отождествим те точки сторон AD и BC, для которых отрезки, их соединяющие, параллельны стороне AB. Полученное топологическое многообразие называется бутылкой Клейна. Построить его клеточное разбиение.

560. Дана сфера. Отождествим точки сферы, которые центрально-симметричны относительно центра. Полученное топологическое многообразие представляет собой модель проективной плоскости. Прямая в этой модели совпадает с множеством пар отождествленных точек, принадлежащих окружности большого круга. Доказать, что различные прямые l_1, l_2 и l_3 разбивают это многообразие на клетки.

561. Найти эйлерову характеристику топологического многообразия M, если M представляет собой: а) сферу; б) тор; в) крендель (сферу с двумя ручками); г) лист Мебиуса; д) бутылку Клейна; е) проективную плоскость.

Решение. а) Под эйлеровой характеристикой $\chi(M)$ двумерного многообразия M понимается число $\chi(M)=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$, где α_0, α_1 и α_2 соответственно число клеток, ребер и вершин какого-либо клеточного разбиения многообразия M. Известно, что это число не зависит от выбора клеточного разбиения. Для клеточного разбиения сферы, построенного в задаче 554, $\alpha_0=6$, $\alpha_1=12$, $\alpha_2=8$. Отсюда $f(M)=2$.

562. Доказать, что не существует многогранника, гомеоморфного сфере, все грани которого шестиугольники.

563. Выяснить, является ли двумерное топологическое многообразие M ориентируемым, если M представляет собой: а) сферу; б) тор; в) лист Мебиуса; г) бутылку Клейна; д) проективную плоскость.

Решение. д) Под ориентацией клетки понимается порядок обхода ее вершин. Ориентации двух клеток, имеющих общую сторону, называются одинаковыми, если при обходе вершин клеток в соответствии с их ориентациями общая сторона проходится в противоположных направлениях. Многообразие называется ориентируемым, если клетки любого его клеточного разбиения можно ориентировать одинаково. Известно, что если это свойство выполняется хотя бы для одного клеточного разбиения многообразия, то оно будет справедливо и для любого другого разбиения. Таким образом, для того чтобы проверить, является ли многообразие ориентированным, достаточно построить клеточное разбиение и ориентировать одну из клеток. Затем проверить, можно ли подобрать одинаковые ориентации для других клеток.

Рассмотрим модель проективной плоскости — сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками. Возьмем произвольный трехвершинник A, B, C, т. е. три точки, не принадлежащие одной прямой, и три прямые, их соединяющие. На рассматриваемой модели прямые изображаются окружностями больших кругов с отождествленными диаметрально противоположными точками. Три окружности большого круга разбивают сферу на восемь сферических треугольников: ABC, BCA', $CB'A'$, ACB', ABC', $AC'B'$, $A'B'C'$, $A'C'B$ (рис. 70). При отождествлении диаметрально противоположных точек склеиваются точки A и A', B и B', C и C'. Поэтому триангуляция проективной плоскости состоит из четырех треугольников: 1) ABC или $A'B'C'$; 2) $A'BC$ или $AC'B'$; 3) $A'B'C$ или ABC'; 4) $AB'C$ или $A'BC'$. Без ограничения общности можно выбрать ориентацию $A \to B \to C$ треугольника *1*. На рисунке 70 она изображена стрелкой. Ориентация отождествленного сферического треугольника имеет вид $A' \to B' \to C'$. Треугольники *1* и *2* имеют общую сторону BC. Поэтому одинаковая ориентация треугольника *2* определяется порядком $C \to B \to A'$ (она также изображена стрелкой), или в силу отождествления $C' \to B' \to A$. Треугольник *2* граничит с треугольником *3* по стороне $A'C$. Для того чтобы их ориентации были одинаковыми, порядок следования вершин треугольника *3* должен иметь вид $C \to A' \to B'$. Но с другой стороны, треугольники *1* и *3* граничат по стороне $A'B'$. Их ориентации одинаковы, если треугольник *3* имеет ориентацию $C \to B' \to A$, т. е. противоположную ориентации $C \to A' \to B'$. Полученное противоречие показывает, что для клеток построенного клеточного разбиения нельзя выбрать одинаковой ориентации. Следовательно, проективная плоскость — неориентируемое двумерное многообразие.

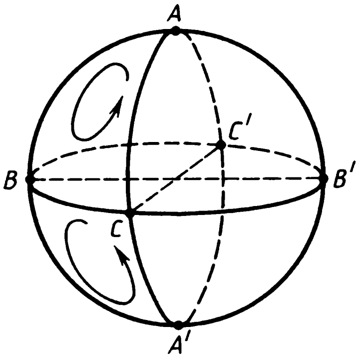


Рис. 70

Глава IV.
ЛИНИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 23. СВОЙСТВА ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Литература: [2], § 48.

564. Найти сумму, скалярное и векторное произведения вектор-функций $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(t)$:

а) $\vec{f}(t)=(\ln\sqrt{t},\ -\cos t,\ \sin t)$, $\vec{g}(t)=(2,\ \sin t,\ \cos t)$;

б) $\vec{f}(t)=(1,\ t^3,\ t)$, $\vec{g}(t)=(-t,\ 1,\ -t^2)$;

в) $\vec{f}(t)=(t\cos t,\ t\sin t,\ t)$, $\vec{g}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ -1)$;

г) $\vec{f}(t)=(\sin 2t,\ e^t,\ t^2-1)$, $\vec{g}(t)=((\sin t)^{-1},\ e^{-t},\ (t+1)^{-1})$;

д) $\vec{f}(t)=e^{\sqrt{t}}\vec{a}+e^{-\sqrt{t}}\vec{b}$, $\vec{g}(t)=e^{-\sqrt{t}}\vec{a}+e^{\sqrt{t}}\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы пространства E_3;

е) $\vec{f}(t)=\operatorname{tg} t\vec{a}+\operatorname{ctg} t\vec{b}$, $\vec{g}(t)=\operatorname{ctg} t\vec{a}+\operatorname{tg} t\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы пространства E_3.

Решение. а) Координаты суммы, скалярное произведение и координаты векторного произведения двух вектор-функций $\vec{f}(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ и $\vec{g}(t)=(y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t))$ имеют вид:

$\vec{f}(t)+\vec{g}(t)=(x_1(t)+y_1(t),\ x_2(t)+y_2(t),\ x_3(t)+y_3(t))$,

$\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)=x_1(t)\cdot y_1(t)+x_2(t)\cdot y_2(t)+x_3(t)\cdot y_3(t)$.

$$[\vec{f}(t)\,\vec{g}(t)]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1(t) & x_2(t) & x_3(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}=(x_2(t)\,y_3(t)-x_3(t)\,y_2(t),$$

$$x_3(t)\,y_1(t)-x_1(t)\,y_3(t),\ x_1(t)\,y_2(t)-x_2(t)\,y_1(t)).$$

Отсюда $\vec{f}(t)+\vec{g}(t)=(\ln\sqrt{t}+2,\ \sin t-\cos t,\ \sin t+\cos t)$,

$$\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)=\ln t,\ [\vec{f}(t)\,\vec{g}(t)]=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \ln\sqrt{t} & -\cos t & \sin t\\ 2 & \sin t & \cos t\end{vmatrix}=(-1,\ 2\sin t-\cos t\ln\sqrt{t},\ \sin t\ln\sqrt{t}+2\cos t).$$

д) Для любых функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы соотношения:

$(\alpha(t)+\beta(t))\vec{a}=\alpha(t)\vec{a}+\beta(t)\vec{a}$,

$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$, $(\alpha(t)\vec{a})\vec{b}=\alpha(t)(\vec{a}\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$,

$[\vec{a}\vec{a}]=\vec{0}$, $[\vec{a}\vec{b}]=-[\vec{b}\vec{a}]$, $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}]=[\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}]$.

Используя указанные свойства линейных операций над векторами, скалярного и векторного произведения векторов, получим:

$\vec{f}(t)+\vec{g}(t)=e^{\sqrt{t}}\vec{a}+e^{-\sqrt{t}}\vec{b}+e^{-\sqrt{t}}\vec{a}+e^{\sqrt{t}}\vec{b}=(e^{\sqrt{t}}+e^{-\sqrt{t}})(\vec{a}+\vec{b})$,

$\vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t)=\vec{a}^2+e^{2\sqrt{t}}\vec{a}\vec{b}+e^{-2\sqrt{t}}\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+(e^{2\sqrt{t}}+e^{-2\sqrt{t}})\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$,

$[\vec{f}(t)\vec{g}(t)]=[\vec{a}\vec{a}]+e^{2\sqrt{t}}[\vec{a}\vec{b}]+e^{-2\sqrt{t}}[\vec{b}\vec{a}]+[\vec{b}\vec{b}]=(e^{2\sqrt{t}}-e^{-2\sqrt{t}})[\vec{a}\vec{b}]$.

565. Найти смешанное произведение вектор-функций $\vec{f}(t)$, $\vec{g}(t)$, $\vec{h}(t)$:

а) $\vec{f}(t)=(t^2, t, \sqrt{t})$, $\vec{g}(t)=(\sin t, \cos t, \operatorname{tg} t)$, $\vec{h}(t)=(\ln t, \ln\sqrt{t}, \ln t^2)$;

б) $\vec{f}(t)=(t, \sqrt{t}, t)$, $\vec{g}(t)=(\sin t, \cos t, 1)$, $\vec{h}(t)=(1, \cos t, \sin t)$;

в) $\vec{f}(t)=t^2\vec{a}+t\vec{b}+\sqrt{t}\vec{c}$, $\vec{g}(t)=\sqrt{t}\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{h}(t)=t^2\vec{b}-t\vec{c}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\in E_3$.

Решение. а) Смешанное произведение вектор-функций $\vec{f}(t)$, $\vec{g}(t)$ и $\vec{h}(t)$ равно определителю, строки которого совпадают с координатами вектор-функций $\vec{f}(t)$, $\vec{g}(t)$ и $\vec{h}(t)$. Поэтому

$$(\vec{f}(t), \vec{g}(t), \vec{h}(t))=\begin{vmatrix} t^2 & t & \sqrt{t} \\ \sin t & \cos t & \operatorname{tg} t \\ \ln t & \ln\sqrt{t} & \ln t^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(2t^2-\sqrt{t})\ln t\cos t+\left(\frac{1}{2}\sqrt{t}-2t\right)\ln t\sin t+\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\ln t\operatorname{tg} t.$$

566. Доказать, что вектор-функции $\vec{f}(t)=(\ln t, \sin 2t, 2)$ и $\vec{g}(t)=(\ln\sqrt{t}, \sin t\cos t, 1)$ удовлетворяют соотношению $\vec{f}(t)+\vec{g}(t)=3(\vec{f}(t)-\vec{g}(t))$.

567. Доказать тождество $\vec{f}(t)+2\vec{g}(t)-\sin t\cdot\vec{h}(t)=\vec{0}$, где $\vec{f}(t)=(\ln t^2, \sin 2t+\sin t, 2)$, $\vec{g}(t)=\left(\ln\frac{1}{t}, -\sin t\cos t+\operatorname{tg} t, -\cos^2 t\right)$, $\vec{h}(t)=\left(0, \frac{2+\cos t}{\cos t}, 2\sin t\right)$.

568. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные, равные по длине, взаимно ортогональные векторы пространства E_3. Доказать, что скалярное произведение вектор-функций $\vec{f}(t)=\cos t\vec{a}+\sin t\vec{b}$ и $\vec{g}(t)=$ $=-\sin t\vec{a}+\cos t\vec{b}$ равно нулю, а их векторное произведение постоянно.

569. Доказать, что вектор-функции $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(t)$, определенные в задаче 568, удовлетворяют соотношениям:

а) $\vec{f}(t+\alpha)=\cos\alpha\,\vec{f}(t)+\sin\alpha\,\vec{g}(t)$;

б) $\vec{g}(t+\alpha)=-\sin\alpha\vec{f}(t)+\cos\alpha\vec{g}(t)$;

в) $\sin\alpha\,\vec{f}(t)=\frac{1}{2}(\vec{g}(t-\alpha)-\vec{g}(t+\alpha))$;

г) $\cos\alpha\vec{g}(t)=\frac{1}{2}(\vec{g}(t+\alpha)+\vec{g}(t-\alpha))$.

570. Найти производные $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ вектор-функции $\vec{r}(t)$:

а) $\vec{r}(t)=\left(\frac{\sqrt{t}+1}{t},\ \sin(\sqrt[3]{t}),\ e^{t^2}\right)$;

б) $\vec{r}(t)=(t^2+1,\ \sin t,\ e^{2t})$;

в) $\vec{r}(t)=\left(\frac{t+1}{t},\ \sqrt{t^2+1},\ \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)$;

г) $\vec{r}(t)=(e^{\operatorname{tg} t},\ \ln(\cos t),\ \sin(e^t))$;

д) $\vec{r}(t)=\ln\sqrt{t}\,\vec{a}+\operatorname{arctg} t\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы пространства E_3;

е) $\vec{r}(t)=\cos(t^2+1)\,\vec{a}+\sin\sqrt{t}\,\vec{b}+\operatorname{tg}\frac{1}{t}\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — постоянные векторы пространства E_3.

Решение. а) Координаты производной $\vec{r}'$ равны производным от соответствующих координат вектор-функции $\vec{r}(t)$. Поэтому

$$\vec{r}'=\left(-t^{-2}-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}},\ \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\cos(\sqrt[3]{t}),\ 2te^{t^2}\right),$$

$$\vec{r}''=\left(2t^{-3}+\frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}},\quad -\frac{2}{9}t^{-\frac{5}{3}}\cos(\sqrt[3]{t})-\frac{1}{9}t^{-\frac{4}{3}}\sin\sqrt[3]{t},\qquad 2e^{t^2}+\right.$$
$$\left.+4t^2e^{t^2}\right).$$

Решение. д) Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы, то

$$\vec{r}'=(\ln\sqrt{t})'\,\vec{a}+(\operatorname{arctg} t)'\,\vec{b}=\frac{1}{2t}\vec{a}+\frac{1}{t^2+1}\vec{b},$$

$$\vec{r}''=-\frac{1}{2t^2}\vec{a}-\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,\vec{b}.$$

571. Доказать, что вектор-функции $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(t)$, определенные в задаче 568, удовлетворяют тождествам

$$\vec{f}'(t)=\vec{g}(t),\ \vec{g}'(t)=-\vec{f}(t).$$

572. Пусть $\vec{r}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция. Доказать, что вектор-функции $\vec{r}'(t)$ и $\vec{r}''(t)$ тогда и только тогда коллинеарны между собой, когда $\vec{r}(t)=F(t)\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы пространства E_3.

Решение. Если $\vec{r}(t)=F(t)\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы пространства E_3, то $\vec{r}'=F'\vec{a}$, $\vec{r}''=F''\vec{a}$. Поэтому $\vec{r}''=$ $=\frac{F''}{F'}\vec{r}'$. Векторы $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ коллинеарны друг другу.

Обратно: Пусть $\vec{r}''\parallel\vec{r}'$, т. е. $\vec{r}''=k(t)\vec{r}'$. Обозначим через $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ координаты вектор-функции $\vec{r}(t)$. Тогда $x''=k(t)x'$, $y''=k(t)y'$, $z''=k(t)z'$. Отсюда

$$\int\frac{x''}{x'}dt=\int k(t)\,dt,\ \int\frac{y''}{y'}dt=\int k(t)\,dt,\ \int\frac{z''}{z'}dt=\int k(t)\,dt.$$

Первообразные функций $\frac{x''}{x'}$, $\frac{y''}{y'}$ и $\frac{z''}{z'}$ имеют вид $\ln(x')$, $\ln(y')$ и $\ln(z')$. Обозначим через $f(t)$ первообразную функции $k(t)$. Получим $\ln x'=f(t)+c_1$, $\ln y'=f(t)+c_2$, $\ln z'=f(t)+c_3$, где c_1, c_2 и c_3 — постоянные числа. Таким образом,

$$x'=e^{c_1}e^{f(t)},\ y'=e^{c_2}e^{f(t)},\ z'=e^{c_3}e^{f(t)}.$$

Введем обозначения: $e^{c_1}=a_1$, $e^{c_2}=a_2$, $e^{c_3}=a_3$, а через $F(t)$ обозначим первообразную функции $e^{f(t)}$. Тогда $x=a_1F(t)+b_1$, $y=$ $=a_2F(t)+b_2$, $z=a_3F(t)+b_3$, где a_i и b_i — постоянные числа. Положим: $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, получим $\vec{r}(t)=F(t)\vec{a}+\vec{b}$.

573. Доказать, что вектор-функция тогда и только тогда является постоянной, когда она имеет нулевую первую производную.

574. Вектор-функция вида $\vec{f}(t)=\vec{a}+t\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы пространства E_3, называется линейной. Доказать, что вектор-функция тогда и только тогда является линейной, когда ее вторая производная равна нулю.

575. Вектор-функция вида $\vec{f}(t)=\vec{a}+t\vec{b}+t^2\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — постоянные векторы пространства E_3, называется квадратичной. Доказать, что вектор-функция тогда и только тогда является квадратичной, когда ее третья производная равна нулю.

576. Дана вектор-функция $\vec{r}(t)=\left(t-5,\ \frac{2}{3}t^3+1,\ 2t-6\right)$. Найти такое значение параметра t_0, при котором вектор $\vec{r}'(t_0)$ коллинеарен вектору $\vec{a}=(4, 8, 8)$.

577. Следует ли из дифференцируемости вектор-функции $\vec{r}(t)$ дифференцируемость функции $|\vec{r}(t)|$?

578. Дана дифференцируемая вектор-функция $\vec{r}(t)$. Можно ли утверждать, что $|\vec{r}'(t)|=|\vec{r}(t)|'$?

579. Пусть $\vec{r}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция. Можно ли утверждать, что $\vec{r}\cdot\vec{r}'=|\vec{r}|\,|\vec{r}|'$?

580. Пусть $\vec{r}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, $t(s)$ — дифференцируемая функция скалярного аргумента. Доказать, что производная $\vec{r}'_s$ сложной вектор-функции $\vec{r}(t(s))$ удовлетворяет соотношению $\vec{r}'_s=t'_s\cdot\vec{r}'_t$.

581. Найти производную $\vec{r}'_s$ сложной вектор-функции $\vec{r}(t(s))$, если:

а) $\vec{r}(t)=(t^3,\ t,\ t^{-1}),\ t(s)=\frac{1}{s}$;

б) $\vec{r}(t)=(\sin t,\ \cos t,\ \operatorname{tg} t),\ t(s)=e^s$;

в) $\vec{r}(t)=(e^t,\ e^{-t},\ e^{2t}),\ t(s)=\ln s$.

582. Найти частные производные $\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{r}_{u^2},\ \vec{r}_{v^2},\ \vec{r}_{uv}$ от вектор-функции $\vec{r}(u,\ v)$:

а) $\vec{r}(u,\ v)=(e^{uv},\ \ln(u+v),\ \sqrt{u^2+v})$;

б) $\vec{r}(u,\ v)=(\sin(u+v),\ \cos(u^2-v),\ \operatorname{tg}(u+v))$;

в) $\vec{r}(u,\ v)=(\operatorname{arctg}\sqrt{u},\ \arcsin 2v,\ \arccos(u^2+v^2))$;

г) $\vec{r}(u,\ v)=e^{u^2v}\vec{a}+\ln(uv^2)\,\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы пространства E_3.

Решение. а) Координаты производной совпадают с производными от соответствующих координат вектор-функции $\vec{r}(u,\ v)$. Поэтому

$$\vec{r}_u=\left(ve^{uv},\ \frac{1}{u+v},\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v}}\right),\quad \vec{r}_v=\left(ue^{uv},\ \frac{1}{u+v},\ \frac{1}{2\sqrt{u^2+v}}\right),$$

$$\vec{r}_{u^2}=\left(v^2e^{uv},\ -\frac{1}{(u+v)^2},\ \frac{v}{\sqrt{(u^2+v)^3}}\right),$$

$$\vec{r}_{v^2}=\left(u^2e^{uv},\ -\frac{1}{(u+v)^2},\ -\frac{1}{4\sqrt{(u^2+v)^3}}\right),$$

$$\vec{r}_{uv}=\left((1+uv)\,e^{uv},\ -\frac{1}{(u+v)^2},\ -\frac{u}{2\sqrt{(u^2+v)^3}}\right).$$

583. Пусть $\vec{r}(u,\ v)$ — дифференцируемая вектор-функция. Доказать, что вектор-функция $\vec{r}$ тогда и только тогда постоянна в некоторой области, когда в каждой ее точке $\vec{r}_u=\vec{r}_v=\vec{0}$.

584. Пусть $\vec{r}(u,\ v)$ — дифференцируемая вектор-функция, $h(t)$ и $v(t)$ — дифференцируемые скалярные функции. Доказать, что производная $\vec{r}'$ сложной вектор-функции $\vec{r}(u(t), v(t))$ удовлетворяет соотношению $\vec{r}' = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$.

585. Найти производную $\vec{r}'$ от сложной вектор-функции:

а) $\vec{r}(u, v) = (u+v, u^2 - v, uv)$, $u(t) = t^2$, $v(t) = t+3$;

б) $\vec{r}(u, v) = \left(\ln(uv), \ln\frac{u}{v}, \ln(u+v)\right)$, $u(t) = e^t$, $v(t) = e^{-t}$;

в) $\vec{r}(u, v) = (\cos u \cdot \cos v, \sin(u \cdot v), \sin(\cos v))$, $u(t) = \sqrt{t}$, $v(t) = 3t$.

586. Пусть $\vec{r}(u, v)$ — дифференцируемая вектор-функция, $u(t, s)$ и $v(t, s)$ — дифференцируемые скалярные функции. Доказать, что частные производные $\vec{r}_t$ и $\vec{r}_s$ сложной вектор-функции $\vec{r}(u(t, s), v(t, s))$ удовлетворяют соотношениям $\vec{r}_t = \vec{r}_u u_t + \vec{r}_v v_t$, $\vec{r}_s = \vec{r}_u u_s + \vec{r}_v v_s$.

587. Найти производные $\vec{r}_t$ и $\vec{r}_s$ сложной вектор-функции $\vec{r}(u(t, s), v(t, s))$, если:

а) $\vec{r}(u, v) = \left(u+v, uv, \frac{u}{v}\right)$, $u = s - t$, $v = s + t$;

б) $\vec{r}(u, v) = \left(\sqrt{u^3 v}, \sqrt[3]{uv^2}, \frac{1}{uv}\right)$, $u = st$, $v = \frac{s}{t}$, $t > 0$, $s > 0$;

в) $\vec{r}(u, v) = (e^{2u}, e^{\frac{u}{v}}, e^v)$, $u = \ln(st)$, $v = \ln t$.

588. Пусть $f(t)$ и $g(u, v)$ — дифференцируемые функции, $\vec{r}(t)$ и $\vec{m}(u, v)$ — дифференцируемые вектор-функции. Доказать справедливость равенств $(f \cdot \vec{r})' = f' \cdot \vec{r} + f \cdot \vec{r}'$;
$(g \cdot \vec{m})_u = g_u \vec{m} + g \vec{m}_u$; $(g \cdot \vec{m})_v = g_v \vec{m} + g \vec{m}_v$.

589. Найти $(f(t) \cdot \vec{r}(t))'$, если:

а) $f(t) = \cos t$, $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \operatorname{tg} t)$;

б) $f(t) = \sqrt{t}$, $\vec{r}(t) = \left(\frac{t+1}{\sqrt{t^3}}, \sqrt{t+2}, \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)$;

в) $f(t) = \ln t$, $\vec{r}(t) = (e^{3t}, \ln\sqrt{t}, \ln\sqrt{t+1})$.

590. Найти частные производные по переменным u и v от произведения $g \cdot \vec{m}$, если:

а) $g(u, v) = u + v$, $\vec{m}(u, v) = \left(\sqrt{u+v}, \frac{1}{u-v}, u - v\right)$;

б) $g(u, v) = v \cos u$, $\vec{m}(u, v) = \left(\frac{\operatorname{tg} u}{v}, u \cos v, v^2 \sec u\right)$.

591. Пусть $\vec{m}(t)$ и $\vec{n}(t)$ — дифференцируемые вектор-функции. Доказать, что $(\vec{m} \cdot \vec{n})' = \vec{m}'\vec{n} + \vec{m}\vec{n}'$. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для вектор-функций двух переменных.

592. Найти производную от скалярного произведения вектор-функций $\vec{m}(t)$ и $\vec{n}(t)$:

а) $\vec{m}(t)=\left(t^2, \sqrt{t}, \frac{1}{t}\right)$, $\vec{n}(t)=(\sqrt{t}, t, t^3+1)$;

б) $\vec{m}(t)=(\sin t, \cos t \sin 2t, 2\cos 3t)$, $\vec{n}(t)=\left(\cos 2t, 1, \frac{1}{2}\right)$;

в) $\vec{m}(t)=(\ln\sqrt{t}, \ln t^2, \ln e^{\operatorname{tg} t})$, $\vec{n}(t)=\left(2, \frac{1}{2}, \operatorname{ctg} t\right)$.

593. Найти частные производные по переменным u и v от скалярного произведения вектор-функций $\vec{m}(u, v)$ и $\vec{n}(u, v)$:

а) $\vec{m}=\left(u, \frac{u^2+v^2}{v}, 1\right)$, $\vec{n}=\left(0, \frac{u}{u^2+v^2}, \sqrt{v}\right)$;

б) $\vec{m}=(\cos(uv), \sin(uv), \sin(u^2-v^2))$,
$\vec{n}(\cos(uv), -\sin(uv), \operatorname{ctg}(u^2-v^2))$;

в) $\vec{m}=(\operatorname{arctg} u, \arccos(u+v), \operatorname{ctg} u)$,
$\vec{n}=(\arcsin v, \operatorname{arcctg} u, \sin u \cos v)$.

594. Доказать, что дифференцируемая вектор-функция $\vec{r}(t)$ тогда и только тогда имеет на некотором промежутке постоянный модуль, когда векторы $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}'(t)$ в любой точке этого промежутка перпендикулярны между собой.

595. Доказать, что на некоторой области дифференцируемая вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ тогда и только тогда имеет постоянный модуль, когда в любой точке этой области векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ перпендикулярны вектору $\vec{r}$.

596. Доказать, что вектор-функция $\vec{r}(t)=(\cos 5t, \sin 5t, -1)$ перпендикулярна своей производной.

597. Доказать, что вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(\cos(uv)\sin(u^2+v^2), \cos(uv)\cos(u^2+v^2), \sin(uv))$ перпендикулярна своим производным $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

598. Пусть $\vec{r}(u, v)$ — дифференцируемая вектор-функция. Доказать, что она в том и только в том случае имеет в некоторой области постоянное направление, когда векторы $\vec{r}$, $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ коллинеарны между собой.

599. Доказать, что для дифференцируемых вектор-функций $\vec{m}(t)$ и $\vec{n}(t)$ выполнено соотношение

$$[\vec{m}(t)\,\vec{n}(t)]'=[\vec{m}'(t)\,\vec{n}(t)]+[\vec{m}(t)\,\vec{n}'(t)].$$

Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для вектор-функций двух переменных.

600. Найти производную от векторного произведения вектор-функций $\vec{m}(t)$ и $\vec{n}(t)$:

а) $\vec{m}(t)=\left(t,\ 0,\ \frac{1}{t^2}\right),\ \vec{n}(t)=\left(\frac{t^2}{t+1},\ t^2,\ 0\right)$;

б) $\vec{m}(t)=(\cos t,\ \operatorname{tg} t,\ \operatorname{ctg} t),\ \vec{n}(t)=\left(\operatorname{ctg} t,\ \frac{1}{\cos t},\ 0\right)$;

в) $\vec{m}(t)=\ln\sqrt{t}\cdot\vec{a}+e^t\cdot\vec{b},\quad \vec{n}(t)=e^t\vec{a}+\ln t\cdot\vec{b};\quad \vec{a},\quad \vec{b}$ — постоянные векторы пространства E_3.

601. Найти производные по переменным u и v от векторного произведения вектор-функций $\vec{m}(u,\ v)$ и $\vec{n}(u,\ v)$:

а) $\vec{m}(u,\ v)=(\cos(u,\ v),\ \sin(u^2),\ 0),\ \vec{n}(u,\ v)=(0,\ \cos(u^2),\ \operatorname{tg}(u+v))$;

б) $\vec{m}(u,\ v)=\operatorname{arctg} u\cdot\vec{a}+\operatorname{arctg} v\cdot\vec{b},\ \vec{n}(u,\ v)=\operatorname{arctg} v\cdot\vec{a}+\operatorname{arctg} u\times \times\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы пространства E_3.

§ 24. ПОНЯТИЕ ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Литература: [2], § 49, 50; [3], разд. 5, § 11.

602. Выяснить, определяет ли вектор-функция $\vec{r}(t)$ погружение промежутка I в евклидову плоскость E_2. Найти класс погружения:

а) $\vec{r}(t)=(\sin^2 t,\ \cos^2 t),\ I=\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$;

б) $\vec{r}(t)=(t^3,\ t),\ I=[0,\ 1]$;

в) $\vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin t),\ I=[0;\ 2\pi]$;

г) $\vec{r}(t)=\left(t^2+1,\ \frac{1}{3}t^3-2t^2\right),\ I=[-1,\ 1]$;

д) $\vec{r}(t)=(e^t,\ \operatorname{arctg}(t^2+1)),\ I=]-\infty,\ \infty[$.

Решение. а) Вектор-функция $\vec{r}(t)$ в том и только в том случае определяет погружение класса C^p промежутка I в плоскость E_2, если $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$ для всех точек промежутка I и вектор-функция $\vec{r}(t)$ принадлежит классу C^p, т. е. имеет непрерывные производные до p-го порядка включительно. Для данной вектор-функции $r'(t)=(2\sin t\cos t,\ -2\sin t\cos t)$. Производная существует во всех точках промежутка I $|\vec{r}'(t)|=\sqrt{2}\,|\sin 2t|$. Так как $\sin 2t\neq 0$ и $t\in\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$, то вектор-функция $\vec{r}(t)$ определяет погружение интервала $\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ в плоскость E_2. Функция $\vec{r}(t)$ принадлежит классу C^p тогда и только тогда, когда ее координаты являются непрерывно дифференцируемыми функциями до p-го порядка включительно. Отсюда видно, что координаты данной вектор-функции имеют непрерывные производные любого порядка. Вектор-функция $\vec{r}(t)$ принадлежит классу C^∞.

603. Дано отображение числовой прямой в плоскость E_2, определяемое вектор-функцией $\vec{r}(t)$. Найти такие ее промежутки, на которых отображение является погружением:

а) $\vec{r}(t)=(r(t-\sin t),\ r(1-\cos t))$;

б) $\vec{r}(t)=(2r\cos t-r\cos 2t,\ 2r\sin t-r\sin 2t)$;

в) $\vec{r}(t)=(3r\cos t+r\cos 3t,\ 3r\sin t-r\sin 3t)$.

604. Выяснить, определяет ли вектор-функция $\vec{r}(t)$ погружение промежутка I числовой прямой в пространство E_3. Найти класс погружения:

а) $\vec{r}(t)=(t^3,\ \sqrt[3]{t^4},\ t+1)$, $I=[0,\ +\infty[$;

б) $\vec{r}(t)=\left(t^2,\ 2t,\ \frac{1}{t+1}\right)$, $I=]-1,\ +\infty[$;

в) $\vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ \sqrt[2]{t^5})$, $I=[0,\ +\infty[$;

г) $\vec{r}(t)=(\ln(t+1),\ \operatorname{tg} t,\ 1)$, $I=\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$;

д) $\vec{r}(t)=(1-\sin t,\ t-\cos t,\ 2)$, $I=\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$;

е) $\vec{r}(t)=(1-\sin^2 t,\ t^2-\cos t,\ 2t^2+\sin 2t)$, $I=\left]-\frac{\pi}{2},\ +\infty\right[$;

ж) $\vec{r}(t)=(\arccos t,\ \arcsin t,\ \operatorname{arctg} t)$, $I=[-1,\ 1]$;

з) $\vec{r}(t)=(e^{t^2},\ e^{-t^2+3},\ e^{t^3})$, $I=]-\infty,\ \infty[$.

Р е ш е н и е. а) Найдем производную данной вектор-функции: $\vec{r}'(t)=\left(3t^2,\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{t},\ 1\right)$. Так как третья координата равна 1, то $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$ для любого t. Поэтому вектор-функция $\vec{r}(t)$ определяет погружение промежутка I в пространство E_3. Определим класс погружения. Первая и третья координаты данной вектор-функции — бесконечно дифференцируемые функции. Вторая же координата $y=\sqrt[3]{t^4}$ не удовлетворяет этому свойству. Действительно, $y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{t}$, $y''=\frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}$. Отсюда вторая производная $y''(t)$ не существует при $t=0$. Поэтому данная вектор-функция определяет погружение класса C^1.

605. Указать наибольший промежуток I, содержащий данное число t_0, для которого вектор-функция $\vec{r}(t)$ определяет погружение I в пространство E_3:

а) $\vec{r}(t)=(\operatorname{tg} t,\ \operatorname{tg} 2t,\ \sin 4t)$, $t_0=0$;

б) $\vec{r}(t)=(t^3,\ t^2,\ \sqrt[4]{t^7})$, $t_0=\frac{1}{2}$;

в) $\vec{r}(t)=\left(\frac{t-1}{t+1},\ \ln(t-1),\ \ln(t+1)\right)$, $t_0=2$;

г) $\vec{r}(t)=(\cos t,\ \cos 3t,\ \cos 6t),\ t_0=\frac{\pi}{2}$;

д) $\vec{r}(t)=(\operatorname{sh} t,\ \operatorname{sh} 2t,\ \operatorname{sh} 4t),\ t_0=0$.

Решение. а) Для того чтобы вектор-функция $\vec{r}(t)$ определяла погружение промежутка I в E_3, необходимо и достаточно существование производной $\vec{r}'(t)$ во всех точках промежутка I, отличной от нуль-вектора. Определим $\vec{r}'(t)$: $\vec{r}'(t)=\left(\frac{1}{\cos^2 t},\ \frac{2}{\cos^2 2t},\ 4\cos 4t\right)$. Ясно, что производная $\vec{r}'(t)$ отлична от нуль-вектора во всех тех точках числовой прямой, в которых она существует. Таким образом, нам необходимо определить наибольший промежуток, содержащий $t_0=0$, на котором определена производная $\vec{r}'(t)$. Отсюда видно, что $\vec{r}'(t)$ не существует при $t=\frac{\pi}{4}+$ $+\pi k$. Поэтому $I=\left]-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right[$.

606. Будет ли погружение промежутка I в плоскость E_2, определяемое вектор-функцией $\vec{r}(t)$, вложением, если:

а) $\vec{r}(t)=(t\cos t,\ t\sin t),\ I=]-\infty,\ \infty[$;

б) $\vec{r}(t)=(\sin t,\ \cos t),\ I=[0,\ 2\pi[$;

в) $\vec{r}(t)=(\sin 2t,\ \cos 2t),\ I=[0,\ 2\pi[$;

г) $\vec{r}(t)=(e^t\sin t,\ e^t\cos t),\ I=]-\infty,\ \infty[$?

Решение. а) Вначале убедимся, что данная вектор-функция определяет погружение указанного промежутка. $\vec{r}'(t)=$ $=(\cos t-t\sin t,\ \sin t+t\cos t)$. Пусть $\vec{r}'(t)=\vec{0}$. Тогда $\cos t-$ $-t\sin t=0$, $\sin t+t\cos t=0$, т. е. $\operatorname{ctg} t=t$, $\operatorname{tg} t=-t$. Из полученных соотношений следует противоречие $t^2=-1$. Поэтому данная вектор-функция определяет погружение.

Погружение f промежутка I представляет собой вложение, если оно является гомеоморфизмом между I и его образом fI. Для решения задачи достаточно показать, что данное погружение есть взаимно однозначное отображение I на fI. Докажем, что для любых неравных между собой t_1 и t_2 выполнено $\vec{r}(t_1)\neq$ $\neq\vec{r}(t_2)$. Пусть существуют такие два числа t_1 и t_2, $t_1\neq t_2$, для которых $\vec{r}(t_1)=\vec{r}(t_2)$. Тогда $t_1\cos t_1=t_2\cos t_2$ и $t_1\sin t_1=t_2\sin t_2$. Возведем эти соотношения в квадрат и сложим их друг с другом. Получим $t_1^2=t_2^2$. Так как $t_1\neq t_2$, то отсюда следует: $t_1=-t_2$. Тогда $t_1\cos t_1=-t_1\cos(-t_1)$. Используя четность функции $y=\cos t$, получим $t_1=-t_1$, т. е. $t_1=0$ и $t_2=0$. Мы пришли к противоречию, так как по предположению $t_1\neq t_2$. Таким образом, данное погружение является вложением.

607. Будет ли погружение промежутка I в пространство E_3, определяемое вектор-функцией $\vec{r}(t)$, вложением:

а) $\vec{r}(t)=(\sin t,\ \cos 2t,\ ae^t)$, $I=]-\infty,\ \infty[$;

б) $\vec{r}(t)=(t,\ t^2,\ t^3)\, I=]-\infty,\ \infty[$;

в) $\vec{r}(t)=(t^2,\ t^4,\ \cos t)$, $I=]-\infty,\ 0[\ \cup\ ]0,\ +\infty[$;

г) $\vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin 2t,\ \sin t+\cos t)$, $I=]-\infty,\ \infty[$?

608. Выяснить, является ли отображение $\varphi(t)$ промежутка I_1 на промежуток I_2 диффеоморфизмом. Если является, то определить класс диффеоморфизма:

а) $I_1=]-\infty,\ \infty[$, $I_2=]0,\ 2[$, $\varphi(t)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t+1$;

б) $I_1=[0,\ 1]$, $I_2=[3,\ 5]$, $\varphi(t)=2t+3$;

в) $I_1=[-1,\ 1]$, $I_2=[0,\ 1]$, $\varphi(t)=t^2$;

г) $I_1=]0,\ 2]$, $I_2=]2,\ 6]$, $\varphi(t)=t^2+2$;

д) $I_1=[0,\ \pi]$, $I_2=[0,\ 1]$, $\varphi(t)=\sin t$;

е) $I_1=[0,\ \pi]$, $I_2=[-1,\ 1]$, $\varphi(t)=\cos t$;

ж) $I_1=]0,\ \infty[$, $I_2=]-\infty,\ \infty[$, $\varphi(t)=\ln t$;

з) $I_1=]-\infty,\ \infty[$, $I_2=]0,\ +\infty[$, $\varphi(t)=e^t$;

и) $I_1=]-\infty,\ \infty[$, $I_2=\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(t)=\operatorname{arctg} t$;

к) $I_1=\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$, $I_2=]-\infty,\ \infty[$, $\varphi(t)=\operatorname{tg} t$.

Решение. а) Функция $\varphi(t)$ в том и только в том случае является диффеоморфизмом промежутка I_1 на промежуток I_2, когда она, во-первых, дифференцируема, во-вторых, взаимно однозначно отображает I_1 на I_2 и, в-третьих, обратное отображение φ^{-1} дифференцируемо. $\varphi'(t)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot\varphi'(t)$ существует для любого t, $\varphi'(t)>0$ при любом t. Поэтому функция $\varphi(t)$ монотонная. $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t+1\right)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t+1\right)=2$. Отсюда следует, что $\varphi(t)$ взаимно однозначно отображает I_1 на I_2. По теореме об обратной функции данное отображение имеет обратное, которое также является дифференцируемым. Функция $\varphi(t)$ является бесконечно дифференцируемой, обратная функция также бесконечно дифференцируема, поэтому диффеоморфизм имеет класс C^∞.

609. Построить C^∞-диффеоморфизм, отображающий промежуток I_1 на промежуток I_2, если:

а) $I_1=[a,\ b]$, $I_2=[c,\ d]$;

б) $I_1=]-\infty,\ \infty[$, $I_2=]a,\ \infty[$;

в) $I_1=]a,\ \infty[$, $I_2=]-\infty,\ \infty[$;

г) $I_1=]-\infty,\ \infty[$, $I_2=]a,\ b[$;

д) $I_1=]a,\ b[$, $I_2=]-\infty,\ \infty[$.

610. Доказать, что два погружения промежутков I_1 и I_2, определенные вектор-функциями $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(\tau)$, эквивалентны:

а) $\vec{f}(t)=(t,\ \sqrt{t^2-1})$, $I_1=]1,\ +\infty[$, $\vec{g}(\tau)=(\operatorname{ch}\tau,\ \operatorname{sh}\tau)$, $I_2=$ $=]0,\ +\infty[$;

б) $\vec{f}(t)=(t^2,\ t^3+1)$, $I_1=[2,\ 5]$, $\vec{g}(\tau)=(\tau,\ \sqrt{\tau^3}+1)$, $I_2=[4,\ 25]$;

в) $\vec{f}(t)=(a\cos t,\ b\sin t)$, $I_1=[0,\ 2\pi[$, $\vec{g}(\tau)=\left(a\cos\frac{\tau}{2},\ b\sin\frac{\tau}{2}\right)$, $I_2=[0,\ 4\pi[$;

г) $\vec{f}(t)=(t,\ \sqrt{1-t^2})$, $I_1=[-1,\ 1]$, $\vec{g}(\tau)=(\cos\tau,\ \sin\tau)$, $I_2=[0,\ \pi]$;

д) $\vec{f}(t)=\left(\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\ \frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)$, $I_1=]0,\ +\infty[$, $\vec{g}(\tau)=(a\operatorname{ch}\tau,$ $b\operatorname{sh}\tau)$, $I_2=]-\infty,\ \infty[$;

е) $\vec{f}(t)=\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2},\ b\frac{2t}{1+t^2}\right)$, $I_1=]-\infty,\ \infty[$, $\vec{g}(\tau)=(a\cos\tau,\ b\sin\tau)$, $I_2=]-\pi,\ \pi[$.

Решение. а) Два погружения f: $I_1\to E_2$ и g: $I_2\to E_2$ в том и только в том случае эквивалентны, когда существует такой диффеоморфизм φ: $I_2\to I_1$, что $g=f\circ\varphi$. Для решения задачи необходимо построить диффеоморфизм $t(\tau)$: $I_2\to I_1$, при котором $\vec{g}(\tau)=\vec{f}(t(\tau))$. Напомним, что $\operatorname{ch}\tau=\frac{e^\tau+e^{-\tau}}{2}$, $\operatorname{sh}\tau=\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{2}$, $\operatorname{ch}\tau^2-$ $-\operatorname{sh}\tau^2=1$. Положим $t=\operatorname{ch}\tau$. Тогда $\sqrt{t^2-1}=\operatorname{sh}\tau$. Функция $t=$ $=\operatorname{ch}\tau$ является диффеоморфизмом промежутка $I_2=]0,\ +\infty[$ на промежуток $I_1=]1,\ +\infty[$. $f(t(\tau))=(\operatorname{ch}\tau,\ \sqrt{\operatorname{ch}^2\tau-1})=(\operatorname{ch}\tau,$ $\operatorname{sh}\tau)=\vec{g}(\tau)$. Погружения $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(\tau)$ эквивалентны.

611. Показать, что два погружения промежутков I_1 и I_2 в пространство E_3, определенные вектор-функциями $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(\tau)$, эквивалентны:

а) $\vec{f}(t)=(t^3,\ t^6,\ 1)$, $I_1=[0,\ 27]$, $\vec{g}(\tau)=(\tau,\ \tau^2,\ 1)$, $I_2=[0,\ 3]$;

б) $\vec{f}(t)=\left(t,\ \sqrt{1-t^2},\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$, $I_1=]-1,\ 1[$;
$\vec{g}(\tau)=(\cos\tau,\ \sin\tau,\ \operatorname{ctg}\tau)$, $I_2=]0,\ \pi[$;

в) $\vec{f}(t)=\left(\frac{2t\sqrt{1-t^2}}{1-2t^2},\ \sqrt{1-t^2},\ \frac{1-2t^2}{2t\sqrt{1-t^2}}\right)$, $I_1=\left]0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$,
$\vec{g}(\tau)=(\operatorname{tg}2\tau,\ \cos\tau,\ \operatorname{ctg}2\tau)$, $I_2=\left]0,\ \frac{\pi}{4}\right[$;

г) $\vec{f}(t)=(t,\ \sqrt{t^2-1},\ 2t\sqrt{t^2-1})$, $I_1=[1,\ +\infty[$,
$\vec{g}(\tau)=(\operatorname{ch}\tau,\ \operatorname{sh}\tau,\ \operatorname{sh}2\tau)$, $I_2=[0,\ +\infty[$.

612. Показать, что погружения $\vec{f}(t)$: $I_1\to E_2$ и $\vec{g}(\tau)$: $I_2\to E_2$ не эквивалентны: $\vec{f}(t)=(\cos t,\ \sin t)$, $I_1=]0,\ 2\pi[$, $\vec{g}(\tau)=(\cos2\tau,$ $\sin2\tau)$, $I_2=]0,\ 2\pi[$.

613. Определить параметризацию следующих кривых плоскости E_2:

а) левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

б) прямой линии $Ax+By+C=0$;

в) окружности $x^2+y^2=r^2$;

г) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

д) правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

е) параболы $y=2px$.

Решение. а) Нам необходимо определить такой промежуток I и вектор-функцию $\vec{r}(t)$, что образ I при погружении, определяемом вектор-функцией $\vec{r}(t)$, совпадает с левой ветвью гиперболы. Вектор-функция при этом называется параметризацией кривой. Рассмотрим функции $\operatorname{ch} t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ и $\operatorname{sh} t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$. Они удовлетворяют условиям $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$. Поэтому в качестве первой координаты искомой вектор-функции положим $x(t)=-a\operatorname{ch} t$, а в качестве второй — $y(t)=b\operatorname{sh} t$. Тогда для любого t $\frac{x^2(t)}{a^2}-\frac{y^2(t)}{b^2}=1$, $x(t)<0$, $t\in\,]-\infty,\ \infty[$. Вектор-функция $\vec{r}(t)=-(a\operatorname{ch} t,\ b\operatorname{sh} t)$ является погружением промежутка $I=\,]-\infty,\ \infty[$ в плоскость E_2. Она представляет собой искомую параметризацию.

614. Доказать, что кривая, определенная вектор-функцией $\vec{r}(t)$, $t\in I$, совпадает с кривой пересечения поверхностей P_1 и P_2 пространства E_3:

а) $\vec{r}(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}t,\ t^2\right)$, $t\in\,]-\infty,\ +\infty[$, P_1: $z=x^2+y^2$, P_2: $y=x$;

б) $\vec{r}(t)=(t,\ t^2,\ e^t)$, $t\in\,]-\infty,\ +\infty[$, P_1: $y=x^2$, P_2: $z=e^x$;

в) $\vec{r}(t)=\left(t,\ \frac{t^3}{2a^2},\ \frac{a^2}{2t}\right)$, $t\in\,]-\infty,\ 0[\,\cup\,]0,\ +\infty[$, P_1: $2a^2y-x^3=0$, P_2: $2xz=a^2$.

Решение. а) Достаточно доказать, что для любого t точка с координатами $\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t^2\right)$ принадлежит как поверхности P_1, так и поверхности P_2. И наоборот, координаты любой точки, принадлежащей пересечению поверхностей P_1 и P_2, можно представить в виде $\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t^2\right)$, $t\in\,]-\infty,\ +\infty[$. Если $x(t)=\frac{t}{\sqrt{2}}$, $y(t)=\frac{t}{\sqrt{2}}$, $z(t)=t^2$, то для любого t $x(t)=y(t)$, $z(t)=x^2(t)+y^2(t)$, т. е. точка лежит на поверхностях P_1 и P_2. Обратно, пусть точка $M(x,\ y,\ z)$ принадлежит пересечению P_1 и P_2. Так как $M\in P_2$, то $x=y$. Положим $x=\frac{t}{\sqrt{2}}$, тогда $y=\frac{t}{\sqrt{2}}$. Так как $M\in P_1$, то $z=x^2+y^2$, т. е. $z=t^2$. Утверждение доказано.

615. Построить параметризацию следующих линий пространства E_3:

а) линии, образованной пересечением верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=9$, $z\geqslant 0$, и параболического цилиндра $y^2=6x$;

б) прямой линии $\begin{cases} x+2y-3z-12=0, \\ 2x+y+5z-1=0; \end{cases}$

в) окружности пересечения плоскости $z=3$ и сферы x^2+y^2+ $+z^2=25$;

г) линии пересечения плоскости $x-2y=0$ и эллиптического параболоида вращения $x^2+y^2=z$;

д) окружности пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=20$ и эллиптического параболоида вращения $x^2+y^2=z$;

е) окружности пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскости $x=y$;

ж) линии пересечения плоскости $3x+y-z+2=0$ и эллиптического цилиндра $\frac{x^2}{4}+y^2=1$;

з) линии пересечения параболоида $x^2+4y^2=z$ и одной части гиперболического цилиндра $x^2-y^2=1$, $x>0$.

Р е ш е н и е. а) Нам необходимо найти такую вектор-функцию $\vec{r}(t)$, определяющую погружение промежутка I в пространство E_3, что точка с радиус-вектором $\vec{r}(t)$ принадлежит указанным поверхностям. В качестве параметра t примем вторую координату точек линии: $y=t$. Тогда $x=\frac{1}{6}y^2=\frac{1}{6}t^2$, $z^2=9-y^2-$ $-x^2=9-t^2-\frac{1}{36}t^4$. Выясним, в каких пределах изменяется t. Необходимо потребовать: $9-t^2-\frac{1}{36}t^4\geqslant 0$. Решая это неравенство, получим $-3\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\leqslant t\leqslant 3\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Так как $z^2=$ $=9-t^2-\frac{1}{36}t^4$, $z>0$, то $z=\sqrt{9-t^2-\frac{1}{36}t^4}$. Таким образом, параметризация данной линии имеет вид:

$$\vec{r}(t)=\left(\frac{t^2}{6},\ t,\ \sqrt{9-t^2-\frac{1}{36}t^4}\right),\ t\in\left[-3\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1};\ 3\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}\,\right].$$

Докажите самостоятельно, что эта вектор-функция определяет погружение указанного промежутка в E_3.

§ 25. КАСАТЕЛЬНАЯ К КРИВОЙ. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Литература: [2], § 51.

В задачах 616—627 рассматриваются кривые на плоскости E_2.

616. Дана вектор-функция $\vec{r}(t)$, определяющая параметризацию кривой. Найти уравнение касательной и нормали кривой в точке с параметром t_i:

а) $\vec{r}(t)=(\sqrt{t},\ t^3)$, $t_1=1$;

б) $\vec{r}(t)=(t,\ t^2)$, $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=-1$, $t_4=5$;

в) $\vec{r}(t)=(a\sin t,\ b\cos t)$, $t_1=0$, $t_2=\pi$, $t_3=\frac{\pi}{2}$, $t_4=\frac{3\pi}{2}$;

г) $\vec{r}(t)=(a\operatorname{ch} t,\ b\operatorname{sh} t)$, $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=-1$;

д) $\vec{r}(t)=(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))$, $t_1=\frac{\pi}{2}$.

Решение. а) Если $\vec{r}(t)$ — параметризация кривой, то направляющий вектор касательной при $t=t_1$ равен $\vec{r}'(t_1)$. Для данной вектор-функции $\vec{r}'(t)=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}},\ 3t^2\right)$, $\vec{r}'(1)=\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$. Координаты точки кривой при $t=1$ равны $(1,\ 1)$. Искомая касательная определяется точкой $(1,\ 1)$ и направляющим вектором $\left(\frac{1}{2},\ 3\right)$. Используя формулы аналитической геометрии, найдем уравнение касательной: $\frac{x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{3}$, или $6x-y-5=0$. Под нормалью плоской кривой понимается прямая, проходящая через рассматриваемую точку и перпендикулярная к касательной. Из уравнения касательной следует, что ее нормальный вектор имеет координаты $\vec{n}(6,\ -1)$. Поэтому уравнение нормали имеет вид $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-1}$ или $x+6y-7=0$.

617. Дано уравнение линии. Найти уравнение касательных и нормалей в указанных точках:

а) $y=x^2+3$, $M_1(-1,\ 4)$;

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $M_1(0,\ b)$, $M_2\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$;

в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $M_1(-a;\ 0)$.

618. Найти координаты точек параболы $y=x^2+2x-1$, в которых касательная параллельна прямой $2x-y+3=0$.

Решение. Как известно, вектор $\vec{a}(\alpha,\ \beta)$ тогда и только тогда коллинеарен прямой $Ax+By+C=0$, когда $A\alpha+B\beta=0$. В данном случае $2\alpha-\beta=0$. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на параболе. Положим $x=t$. Координаты ее радиус-вектора можно представить в виде $\vec{r}(t)=(t, t^2+2t-1)$. Отсюда $\vec{r}'(t)=(1, 2t+2)$. Так как вектор $\vec{r}'(t)$ является направляющим вектором касательной, то значение параметра, соответствующего искомой точке, удовлетворяет уравнению $2-(2t+2)=0$. Отсюда $t=0$. Искомая точка имеет координаты $(0; -1)$.

619. Может ли касательная кривой $y=x^5$ в некоторой ее точке составлять с осью Ox угол, равный $\frac{3\pi}{4}$?

620. Найти точку, в которой касательная параболы $y=x^2+2$ образует с осью Ox угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

621. Дана вектор-функция $\vec{r}(t)=(t, t^2)$, определяющая параметризацию кривой. Найти координаты точек этой кривой, в которых касательные проходят через точку $M(-1, -3)$.

622. Дана вектор-функция $\vec{r}(t)=(t^3, t^2-1)$, определяющая параметризацию кривой. Найти такие ее точки, в которых касательные параллельны прямой $2x+y-3=0$.

623. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и параболе $y^2=2px$ в точке $M(x_0, y_0)$, принадлежащей соответствующей кривой, имеют вид:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,\ \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1,\ y_0y=p(x+x_0).$$

624. Дано, что все нормали кривой проходят через одну точку. Доказать, что кривая является либо окружностью, либо частью окружности.

625. Доказать, что для любой точки M равносторонней гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ отрезок ее нормали, заключенный между точкой M и осью Ox, равен модулю $|\overrightarrow{OM}|$ радиус-вектора точки M.

626. Даны уравнения кривых. Найти координаты их точек пересечения и углы, под которыми они пересекаются:

а) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y^2=x$, $x^2=y$;

в) $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;

г) $y=2x^2-2x$, $y=2x-2x^2$;

д) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2+x=4$;

е) $x^2-y^2=1$, $xy=1$.

Р е ш е н и е. а) Координаты точки пересечения являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x. \end{cases}$$

Из нее следует $\operatorname{tg} x=1$, $x=\frac{\pi}{4}$, кривые пересекаются в точке $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Под углом пересечения кривых понимается угол между касательными в их общей точке. Определим направляющие векторы касательных. Первая кривая имеет параметризацию $\vec{f}(t)=(t, \sin t)$, вторая $\vec{g}(t)=(t, \cos t)$. Поэтому $\vec{f}'(t)=(1, \cos t)$, $\vec{g}'(t)=(1, -\sin t)$. Отсюда $\vec{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{g}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$$\cos\varphi=\frac{1-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3},\ \varphi=\arccos\frac{1}{3}.$$

627. Доказать, что угол пересечения кривой, определяемой уравнением $y=a\operatorname{tg}\frac{x}{a}$, с осью Ox не зависит от значения a. Найти этот угол.

В задачах 628—639 рассматриваются кривые в пространстве E_3.

628. Дана параметризация $\vec{r}(t)$ кривой. Найти уравнения касательных в точках кривой, соответствующих параметрам t_i:

а) $\vec{r}(t)=(e^t, \ln t, \sqrt[4]{t^3})$, $t_1=1$;

б) $\vec{r}(t)=(2t, t, t^2+1)$, $t_1=0$, $t_2=1$;

в) $\vec{r}(t)=\left(\sqrt{t}, 2t+\sqrt{t^3}, \frac{t+1}{t}\right)$, $t_1=1$, $t_2=4$;

г) $\vec{r}(t)=(e^{2t}, e^{-t}, e^t)$, $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=-1$;

д) $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, \operatorname{tg} t)$, $t_1=\frac{\pi}{4}$, $t_2=\frac{\pi}{3}$, $t_3=\frac{5\pi}{6}$;

е) $\vec{r}(t)=(\arcsin t, \arccos t, 2t^2+1)$, $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=0$, $t_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е. а) Искомая касательная определяется точкой $\vec{r}(1)$ и направляющим вектором $\vec{r}'(1)$, $\vec{r}(1)=(e, 0, 1)$, $\vec{r}'(t)=\left(e^t, \frac{1}{t}, \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}\right)$, $\vec{r}'(1)=\left(e, 1, \frac{3}{4}\right)$. Поэтому канонические уравнения касательной имеют вид:

$$\frac{x-e}{e}=y=\frac{z-1}{\frac{3}{4}}.$$

629. Кривая задана как линия пересечения поверхностей P_1 и P_2. Найти уравнения касательной кривой в точке M:
а) P_1: $xy=z$, P_2: $x^2+y^2=2$, $M(1, -1, -1)$;
б) P_1: $xy=z$, P_2: $x^2=y$, $M(-2, 4, -8)$;
в) P_1: $x^2+y^2=4$, P_2: $y^2+z^2=4$, $M(2, 0, 2)$.

Решение. а) Найдем параметризацию кривой в окрестности точки M. Положим $y=t$. Тогда из уравнения поверхности P_2 следует, что $x^2=2-t^2$. Так как в окрестности точки M первая координата положительна, то $x=\sqrt{2-t^2}$. Из уравнения поверхности P_1 получим $z=t\sqrt{2-t^2}$. Таким образом, параметризация кривой в окрестности точки M имеет вид: $\vec{r}(t)=(\sqrt{2-t^2}, t, t\sqrt{2-t^2})$. Точке M соответствует параметр $t=-1$. Найдем $\vec{r}'(t)$.

$$\vec{r}'(t)=\left(-\frac{t}{\sqrt{2-t^2}},\ 1,\ \sqrt{2-t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{2-t^2}}\right).$$

Вектор $\vec{r}'(-1)=(1, 1, 0)$ является направляющим вектором касательной. Поэтому параметрические уравнения касательной имеют вид:

$$x=1+t,\ y=-1+t,\ z=-1.$$

630. Дана параметризация кривой $\vec{r}(t)=(\sqrt{t}, t^2, t^3)$. Существует ли точка этой кривой, в которой касательная перпендикулярна плоскости $x+y+2z+3=0$?

Решение. Вектор $\vec{p}(\alpha, \beta, \gamma)$ тогда и только тогда перпендикулярен плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, когда он коллинеарен нормальному вектору плоскости, т. е. когда $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}$. Направляющий вектор касательной в произвольной точке имеет вид: $\vec{r}'(t)=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t, 3t^2\right)$. Нам необходимо найти такое значение параметра t, при котором $\frac{1}{2\sqrt{t}}=2t=\frac{3}{2}t^2$. Из равенства $2t=\frac{3t^2}{2}$ получим: $t_1=0$, $t_2=\frac{4}{3}$. Эти значения не удовлетворяют соотношению $\frac{1}{2\sqrt{t}}=2t$. Поэтому искомой точки не существует.

631. Дана параметризация кривой $\vec{r}(t)=(t^3, 2t^2, -7t)$. Найти уравнения таких ее касательных, которые параллельны плоскости $x-y+z=0$.

632. Кривая, параметризация которой определена вектор-функцией $\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$, называется винтовой линией. Доказать, что она расположена на цилиндре, а ее касательная в каждой точке составляет постоянный угол с образующей цилиндра. Найти этот угол.

633. Доказать, что касательные кривой, принадлежащей пересечению поверхностей P_1: $x^2=y$ и P_2: $2xy=3z$, образуют постоянный угол с вектором $\vec{p}\,(1,\ 0,\ 1)$. Найти этот угол.

634. Доказать, что касательные кривой, определенной параметризацией $\vec{r}\,(t)=(t^2,\ t,\ t+3)$, образуют постоянный угол с некоторым ненулевым вектором. Найти этот вектор и угол.

635. Выяснить, пересекаются ли кривые, заданные своими параметризациями $\vec{r}\,(t)$ и $\vec{g}\,(t)$. Если пересекаются, то найти координаты их общей точки и угол между ними:

а) $\vec{r}\,(t)=(t^2,\ t,\ 2t)$, $\vec{g}\,(t)=(-t,\ -t^3,\ -2t)$;

б) $\vec{r}\,(t)=\left(t+\frac{1}{t},\ t,\ 8\right)$, $\vec{g}\,(t)=(3t^2,\ t,\ t^3)$;

в) $\vec{r}\,(t)=(3,\ 2\operatorname{ch} t,\ 2\operatorname{sh} t)$, $\vec{g}\,(t)=\left(2t^2+1,\ t+\frac{1}{t},\ t-\frac{1}{t}\right)$.

636. Найти длину кривой между точками M_0 и M_1, если кривая:

а) определена параметризацией $\vec{r}\,(t)=(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$, точке M_0 соответствует параметр $t=0$, а $M_1-t=\pi$;

б) определена параметризацией $\vec{r}\,(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ (винтовая линия), точке M_0 соответствует параметр $t=0$, точке $M_1-t=2\pi$;

в) определена параметризацией $\vec{r}\,(t)=\left(a\,(t-\sin t),\ a\,(1-\cos t),\ 4a\cos\frac{t}{2}\right)$, M_0 и M_1 — две последовательные точки ее пересечения с плоскостью Oxy;

г) принадлежит пересечению поверхностей $x^3=3a^2y$ и $2xz=a^2$, точки M_1 и M_2 являются точками пересечения кривой и плоскостей $y=\frac{a}{3}$ и $y=9a$;

д) определена параметризацией $\vec{r}\,(t)=(a\operatorname{ch} t,\ a\operatorname{sh} t,\ at)$, точкам M_0 и M_1 соответствуют параметры t_0 и t_1.

Решение. а) Длина дуги кривой, определенной параметризацией $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$, между точками $M\,(t_0)$ и $M\,(t_1)$ вычисляется по формуле $s=\int\limits_{t_0}^{t_1}|r'\,(t)|\,dt$. Определим $\vec{r}'\,(t)$:

$$\vec{r}'\,(t)=(e^t\cos t-e^t\sin t,\ e^t\sin t+e^t\cos t,\ e^t)=$$
$$=e^t\,(\cos t-\sin t,\ \sin t+\cos t,\ 1).\ \text{Отсюда}\ |\vec{r}'\,(t)|=$$
$$=e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1}=e^t\sqrt{3}.$$

Поэтому

$$s=\sqrt{3}\int\limits_0^{\pi}e^t dt=\sqrt{3}\,(e^{\pi}-1).$$

637. Вычислить длину замкнутой кривой, определенной параметризацией $\vec{r}(t)=(\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

638. Найти натуральную параметризацию кривой, определенной вектор-функцией $\vec{r}(t)$:

а) $\vec{r}(t)=\left(\frac{t^2}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}, t\right)$;

б) $\vec{r}(t)=(2-2t, 3+t, 2t)$;

в) $\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$;

г) $\vec{r}(t)=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$;

д) $\vec{r}(t)=\left(\frac{1}{2}e^{2t}+3, 2e^t, \frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}t}+1\right)$.

Решение. а) Параметр s называется натуральным, если длина дуги между точками $M(s_0)$ и $M(s_1)$ равна $|s_1-s_0|$. Для решения задачи необходимо найти длину дуги между начальной точкой $M(t_0)$ и произвольной точкой $M(t)$, затем выразить t через s и заменить параметр t на параметр s в параметрическом представлении $\vec{r}(t)$ кривой. Пусть $t_0=0$. $\vec{r}'(t)=(t, \sqrt{2}\sqrt{t}, 1)$, $|\vec{r}'(t)|=$ $=\sqrt{t^2+2t+1}=|t+1|$. Так как $t\geqslant 0$, то $|\vec{r}'(t)|=t+1$. Отсюда $s=\int\limits_0^t(t+1)\,dt=\frac{1}{2}t^2+t$. Выразим t через s. $t^2+2t-2s=0$, $t_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+2s}$, $t\geqslant 0$, отсюда $t=\sqrt{1+2s}-1$. Поэтому натуральная параметризация кривой имеет вид:

$$\vec{r}(s)=\left(\frac{(\sqrt{1+2s}-1)^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{1+2s}-1)^{\frac{3}{2}}, \sqrt{1+2s}-1\right).$$

639. Доказать, что параметризация кривой $\vec{r}(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 t, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 t, \frac{1}{2}\sin 2t\right)$ является натуральной.

§ 26. СОПРОВОЖДАЮЩИЙ ТРЕХГРАННИК КРИВОЙ. РЕПЕР ФРЕНЕ

Литература [2], § 52.

640. Дана параметризация $\vec{r}(t)$ кривой. Найти уравнения нормальной α и соприкасающейся β плоскостей при $t=t_0$:

а) $\vec{r}(t)=(e^t, e^{2t}, e^{4t})$, $t_0=0$;

б) $\vec{r}(t)=(t^3, t^2+1, t-1)$, $t_0=0$;

в) $\vec{r}(t)=(a\sin t, a\cos t, bt)$, $t_0=0$;

г) $\vec{r}(t)=(\sin t, \cos 2t, \sin 3t)$, $t_0=\pi$;

д) $\vec{r}(t)=(e^t, e^t\cos t, e^t\sin t)$, $t_0=0$;

е) $\vec{r}(t)=(\ln t, \ln(t^2), (\ln t)^2)$, $t_0=1$;

ж) $\vec{r}(t)=(\sqrt{t+1}, \sqrt[3]{t^2+1}, \sqrt{t+4})$, $t_0=0$;

з) $\vec{r}(t)=(\ln\cos t, \ln(\sin t+1), 2t)$, $t_0=0$;

и) $\vec{r}(t)=(e^{\ln t^2}, e^{2\ln\sqrt{t}}, e^{3\ln\sqrt[3]{t^4}})$, $t_0=1$;

к) $\vec{r}(t)=\left(\operatorname{tg} t^2, \operatorname{ctg}\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \cos 2t\right)$, $t_0=0$.

Р е ш е н и е. а) Если $\vec{r}(t)$ — параметризация кривой, то соприкасающаяся плоскость содержит векторы $\vec{r}'(t)$ и $\vec{r}''(t)$. Поэтому она определена точкой $\vec{r}(t_0)$ и двумя параллельными ей векторами $\vec{r}'(t_0)$ и $\vec{r}''(t_0)$. Определим $\vec{r}(t_0)$, $\vec{r}'(t_0)$ и $\vec{r}''(t_0)$: $\vec{r}(0)=(1, 1, 1)$, $\vec{r}'(t)=(e^t, 2e^{2t}, 4e^{4t})$, $\vec{r}'(0)=(1, 2, 4)$, $\vec{r}''(t)=(e^t, 4e^{2t}, 16e^{4t})$, $\vec{r}''(0)=(1, 4, 16)$. Используя формулу для определения уравнения плоскости по точке и двум компланарным векторам, получим:

$$\beta: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}=0, \quad \beta: 8x-6y+z-3=0.$$

Нормальная плоскость перпендикулярна касательной, поэтому она определяется точкой с радиус-вектором $\vec{r}(t_0)$ и нормальным вектором $\vec{r}'(t_0)$. Используя формулу для определения уравнения плоскости по точке и нормальному вектору, получим, что уравнение нормальной плоскости α имеет вид: $x-1+2(y-1)+ +4(z-1)=0$, или $x+2y+4z-7=0$.

641. Точки кривой принадлежат пересечению двух поверхностей P_1 и P_2. Найти уравнения нормальной α и соприкасающейся β плоскостей в указанной точке M:

а) P_1: $xy=z$, P_2: $x-y=0$, $M(2, 2, 4)$;

б) P_1: $2x+y=0$, P_2: $x^2-y^2=z$, $M(0, 0, 0)$;

в) P_1: $xz=1$, P_2: $yz=3$, $M(1, 3, 1)$;

г) P_1: $y^3=x$, P_2: $x^2=z$, $M(1, 1, 1)$;

д) P_1: $x^2+z^2=a^2$, P_2: $y^2+z^2=b^2$, $M(a, b, 0)$.

642. Дана параметризация кривой $\vec{r}(t)=(t^2, t^3, t)$. Найти такую ее точку, соприкасающаяся плоскость которой проходит через точку $N(-1, 18, 0)$.

Р е ш е н и е. Найдем уравнение соприкасающейся плоскости $\beta(t)$ в произвольной точке $M(t)$ кривой. $\vec{r}'(t)=(2t, 3t^2, 1)$, $\vec{r}''(t)= =(2, 6t, 0)$.

$$\beta(t): \begin{vmatrix} x-t^2 & y-t^3 & z-t \\ 2t & 3t^2 & 1 \\ 2 & 6t & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда $\beta(t)$: $-3tx+y+3t^2z-t^3=0$. Определим такое значение параметра t, для которого плоскость $\beta(t)$ содержит точку $N(-1,\ 18,\ 0)$. Подставим координаты этой точки в уравнение плоскости $\beta(t)$, получим $t^3-3t-18=0$. Значение $t=3$ — корень этого уравнения. $t^3-3t-18=(t-3)(t^2+3t+6)$. Уравнение имеет один действительный корень $t=3$. Координаты искомой точки кривой равны (9, 27, 3).

643. Кривая задана своей параметризацией $\vec{r}(t)=(a\sin^2 t,\ a\sin t\cos t,\ a\cos t)$. Доказать, что все ее нормальные плоскости проходят через начало координат.

644. Пусть $\vec{r}(t)=(e^t,\ e^{2t},\ e^{3t})$ — параметризация кривой. Найти такую ее точку M, в которой соприкасающаяся плоскость проходит через точку $N(3,\ 6,\ 0)$.

645. Дана параметризация винтовой линии $\vec{r}(t)=(\cos t,\ \sin t,\ 2t)$. Найти координаты всех ее точек, в которых соприкасающаяся плоскость параллельна прямой $x=t-2$, $y=t+1$, $z=3$.

646. Дана вектор-функция, определяющая параметризацию кривой. Найти уравнение главной нормали и бинормали кривой в точке, соответствующей данному значению параметра:

а) $\vec{r}(t)=(\sin^2 t,\ 1-\cos t,\ 2t)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$;

б) $\vec{r}(t)=(\cos t,\ t+\cos 3t,\ \cos 5t)$, $t_0=0$;

в) $\vec{r}(t)=(t,\ \sin t,\ \cos t)$, $t_0=\pi$;

г) $\vec{r}(t)=\left(t,\ \frac{1}{2}t^2,\ \frac{1}{3}t^3\right)$, $t_0=1$;

д) $\vec{r}(t)=(\ln t,\ \ln(t^2),\ t)$, $t_0=1$;

е) $\vec{r}(t)=(e^t,\ e^{-t},\ e^{2t})$, $t_0=0$;

ж) $\vec{r}(t)=\left(\sin t-\frac{t}{2}\cos t,\ \cos t+\frac{t}{2}\sin t,\ t\right)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$.

Решение. а) Под главной нормалью кривой в точке M понимается прямая пересечения ее соприкасающейся и нормальной плоскостей, а под бинормалью — прямая, перпендикулярная соприкасающейся плоскости и проходящая через данную точку. Определим уравнения соприкасающейся и нормальной плоскостей в точке M:

$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1,\ 1,\ \pi)$, $\vec{r}'(t)=(\sin 2t,\ \sin t,\ 2)$, $\vec{r}''(t)=(2\cos 2t,\ \cos t,\ 0)$, $\vec{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,\ 1,\ 2)$, $\vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-2,\ 0,\ 0)$. Уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид β: $2y-z+\pi-2=0$. Уравнение нормальной плоскости можно представить в виде α: $y+2z-2\pi-1=0$. Отсюда получим общие уравнения главной нормали:

$$\begin{cases} 2y-z+\pi-2=0, \\ y+2z-2\pi-1=0, \end{cases}$$

или в параметрическом виде $x=t$, $y=1$, $z=\pi$. Вектор $\vec{n}(0, 2, -1)$ — нормальный вектор соприкасающейся плоскости, является направляющим вектором бинормали. Поэтому параметрические уравнения бинормали можно представить в виде $x=1$, $y=1+2t$, $z=\pi-t$.

647. Доказать, что все главные нормали кривой, определенной параметризацией $\vec{r}(t)=(\sin t, t, -\cos t)$, параллельны координатной плоскости xOz.

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что направляющий вектор главной нормали кривой в ее произвольной точке перпендикулярен оси Oy. Найдем уравнения нормальной и соприкасающейся плоскостей кривой в точке $M(t)$. $\vec{r}'(t)=(\cos t, 1, \sin t)$, $\vec{r}''(t)=(-\sin t, 0, \cos t)$. Уравнение соприкасающейся плоскости $\beta(t)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-\sin t & y-t & z+\cos t \\ \cos t & 1 & \sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{vmatrix}=0,$$

или $(\cos t)x-y+(\sin t)z+t=0$. Уравнение нормальной плоскости $\alpha(t)$ можно представить в виде $\cos t(x-\sin t)+(y-t)+\sin t(z+\cos t)=0$, или $(\cos t)x+y+(\sin t)z-t=0$. Главная нормаль кривой в точке $M(t)$ является прямой пересечения плоскостей $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Поэтому ее направляющий вектор $\vec{p}(t)$ коллинеарен векторному произведению $[\vec{n}_1(t)\vec{n}_2(t)]$ нормальных векторов $\vec{n}_1(t)$ и $\vec{n}_2(t)$ плоскостей $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. $\vec{n}_1(t)=(\cos t, 1, \sin t)$, $\vec{n}_2(t)=(\cos t, -1, \sin t)$, $[\vec{n}_1(t)\vec{n}_2(t)]=(2\sin t, 0, -2\cos t)$. Поэтому можно считать, что направляющий вектор главной нормали имеет координаты $\vec{p}(t)=(\sin t, 0, -\cos t)$. Его скалярное произведение с вектором $\vec{j}(0, 1, 0)$ равно нулю. Поэтому в любой точке кривой главная нормаль параллельна плоскости Oxz.

648. Доказать, что главные нормали винтовой линии (см. задачу 632) перпендикулярны оси Oz.

649. Доказать, что все бинормали кривой, определенной параметризацией $\vec{r}(t)=\left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$, образуют постоянный угол с вектором $\vec{a}(1, 0, 1)$. Найти этот угол.

650. Доказать, что все бинормали кривой, определенной параметризацией $\vec{r}(t)=(\cos t+t\sin t, \sin t-t\cos t, e^{-\frac{t^2}{2}})$, пересекают ось Oz.

651. На бинормалях винтовой линии (см. задачу 632) от точек линии отложены отрезки равной длины. Доказать, что их концы лежат на другой винтовой линии.

652. Найти векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$ сопровождающего репера Френе кривой, определенной параметризацией $\vec{r}(t)$, в точке, соответствующей параметру t_0:

а) $\vec{r}(t)=\left(a(t+\sin t),\ a(1-\cos t),\ 4a\cos\frac{t}{2}\right)$, $t_0=\pi$, $a>0$;

б) $\vec{r}(t)=(a\sin t,\ a\cos t,\ c)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $a>0$;

в) $\vec{r}(t)=(t^2,\ t,\ t-2)$, $t_0=0$;

г) $\vec{r}(t)=(\cos^3 t,\ \sin^3 t,\ \sin t)$, $t_0=0$;

д) $\vec{r}(t)=(e^t,\ \sqrt{2}t,\ e^{-t})$, $t_0=0$;

е) $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$, $t_0=\frac{\pi}{2}$;

ж) $\vec{r}(t)=(t\cos t,\ t\sin t,\ at)$, $t_0=0$;

з) $\vec{r}(t)=\left(t,\ \frac{1}{t},\ \frac{1}{t^2}\right)$, $t_0=1$;

и) $\vec{r}(t)=(a\operatorname{ch} t,\ a\operatorname{sh} t,\ at)$, $t_0=1$, $a>0$.

Решение. а) Векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$ представляют собой единичные векторы соответственно касательной, главной нормали и бинормали кривой. При этом

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds},\quad \vec{\nu}=\frac{1}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\quad \vec{\beta}=[\vec{\tau}\vec{\nu}],$$

где s — натуральный параметр кривой. Так как $\frac{ds}{dt}=|\vec{r}_t'|$, то

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{\vec{r}_t'}{|\vec{r}_t'|}.$$

Для вычисления вектора $\vec{\nu}$ представим вектор $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ в виде

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)=\frac{d}{dt}(\vec{\tau})\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\vec{r}_t'|}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Определим $\vec{r}_t'\cdot\vec{r}_t'=\left(a(1+\cos t),\ a\sin t,\ -2a\sin\frac{t}{2}\right)$.

$$|\vec{r}_t'|=\sqrt{a^2(1+\cos t)^2+a^2\sin^2 t+4a^2\sin^2\frac{t}{2}}=2a.$$

Поэтому вектор $\vec{\tau}(t)$ имеет координаты $\left(\frac{1}{2}(1+\cos t),\ \frac{1}{2}\sin t,\ -\sin\frac{t}{2}\right)$. При $t=\pi$ получим $\vec{\tau}(\pi)=(0,\ 0,\ -1)$. Найдем $\vec{\tau}_t'$:

$$\vec{\tau}_t'=\left(-\frac{1}{2}\sin t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{1}{|\vec{r}_t'|}\cdot\vec{\tau}_t'=\frac{1}{2a}\left(-\frac{1}{2}\sin t,\ \frac{1}{2}\cos t,\ -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right),$$

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|=\frac{1}{4a}\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}.$$

Так как $\vec{\nu}=\frac{1}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, то

$$\vec{\nu}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}}\left(-\sin t,\ \cos t,\ -\cos\frac{t}{2}\right).$$

Если $t=\pi$, то $\vec{\nu}(\pi)=(0,\ -1,\ 0)$. Вектор $\vec{\beta}(t)$ найдем как векторное произведение векторов $\vec{\tau}(t)$ и $\vec{\nu}(t)$. Отсюда $\vec{\beta}(\pi)=(-1,\ 0,\ 0)$.

§ 27. КРИВИЗНА И КРУЧЕНИЕ КРИВОЙ. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ

Литература: [2], § 52, 53.

653. Найти кривизну $k(t)$ и кручение $\varkappa(t)$ кривой, заданной вектор-функцией $\vec{r}(t)$:

а) $\vec{r}(t)=(t\cos t,\ t\sin t,\ at)$;

б) $\vec{r}(t)=(t^2,\ t,\ 2t-1)$;

в) $\vec{r}(t)=(3t^2+5t,\ t^2-t,\ 2t)$;

г) $\vec{r}(t)=(3t-t^3,\ 3t^2,\ 3t+t^3)$;

д) $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ b)$, $a>0$;

е) $\vec{r}(t)=(e^t,\ \sqrt{2}t,\ e^{-t})$;

ж) $\vec{r}(t)=(t+\ln t,\ t,\ \ln t)$;

з) $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$, $a>0$;

и) $\vec{r}(t)=\left(t,\ \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}t^2\right)$;

к) $\vec{r}(t)=\left(\frac{1}{2}t^2,\ \frac{2\sqrt{2}}{5}\sqrt{t^5},\ \frac{1}{3}t^3\right)$;

л) $\vec{r}(t)=(a\operatorname{ch} t,\ a\operatorname{sh} t,\ at)$, $a>0$;

м) $\vec{r}(t)=\left(at,\ a\sqrt{2}\ln t,\ \frac{a}{t}\right)$.

Решение. а) Формулы для вычисления кривизны $k(t)$ и кручения $\varkappa(t)$ кривой, заданной параметризацией $\vec{r}(t)$, имеют вид:

$$k(t)=\frac{|[\vec{r}'\vec{r}'']|}{|\vec{r}|^3},\quad \varkappa(t)=\frac{(\vec{r}',\ \vec{r}'',\ \vec{r}''')}{|[\vec{r}'\vec{r}'']|^2}.$$

Найдем векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{r}'''$, векторное $[\vec{r}'\,\vec{r}'']$ и смешанное $(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')$ произведения:

$\vec{r}' = (\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t,\ a)$,

$\vec{r}'' = (-2\sin t - t\cos t,\ 2\cos t - t\sin t,\ 0)$,

$\vec{r}''' = (-3\cos t + t\sin t,\ -3\sin t - t\cos t,\ 0)$,

$|\vec{r}'| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + a^2} = \sqrt{t^2 + a^2 + 1}$,

$$[\vec{r}'\,\vec{r}''] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t - t\sin t & \sin t + t\cos t & a \\ -2\sin t - t\cos t & 2\cos t - t\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-a(2\cos t - t\sin t),\ -a(2\sin t + t\cos t),\ (2 + t^2)),$$

$$|[\vec{r}'\,\vec{r}'']| = \sqrt{t^4 + (a^2+4)t^2 + 4a^2 + 4},\quad (\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''') =$$

$$= ([\vec{r}'\,\vec{r}''])\cdot\vec{r}'''_{t^3} = -a(2\cos t - t\sin t)(-3\cos t + t\sin t) -$$

$$-a(2\sin t + t\cos t)(-3\sin t - t\cos t) = a(t^2 + 6).$$

Таким образом, получим:

$$k(t) = \frac{\sqrt{t^4 + (a^2+4)t^2 + 4a^2 + 4}}{(t^2 + a^2 + 1)\sqrt{t^2 + a^2 + 1}};\quad \varkappa(t) = \frac{a(t^2+6)}{t^4 + (a^2+4)t^2 + 4a^2 + 4}.$$

654. Найти кривизну и кручение кривой, заданной параметризацией $\vec{r}(t) = \left(t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 4\sin\frac{t}{2}\right)$ при $t = \pi$.

655. Кривая задана своей натуральной параметризацией $\vec{r}(s)$. Доказать, что:

а) $\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = -k^2$;

б) $\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0$;

в) $\left|\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right|^2 = k^4 + k^2\varkappa^2 + \left|\frac{dk}{ds}\right|^2$;

г) $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = k\frac{dk}{ds}$.

Решение. а) Воспользуемся формулами Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu},\quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \varkappa\vec{\beta},\quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = -\varkappa\vec{\nu}.$$

Так как $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, то первую формулу Френе можно записать в виде $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = k\vec{\nu}$. Продифференцируем это равенство по s: $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds}\vec{\nu} + k\frac{d\vec{\nu}}{ds}$. Используя вторую формулу Френе, заменим

$\frac{d\vec{\nu}}{ds}$ на $-k\vec{\tau}+\varkappa\vec{\beta}$. Получим $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\frac{dk}{ds}\vec{\nu}-k^2\vec{\tau}+\varkappa k\vec{\beta}$. Это равенство умножим скалярно на $\vec{\tau}$. Так как векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$ взаимно ортогональны, то $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\cdot\vec{\tau}=-k^2\vec{\tau}^2$. Как уже отмечалось, $|\vec{\tau}|=1$, $\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$. Поэтому $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}=-k^2$.

656. Доказать, что формулы Френе кривой можно записать в виде

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=[\vec{\omega}\,\vec{\tau}],\quad \frac{d\vec{\nu}}{ds}=[\vec{\omega}\,\vec{\nu}],\quad \frac{d\vec{\beta}}{ds}=[\vec{\omega}\,\vec{\beta}],$$

где $\vec{\omega}=\varkappa\vec{\tau}+k\vec{\beta}$ (вектор Дарбу).

657. Доказать, что вектор Дарбу $\vec{\omega}$ (см. задачу 656) удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\vec{\omega}}{ds}=\frac{d\varkappa}{ds}\vec{\tau}+\frac{dk}{ds}\vec{\beta}.$$

658. Пусть отношение $\lambda=k:\varkappa$ кривизны и кручения кривой постоянно. Доказать, что вектор $\vec{p}=\vec{\tau}+\lambda\vec{\beta}$ не меняется вдоль кривой. Доказать, что угол между векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{p}$ постоянен. Найти этот угол.

659. Доказать, что кривая в том и только в том случае является прямой линией или ее частью, когда $k\equiv 0$.

660. Доказать утверждение: для того чтобы кривая была плоской, необходимо и достаточно, чтобы кручение кривой тождественно равнялось нулю. Доказать, что при этом плоскость, которой принадлежит кривая, является ее соприкасающейся плоскостью.

661. Дана параметризация кривой $\vec{r}(t)$. Доказать, что кривая плоская. Найти уравнение плоскости, содержащей кривую:

а) $\vec{r}(t)=(2t,\ 3t+4,\ t^2-3)$;

б) $\vec{r}(t)=(t^2-1,\ t^3,\ t^2+2)$;

в) $\vec{r}(t)=(\ln t,\ \ln t^2,\ \ln t^3)$;

г) $\vec{r}(t)=\left(\frac{1}{1-t},\ \frac{1}{1-t^2},\ \frac{1}{1+t}\right)$;

д) $\vec{r}(t)=(e^t,\ -e^t+2e^{-t},\ e^{-t}+1)$;

е) $\vec{r}(t)=(\sin t,\ 2\sin t+1,\ \operatorname{tg} t)$;

ж) $\vec{r}(t)=(2\operatorname{ctg} t,\ -\operatorname{tg} t,\ 4\operatorname{ctg} 2t)$;

з) $\vec{r}(t)=(a_1t^2+b_1t+c_1,\ a_2t^2+b_2t+c_2,\ a_3t^2+b_3t+c_3)$, где $\sqrt{a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+a_3^2+b_3^2}\neq 0$.

662. Параметризация кривой имеет вид: $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ f(t))$. Найти функцию $f(t)$ при условии, что кривая плоская.

663. Все соприкасающиеся плоскости кривой содержат постоянный вектор $\vec{m}$. Доказать, что кривая плоская.

Решение. Достаточно показать, что кручение $\varkappa$ данной кривой тождественно равно нулю (см. задачу 660). Векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ репера Френе образуют базис соприкасающейся плоскости. Отсюда $\vec{m}=p\vec{\tau}+q\vec{\nu}$. Продифференцируем это равенство по s. Так как вектор $\vec{m}$ постоянен вдоль кривой, то $\frac{d\vec{m}}{ds}=\vec{0}$. Поэтому

$$\frac{dp}{ds}\vec{\tau}+\frac{dq}{ds}\vec{\nu}+p\frac{d\vec{\tau}}{ds}+q\frac{d\vec{\nu}}{ds}=\vec{0}.$$

Воспользуемся первой и второй формулами Френе $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu}$, $\frac{d\vec{\nu}}{ds}=-k\vec{\tau}+\varkappa\vec{\beta}$, получим:

$$\left(\frac{dp}{ds}-qk\right)\vec{\tau}+\left(\frac{dq}{ds}+pk\right)\vec{\nu}+q\varkappa\vec{\beta}=\vec{0}.$$

Векторы $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$ линейно независимы, отсюда $q\varkappa=0$. Если $\varkappa=0$, то утверждение доказано. Пусть $q=0$. Тогда $\vec{m}=p\vec{\tau}$. Так как $\vec{m}$ не меняется вдоль кривой и $|\vec{\tau}|=1$, то вектор $\vec{\tau}$ также постоянен вдоль кривой. Так как $\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$, то $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\vec{0}$. Кривая является прямой линией или ее частью, т. е. заведомо плоской.

664. Все нормальные плоскости кривой содержат постоянный ненулевой вектор $\vec{m}$. Доказать, что кривая плоская.

665. Все соприкасающиеся плоскости кривой проходят через одну точку. Доказать, что кривая плоская.

666. Все соприкасающиеся плоскости кривой перпендикулярны фиксированной прямой. Доказать, что кривая плоская.

667. Доказать утверждение, обратное утверждению задачи 658: если существует вектор $\vec{a}$, образующий постоянный угол с касательной кривой, то отношение кривизны и кручения этой кривой постоянно.

668. Найти натуральные уравнения кривой, если дана ее параметризация $\vec{r}(t)$:

а) $\vec{r}(t)=\left(at,\ a\sqrt{2}\ln t,\ \frac{a}{t}\right)$, $a>0$;

б) $\vec{r}(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$;

в) $\vec{r}(t)=\left(\frac{t^2}{2},\ \frac{2t^3}{3},\ \frac{t^4}{2}\right)$, $t\geqslant 0$;

г) $\vec{r}(t)=(a\,\mathrm{ch}\,t,\ a\,\mathrm{sh}\,t,\ at)$, $a>0$.

Решение. а) Под натуральными уравнениями кривой понимаются уравнения вида $k=k(s)$, $\varkappa=\varkappa(s)$, где k — кривизна, $\varkappa$ — кручение, а s — натуральный параметр кривой. Для решения необходимо определить кривизну $k(t)$, кручение $\varkappa(t)$ кривой, выразить параметр t через натуральный параметр s и заменить t на s в найденных соотношениях для $k(t)$ и $\varkappa(t)$.

$$\vec{r}'(t)=\left(a,\ \frac{a\sqrt{2}}{t},\ -\frac{a}{t^2}\right),\ \vec{r}''(t)=\left(0,\ \frac{a\sqrt{2}}{t^2},\ 2\frac{a}{t^3}\right),$$

$$\vec{r}'''(t)=\left(0,\frac{2a\sqrt{2}}{t^3},\ -6\frac{a}{t^4}\right),\ |\vec{r}'|=a\sqrt{1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}=\frac{a(t^2+1)}{t^2},$$

$$[\vec{r}'\,\vec{r}'']=a^2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{t^2} & \frac{2}{t^3} \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}a^2}{t^4}\vec{i}-\frac{2a^2}{t^3}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}a^2}{t^2}\vec{k},$$

$$|[\vec{r}'\,\vec{r}'']|=\frac{\sqrt{2}}{t^4}a^2(t^2+1),\ (\vec{r}',\ \vec{r}'',\ \vec{r}''')=[\vec{r}'\,\vec{r}'']\vec{r}'''=\frac{2\sqrt{2}a^3}{t^6}.$$

Так как $k=\frac{|[\vec{r}'\,\vec{r}'']|}{|\vec{r}'|^3}$, $\varkappa=\frac{(\vec{r}',\ \vec{r}'',\ \vec{r}''')}{|[\vec{r}'\,\vec{r}'']|^2}$, то $k=\varkappa=\frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}$.

В качестве начальной примем точку с параметром $t=1$. Тогда

$$S=\int_1^t\frac{a(t^2+1)}{t^2}\,dt=a\left(t-\frac{1}{t}\right).$$

Отсюда $at^2-st-a=0$, или $t=\frac{s\sqrt{s^2+4a^2}}{2a}$.

Поэтому натуральные уравнения кривой имеют вид:

$$k(s)=\varkappa(s)=\frac{\sqrt{2}a(s+\sqrt{s^2+4a^2})^2}{(s^2+4a^2+s\sqrt{s^2+4a^2})^2}.$$

Глава V.

ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 28. ПОНЯТИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Литература: [2], § 54, 55; [3], разд. 5, § 15.

669. Выяснить, определяет ли вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ погружение множества $D \subset R^2$ в евклидово пространство E_3. Найти класс погружения:

а) $\vec{r}(u, v) = (u+v,\ u-v,\ u^3-v^3)$, $D = R^2$;

б) $\vec{r}(u, v) = (u+v,\ |u-v|,\ u^3-v^3)$, $D = R^2$;

в) $\vec{r}(u, v) = (u^2v^2,\ \sqrt[3]{u^2},\ v^2+1)$, $D = R^2$;

г) $\vec{r}(u, v) = (u^2v^2,\ u^2,\ v^2)$, $D = R^2$;

д) $\vec{r}(u, v) = (u^2v^2,\ u^2,\ v^2)$, $D = \{(u, v) \mid u > 0,\ v > 0\}$;

е) $\vec{r}(u, v) = (\sin^3 u,\ u^2v+uv+u,\ v+1)$, $D = \left\{(u, v) \mid |u| < \frac{\pi}{2}\right\}$;

ж) $\vec{r}(u, v) = (\sin^3 u,\ u^2v+uv+u,\ v+1)$, $D = \{(u, v) \mid 0 < u < 1,\ v > 1\}$;

з) $\vec{r}(u, v) = (e^{u^2},\ u^2v,\ \sin uv)$, $D = \{(u, v) \mid u > 0\}$;

и) $\vec{r}(u, v) = (u,\ v,\ |u^2-v^2|)$, $D = \{(u, v) \mid -3 < u < 3,\ -9 < v < 9\}$;

к) $\vec{r}(u, v) = (e^{(u-2)^2},\ \sqrt[3]{(v-1)^2},\ uv)$, $D = \{(u, v) \mid -2 < u < 2,\ -2 < v < 2\}$.

Решение. а) Вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ определяет C^p — погружение множества D в E_3 тогда и только тогда, когда вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ принадлежит классу C^p, т. е. функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют непрерывные частные производные до p-го порядка включительно и векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны для любых $u, v \in D$, поэтому ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

равен 2 для всех (u, v) из D. Функции $x(u, v) = u+v$, $y(u, v) = u-v$, $z(u, v) = u^3-v^3$ имеют непрерывные частные производные любого порядка, и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3u^2 \\ 1 & -1 & -3v^2 \end{pmatrix}$$

равен 2. Следовательно, вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(u+v, u-v, u^3-v^3)$ определяет погружение класса C^∞ данного множества $D=R^2$ в E_3.

е) Вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(\sin^3 u, u^2v+uv+u, v+1)$ принадлежит классу C^∞. Частные производные $\vec{r}_u=(3\sin^2 u \cos u, 2uv+v+1, 0)$, $\vec{r}_v=(0, u^2+u, 1)$ коллинеарны в точке $(0, -1)$, принадлежащей D. Действительно, $\vec{r}_u(0, -1)=(0, 0, 0)=\vec{0}$, $\vec{r}_v(0, -1)=(0, 0, 1)$. Следовательно, условие 2 не выполнено и данная вектор-функция не определяет погружения множества D.

670. Выяснить, существуют ли в R^2 открытые множества, для которых вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ из задачи 669 (б, в, г, е, и) определяет погружения.

671. Доказать, что погружения f и g областей D и $\tilde{D}$, определенные вектор-функциями $\vec{f}(u, v)$ и $\vec{g}(u, v)$, эквивалентны:

а) $\vec{f}(u, v)=(u, \sqrt{u^2-1}, v)$, $D=\{(u, v) \mid 1<u<\infty, -\infty<v<\infty\}$;
$\vec{g}(\tilde{u}, \tilde{v})=(\operatorname{ch}\tilde{u}, \operatorname{sh}\tilde{u}, \lambda\tilde{v})$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v}) \mid 0<\tilde{u}<\infty, -\infty<\tilde{v}<\infty\}$;

б) $\vec{f}(u, v)=(a\cos u, v, b\sin u)$, $D=\{(u, v) \mid 0\leqslant u<2\pi, 0\leqslant v<\infty\}$;
$\vec{g}(\tilde{u}, \tilde{v})=\left(a\cos\frac{\tilde{u}}{2}, \tilde{v}^2, b\sin\frac{\tilde{u}}{2}\right)$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v}) \mid 0\leqslant\tilde{u}\leqslant 4\pi, -\infty\leqslant\tilde{v}<\infty\}$;

в) $\vec{f}(u, v)=(u, \sqrt{1-u^2}, -v)$, $D=\{(u, v) \mid -1\leqslant u\leqslant 1, 0<v<\infty\}$;
$\vec{g}(\tilde{u}, \tilde{v})=\left(\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, \frac{1}{\tilde{v}}\right)$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v}) \mid 0\leqslant\tilde{u}\leqslant\pi, -\infty<\tilde{v}<0\}$;

г) $\vec{f}(u, v)=\left(a\frac{1-u^2}{1+u^2}, 2b\frac{u}{1+u^2}, \operatorname{tg} v\right)$, $D=\left\{(u, v) \mid -\infty<u<\infty, -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}\right\}$;
$\vec{g}(\tilde{u}, \tilde{v})=(a\cos\tilde{u}, b\sin\tilde{u}, \tilde{v})$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v}) \mid -\pi<\tilde{u}<\pi, -\infty<\tilde{v}<\infty\}$;

д) $\vec{f}(u, v)=(u+v, u-v, 2u-3v)$, $D=\{(u, v) \mid -\infty<u<\infty, -\infty<v<\infty\}$;
$\vec{g}(\tilde{u}, \tilde{v})=\left(\ln\tilde{u}\tilde{v}, \ln\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}, \ln\frac{\tilde{u}^2}{\tilde{v}^3}\right)$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v}) \mid 0<\tilde{u}<\infty, 0<\tilde{v}<\infty\}$.

Р е ш е н и е. а) Два погружения эквивалентны в том и только в том случае, когда существует C^p — диффеоморфизм φ между областями D и $\tilde{D}$, такой, что $f=g\circ\varphi$. Следовательно, для решения задачи нам достаточно построить диффеоморфизм φ: $\tilde{u}=\varphi_1(u, v)$, $\tilde{v}=\varphi_2(u, v)$, при котором $\vec{f}(u, v)=\vec{g}(\tilde{u}(u, v), \tilde{v}(u, v))$. Искомый диффеоморфизм (см. решение задачи 610, *а*) можно задать следующим образом. Положим $u=\operatorname{ch}\tilde{u}$, $v=\lambda\tilde{v}$, $\lambda\neq 0$, тогда $\sqrt{u^2-1}=\operatorname{sh}\tilde{u}$. Все функции бесконечно дифференцируемы, обратимы, следовательно, задают диффеоморфизм между D и $\tilde{D}$. Погружения f и g эквивалентны.

672. Среди погружений, определенных вектор-функциями $\vec{r}$ и $\vec{\rho}$, найти эквивалентные:

а) $\vec{r}(u, v)=(\cos u, \sin u, av)$, $D=\{(u, v)|0<u<2\pi, -\infty<v<\infty\}$;
$\vec{\rho}(\tilde{u}, \tilde{v})=(\cos 2\tilde{u}, \sin 2\tilde{u}, \ln \tilde{v})$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v})|0<\tilde{u}<2\pi, 0<\tilde{v}<\infty\}$;

б) $\vec{r}(u, v)=\left(uv, v\sqrt{1-u^2}, \frac{uv}{\sqrt{1-u^2}}\right)$, $D=\{(u, v)|-1<u<1, 0<v<\infty\}$;
$\vec{\rho}(\tilde{u}, \tilde{v})=(\tilde{v}\cos\tilde{u}, \tilde{v}\sin\tilde{u}, \tilde{v}\operatorname{ctg}\tilde{u})$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v})|0<\tilde{u}<\pi, 0<\tilde{v}<\infty\}$;

в) $\vec{r}(u, v)=(uv+\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}, v\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-v^2}, uv)$, $D=\{(u, v)|-1<u<1, -1<v<1\}$;
$\vec{\rho}(\tilde{u}, \tilde{v})=(\sin(\tilde{u}+\tilde{v}), \cos(\tilde{u}+\tilde{v}), \sin\tilde{u}\cos\tilde{v})$,
$\tilde{D}=\left\{(\tilde{u}, \tilde{v})|-\frac{\pi}{2}<\tilde{u}<\frac{\pi}{2}, 0<\tilde{v}<\pi\right\}$;

г) $\vec{r}(u, v)=(u, v, u-v)$, $D=\{(u, v)|-\infty<u<1, -\infty<v<2\}$;
$\vec{\rho}(\tilde{u}, \tilde{v})=\left(\ln\tilde{u}, \ln\tilde{v}, \ln\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)$, $\tilde{D}=\{(\tilde{u}, \tilde{v})|0<\tilde{u}<e, 0<\tilde{v}<e^2\}$;

д) $\vec{r}(u, v)=(u, u+v, v)$, $D=\{(u, v)|-1<u<1, -2<v<2\}$,
$\vec{\rho}(\tilde{u}, \tilde{v})=(\ln\tilde{u}, \ln\tilde{u}\tilde{v}, \ln\tilde{v})$, $\tilde{D}=\left\{(\tilde{u}, \tilde{v})/\frac{1}{e}<\tilde{u}<e, \frac{1}{e^2}<\tilde{v}<e^2\right\}$.

673. Доказать, что вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ определяют вложения множества $D\subset R^2$ в E_3:

а) $\vec{r}(u, v)=(3u+2v, u-v, 3u^2-2v^2)$, $D=R^2$;

б) $\vec{r}(u, v)=(u^2+v, v^2+u, u^3)$, $D=R^2$;

в) $\vec{r}(u, v)=(2u+3v, u-v, u^2+v^2)$, $D=R^2$;

г) $\vec{r}(u, v)=(u, v, F(u, v))$, где $F(u, v)$ — дифференцируемая p раз функция на R^2, $D=R^2$, $p\geqslant 1$;

д) $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, v)$, $D=R^2$;

е) $\vec{r}(u, v)=(a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\sin v)$,
$D=\{(u, v)|0<u<\pi, 0<v<\pi\}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$;

ж) $\vec{r}(u, v)=\left(\frac{a}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right), \frac{b}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right), v\right)$, $D=\{(u, v)|u>0, v>0\}$;

з) $\vec{r}(u, v)=(av\cos u, bv\sin u, cv)$, $D=\{(u, v)|0<u<2\pi, v>0\}$.

Р е ш е н и е. б) Вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(u^2+v, v^2+u, u^3)$ принадлежит классу C^∞ и векторы $\vec{r}_u=(2u, 1, 3u^2)$, $\vec{r}_v=(1, 2v, 0)$ не коллинеарны ни для каких u, v. Следовательно, вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ определяет C^∞ погружение. Погружение будет вложением, если оно является гомеоморфизмом между множеством D и его образом. Из равенства $\vec{r}(u, v)=\vec{r}(u_1, v_1)$, т. е. $(u^2+v, v^2+u, u^3)=(u_1^2+v_1, v_1^2+u_1, u_1^3)$, следует, что $u=u_1$, $v=v_1$. Поэтому вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(u^2+v, v^2+u, u^3)$ определяет вложение $D=R^2$ в E_3.

д) Вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, v)$ принадлежит классу C^∞, векторы $\vec{r}_u=(\cos v, \sin v, 0)$ и $\vec{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$ не коллинеарны ни для каких u, v из области $D=R^2$. Из равенства $\vec{r}(u, v)=\vec{r}(u_1, v_1)$ следует, что $u\cos v=u_1\cos v_1$, $u\sin v=$ $=u_1\sin v_1$, $v=v_1$. Подставляя третье равенство в первые два, получаем:

$$u\cos v=u_1\cos v,$$
$$u\sin v=u_1\sin v.$$

При $v\neq\pi k$, $\sin v\neq 0$ из последнего равенства следует, что $u=u_1$. Если $v=\pi k$, то $\cos v\neq 0$ и из первого равенства получим $u=u_1$. Значит, вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ взаимно однозначна и определяет вложение $D=R^2$ в E_3.

674. Выяснить, какие из вектор-функций задачи 669 определяют вложения.

Решение. ж) Погружение f: $D\to E_3$ является вложением, если оно представляет собой гомеоморфизм множеств D и $f(D)$. Пусть $\vec{r}(u, v)=\vec{r}(u_1, v_1)$, где (u, v) и (u_1, v_1) из $D=\{(u, v)|0<u<1, v>1\}$. Это значит, что

$$\sin^3 u=\sin^3 u_1,$$
$$u^2v+uv+u=u_1^2v_1+u_1v_1+u_1,$$
$$v+1=v_1+1.$$

Поскольку в области D $|u|<1$, а функция $\sin^3 u$ обратимая, из первого уравнения следует, что $u=u_1$. Тогда из третьего уравнения получим, что $v=v_1$. Значит, данное погружение устанавливает взаимно однозначное соответствие между D и $f(D)$ и является вложением.

675. Найти открытое можество D из R^2, содержащее данную точку T, для которого вектор-функция $\vec{r}(u, v)$ определяет вложение:

а) $\vec{r}(u, v)=(u, v, \sqrt{a^2-u^2-v^2})$, $T=(0, 0)$;

б) $\vec{r}(u, v)=\left(u, v, \sqrt{c^2-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}\right)$, $T=(0, 0)$;

в) $\vec{r}(u, v)=(\sin u\sin v, u(v-\pi)^2, v^3)$, $T=\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\vec{r}(u, v)=(\ln(a-u), \sqrt{u}\sin v, a)$, $a>0$, $T\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Р е ш е н и е. г) Вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(\ln(a-u), \sqrt{u}\sin v, a)$ принадлежит классу C^∞ для $0<u<a$. Для таких u матрица

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a-u} & \dfrac{\sin v}{2\sqrt{u}} & 0 \\ 0 & \sqrt{u}\cos v & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2, если $v \neq \frac{\pi}{2} k$. Следовательно, $\vec{r}(u, v)=(\ln(a-u), \sqrt{u}\sin v, a)$ определяет погружение множества $D=\left\{(u, v) \mid 0<u<a, -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}\right\}$. Если $\vec{r}(u, v)=\vec{r}(u_1, v_1)$, т. е. $\ln(a-u)=\ln(a-u_1)$, $\sqrt{u}\sin v=\sqrt{u_1}\sin v_1$, то $u=u_1$, $v=v_1$ для $(u, v)\in D$ и $(u_1, v_1)\in D$. Следовательно, $\vec{r}(u, v)$ определяет вложение множества D в R^2.

676. Найти открытые множества $D\subset R^2$, для которых вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ определяют вложения:

а) $\vec{r}(u, v)=(|u+a|, |v-b|, uv)$, где $a>0$, $b>0$;

б) $\vec{r}(u, v)=(\sqrt[4]{u^9}, \sqrt[4]{(v-3)^7}, u+v)$;

в) $\vec{r}(u, v)=(|\sin u|, |\cos v|, uv)$;

г) $\vec{r}(u, v)=\left(u, v, \left|\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{9}\right|\right)$.

677. Доказать, что вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ задачи 673 определяют гладкую поверхность.

Р е ш е н и е. б) Как было показано в решении задачи 673, *б*, вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(u^2+v, v^2+u, u^3)$ класса C^∞ и определяет вложение R^2 в E_3. Открытый круг гомеоморфен евклидовой плоскости, которая в свою очередь гомеоморфна R^2 (см. задачу 545). Последний гомеоморфизм можно построить, выбрав декартову систему координат на евклидовой плоскости и сопоставляя каждой точке ее координаты. Чтобы доказать гомеоморфизм открытого круга и евклидовой плоскости, нужно рассмотреть композицию гомеоморфизмов: ψ и φ (рис. 71), где φ — проекция открытого круга на открытую полусферу, ограниченную этим кругом, ψ — центральная проекция из центра этой полусферы на

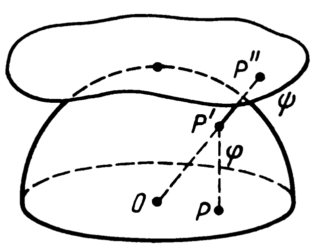


Рис. 71

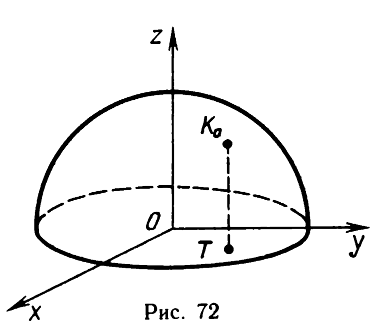


Рис. 72

касательную плоскость, параллельную плоскости ограничивающего круга. Если $\varphi(P)=P'$, $\psi(P')=P''$, то $\psi\cdot\varphi(P)=P''$. Если точка P'' имеет координаты u, v, то точке P сопоставляется точка (u, v) плоскости R^2. Следовательно, вектор-функция $\vec{r}(u, v)=(u^2+v, v^2+u, u^3)$ определяет гладкую поверхность.

678. Задать уравнениями и неравенствами поверхности из задачи 673.

Решение. б) Зададим уравнениями и неравенствами поверхность, определенную вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=(u^2+v, v^2+u, u^3)$. Пусть x, y, z — декартовы координаты произвольной точки этой поверхности. Тогда

$$\begin{cases} x=u^2+v, \\ y=v^2+u, \\ z=u^3. \end{cases}$$

Исключим u и v из системы. Из последнего равенства $u=\sqrt[3]{z}$. Подставляя это выражение в первые два соотношения, получим систему:

$$v=x-\sqrt[3]{z^2},$$
$$v^2=y-\sqrt[3]{z},$$

которая однозначно разрешима относительно v тогда и только тогда, когда $y-\sqrt[3]{z}\geqslant 0$ и $(x-\sqrt[3]{z^2})^2=y-\sqrt[3]{z}$. Следовательно, рассматриваемая поверхность может быть задана полученными уравнением и неравенством.

679. Задать уравнениями и неравенствами поверхности, определенные вектор-функциями:

а) $\vec{r}(u, v)=(u, v, \sqrt{1-u^2-2v^2})$;

б) $\vec{r}(u, v)=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$, где $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$, $0<\psi<2\pi$, $a>0$;

в) $\vec{r}(u, v)=(u+v, u-v, u^2+v^2)$;

г) $\vec{r}(u, v)=(u+v, u-v, u^2-v^2)$.

Проверить, задают ли $\vec{r}(u, v)$ гладкие поверхности.

680. Доказать, что следующие множества $M\subset E_3$ являются гладкими поверхностями. Найти определяющие их параметризации:

а) $M=S^2\setminus A=\{P(x, y, z)|x^2+y^2+z^2=R^2, (x, y, z)\neq(0, 0, R)\}$ — сфера без точки $A(0, 0, R)$;

б) $M=\{P(x, y, z)|x^2+y^2+z^2=R^2, z>0\}$ — полусфера радиуса R без граничных точек;

в) $M=\{P(x, y, z)|x^2+y^2=R^2, y\neq R\}$ — цилиндр без одной образующей;

г) $M=\{P(x, y, z) | x^2+y^2-z^2=0, y \neq z\}$ — часть конуса, расположенная над координатной плоскостью $z=0$, без одной образующей;

д) $M=\left\{P(x, y, z) \middle| \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, a \neq 0, b \neq 0\right\}$ — гиперболический параболоид;

е) $M=\left\{P(x, y, z) \middle| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0\right\}$ — эллиптический параболоид;

ж) $M=\left\{P \in E_3 \middle| P(x, y, z) \middle| \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, z>0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0\right\}$ — часть двуполостного гиперболоида, расположенная над координатной плоскостью $z=0$.

Р е ш е н и е. б) Докажем, что полусфера без граничных точек (в данном случае без точек полусферы, лежащих в координатной плоскости $z=0$) гомеоморфна открытому кругу (рис. 72)

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2<R^2. \end{cases}$$

Произвольной точке $K_0(x_0, y_0, 0)$ этого круга сопоставим точку $T=(x_0, y_0, \sqrt{R^2-x_0^2-y_0^2})$ данной полусферы M. Полученное соответствие взаимно однозначно и непрерывно. Обратное к нему также непрерывно. Полусферу M можно задать вектор-функцией класса C^∞: $\vec{r}(u, v)=(u, v, \sqrt{R^2-u^2-v^2})$, полагая $x=u$, $y=v$, $z=\sqrt{R^2-u^2-v^2}$, причем $D=\{(u, v) | u^2+v^2<R^2\}$ и $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ не коллинеарны. Следовательно, M — гладкая поверхность.

681. Пусть γ — винтовая линия, заданная вектор-функцией $\vec{f}(s)=(a \cos s, a \sin s, bs)$, $a^2+b^2=1$, $s \in R$. Доказать, что множество точек M, лежащих на главных нормалях линии γ, является гладкой поверхностью (эта поверхность называется геликоидом). Найти вектор-функцию $\vec{r}(u, v)$, задающую эту поверхность.

682. Доказать, что следующие множества можно представить как объединения множеств, гомеоморфных R^2: а) S^2 — сфера; б) C — бесконечный круговой цилиндр; в) L — эллипсоид; г) Q — двуполостный гиперболоид; д) M — поверхность вращения вокруг оси Oz гладкой кривой γ, которая лежит в плоскости Oxz и является графиком функции $z=f(x)$, $x>0$; е) график p $(p \geqslant 1)$ раз дифференцируемой функции $z=f(x, y)$.

683. Найти параметризации $\vec{r}(u, v)$, задающие множества, рассматриваемые в задаче 682.

Р е ш е н и е. а) Пусть N и S — диаметрально противоположные точки сферы (рис. 73). Обозначим через γ экватор сферы, соответствующий полюсам N и S. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы ось аппликат содержала полюсы N и S. Тогда оси абсцисс и ординат пересекают экватор γ. Обозначим точку пересечения Ox и γ через T. Пусть M — произ-

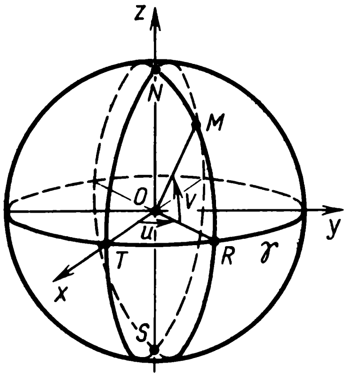


Рис. 73

вольная точка сферы, R — точка пересечения меридиана NMS с экватором γ. Обозначим через u угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OR}$ и через v угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OR}$. Числа u и v удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant u < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Легко видеть, что u определяется углом между плоскостями меридианов NTS и NMS, а v — углом между прямой OM и плоскостью экватора. Прямоугольные декартовые координаты точки M выражаются через u и v по формулам

$$x = R \cos u \cos v;$$
$$y = R \sin u \cos v;$$
$$z = R \sin v.$$

Докажите это самостоятельно. Нетрудно проверить, что полученные соотношения удовлетворяют условию $x^2+y^2+z^2 = R^2(\cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v) = R^2((\cos^2 u + \sin^2 u) \times \cos^2 v + \sin^2 v)) = R^2(\cos^2 v + \sin^2 v)$. Поэтому координаты только точек сферы удовлетворяют этим формулам. Таким образом, вектор-функция

$$\vec{r}(u, v) = (R \cos u \cos v, \ R \sin u \cos v, \ R \sin v),$$
$$D = \left\{(u, v) \mid 0 \leqslant u < 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

определяет искомую параметризацию сферы.

Интересно отметить, что u и v часто называют географическими координатами точек сферы, u — долготой, а v — широтой точки M.

684. Пусть $\Pi_A(\vec{p}, \vec{q})$ — плоскость в E_3, проходящая через точку A с направляющими векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Доказать, что плоскость $\Pi_A(\vec{p}, \vec{q})$ — гладкая поверхность, и найти вектор-функцию $\vec{r}(u, v)$, задающую плоскость $\Pi_A(\vec{p}, \vec{q})$.

685. Пусть $F(x, y, z)$ определена в R^3 и имеет непрерывные частные производные порядка p. Доказать, что множество точек $M = \{P(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$ является поверхностью, если вектор $\overrightarrow{\operatorname{grad} F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \neq \vec{0}$ для всех точек этого множества.

686. Пусть γ — гладкая линия, заданная вектор-функцией $\vec{f}(u)$ (рис. 74). Найти вектор-функцию $\vec{r}(u, v)$, задающую ци-

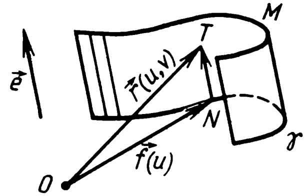


Рис. 74

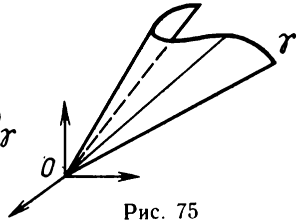


Рис. 75

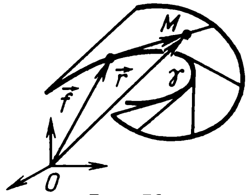


Рис. 76

линдрическую поверхность M с направляющей линией γ, образующие которой параллельны вектору $\vec{e}$.

687. Пусть γ — гладкая линия, заданная вектор-функцией $\vec{f}(u)$ (рис. 75). Найти вектор-функцию $\vec{r}(u, v)$, задающую коническую поверхность с вершиной в начале координат и с направляющей линией γ.

688. Пусть γ — гладкая линия, заданная вектор-функцией $\vec{f}(u)$ (рис. 76). Найти вектор-функцию $\vec{r}(u, v)$, задающую поверхность, образованную касательными к линии γ. (Такая поверхность называется развертывающейся.)

689. Составить уравнение поверхности, образованной касательными к винтовой линии γ (рис. 77), заданной вектор-функцией $\vec{f}(v)=(a\cos v,\ a\sin v,\ bv)$. (Такая поверхность называется развертывающимся геликоидом.)

690. Окружность S_1 задана вектор-функцией $\vec{f}(v)=(a+b\cos v,\ 0,\ b\sin v)$, $0<b<a$, $0\leqslant v<2\pi$ (рис. 78). Найти параметризацию множества точек M, образованного вращением окружности S_1 вокруг оси Oz. (Такая поверхность вращения называется тором.) Является ли тор M гладкой поверхностью?

691. Гладкая плоская линия γ задана вектор-функцией $\vec{f}(u)=$ $=(x(u),\ 0,\ z(u))$. Поверхность M образована вращением гладкой линии γ вокруг оси Oz. Найти параметризацию поверхности вращения M.

692. Найти параметризацию поверхности, образованной:

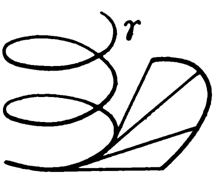


Рис. 77

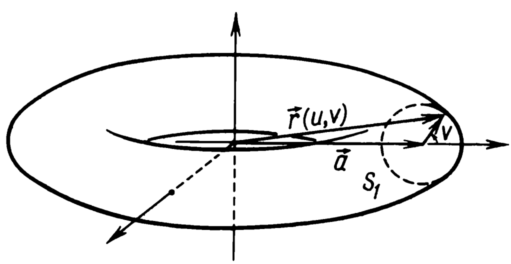


Рис. 78

а) главными нормалями винтовой линии, заданной вектор-функцией

$$\vec{f}(t)=\{a \cos t,\ a \sin t,\ bt\};$$

б) бинормалями этой линии.

Решение. а) Так как $\vec{f}_s=\frac{1}{|\vec{f}_t|}\cdot\vec{f}_t=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a \sin t, a \cos t, b)$, то $\vec{f}_{ss}=\frac{1}{a^2+b^2}(-a \cos t,\ -a \sin t,\ 0)$. За направляющий вектор главной нормали можно принять вектор $\vec{v}=(-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$. Тогда искомая параметризация определяется вектор-функцией $\vec{r}(u,\ v)=\vec{f}(u)-\tilde{v}\vec{v}=((a+\tilde{v}) \cos u,\ (a+\tilde{v}) \sin u,\ bu)=(v \cos u,$ $v \sin u,\ bu)$, где $v=a+\tilde{v}$.

693. В плоскости P даны прямые l и m. Прямая m равномерно движется в плоскости P так, что каждая ее точка движется параллельно прямой l, а плоскость P в то же время равномерно вращается вокруг l. Найти параметризацию поверхности M, если прямая m ортогональна прямой l, а прямая l совпадает с осью Oz (прямой геликоид).

694. Две линии заданы вектор-функциями $\vec{f}(u)$ и $\vec{\varphi}(v)$. Найти параметризацию множества точек, образованного серединами отрезков, концы которых лежат на данных линиях. (Такая поверхность называется поверхностью переноса.)

§ 29. НОРМАЛЬ И КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Литература: [2], § 56.

695. Найти вектор нормали, нормаль и касательную плоскость в произвольной точке $X_0(u_0,\ v_0)$ поверхности M, заданной вектор-функцией $\vec{r}(u,\ v)$:

а) $\vec{r}(u,\ v)=(u,\ v,\ uv^2)$, $(u,\ v)\in R^2$;

б) $\vec{r}(u,\ v)=(R \cos v \sin u,\ R \cos v \cos u,\ R \sin u)$, $R>0$, $|u|<\frac{\pi}{2}$, $0<v<2\pi$;

в) $\vec{r}(u,\ v)=(au,\ \sin u,\ bv)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $(u,\ v)\in R^2$;

г) $\vec{r}(u,\ v)=((a+b \cos v) \cos u,\ (a+b \cos v) \sin u,\ b \sin v)$, $a>0$, $b>0$, $|u|<\pi$, $|v|<\pi$.

Решение. а) Единичный вектор нормали $\vec{m}$ находится по формуле

$$\vec{m}=\frac{[\vec{r}_u\,\vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u\,\vec{r}_v]|},\ \text{где}\ \vec{r}_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right),\ \vec{r}_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Вычислим векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в точке $X_0(u_0,\ v_0,\ u_0v_0^2)\in M$.

Имеем $\vec{r}_u=(1,\ 0,\ v_0^2)$, $\vec{r}_v=(0,\ 1,\ 2u_0v_0)$. Найдем их векторное произведение:

$$[\vec{r}_u\vec{r}_v]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & v_0^2 \\ 0 & 1 & 2u_0v_0 \end{vmatrix}=(-v_0^2,\ -2u_0v_0,\ 1)$$

и его модуль:

$$|[\vec{r}_u\vec{r}_v]|=\sqrt{v_0^4+4u_0v_0+1}.$$

Отсюда

$$\vec{m}=\left(-\frac{v_0^2}{\sqrt{v_0^4+4u_0v_0+1}},\ -\frac{2u_0v_0}{\sqrt{v_0^4+4u_0v_0+1}},\ \frac{1}{\sqrt{v_0^4+4u_0v_0+1}}\right).$$

За направляющий вектор нормали можно взять вектор $(v_0^2,\ 2u_0v_0,\ -1)$, коллинеарный вектору $\vec{m}$. Составим канонические уравнения нормали поверхности в точке $X_0\,(u_0,\ v_0,\ u_0v_0^2)$:

$$\frac{x-u_0}{v_0^2}=\frac{y-v_0}{2u_0v_0}=\frac{z-u_0v_0^2}{-1}.$$

Векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ параллельны касательной плоскости. Поэтому уравнение касательной плоскости в точке $X_0\,(u_0,\ v_0,\ u_0v_0^2)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-u_0 & y-v_0 & z-u_0v_0^2 \\ 1 & 0 & v_0^2 \\ 0 & 1 & 2u_0v_0 \end{vmatrix}=0,$$

или $v_0^2x+2u_0v_0y-z-2u_0v_0^2=0$.

696. Найти вектор нормали, нормаль и касательную плоскость в произвольной точке $P\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ поверхности M, заданной уравнением:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид);

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид);

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (двуполостный гиперболоид);

г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ (гиперболический параболоид);

д) $xyz=a^3$.

Решение. а) Для поверхности M, заданной уравнением $F\,(x,\ y,\ z)=0$, вектор нормали $\vec{m}$ в точке $P_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ коллинеарен градиенту $\overrightarrow{\text{grad}\,F}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ и находится по формуле $\vec{m}=\frac{1}{|\overrightarrow{grad\,F}|}\cdot\overrightarrow{\text{grad}\,F}$.

В рассматриваемом случае

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(x_0,\ y_0,\ z_0)=\left(\frac{2x_0}{a^2},\ \frac{2y_0}{b^2},\ \frac{2z_0}{c^2}\right),$$

$$|\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(x_0,\ y_0,\ z_0)|=\sqrt{\frac{4x_0^2}{a^4}+\frac{4y_0^2}{b^4}+\frac{4z_0^2}{c^4}}.$$ Следовательно,

$$\vec{m}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\ \frac{y_0}{b^2},\ \frac{z_0}{c^2}\right).$$

Так как $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F$ — направляющий вектор нормали, то канонические уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}.$$

Вектор $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F$ является нормальным вектором касательной плоскости. Поэтому уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

Так как точка M_0 принадлежит данной поверхности, то $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$. Следовательно, уравнение касательной плоскости примет вид:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-1=0.$$

697. Найти нормаль и касательную плоскости поверхности, заданной уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$, в точке P_0:

а) $z-x^2-y^2=0$, $\quad P_0(1,\ -2,\ 5)$;

б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{8}=0,\ z\neq 0$, $\quad P_0(4,\ 3,\ 4)$;

в) $x^2+y^2+z^2-2zR=0$, $\quad P_0(R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ R)$;

г) $z-e^y\sin x=0$, $\quad P_0(x_0,\ y_0,\ e^{y_0}\sin x_0)$.

698. Поверхность M задана уравнением $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$. Найти уравнение нормали к этой поверхности, параллельной прямой

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3}.$$

Решение. Искомая нормаль должна быть параллельна заданной прямой. Поэтому ее направляющий вектор имеет координаты (6, —4, 3). Если искомая нормаль проходит через точку

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности M, то $\overrightarrow{\operatorname{grad} F}=\left(\frac{x_0}{2}, -\frac{2y_0}{9}, \frac{z_0}{8}\right)$. Так как $\overrightarrow{\operatorname{grad} F}$ коллинеарен вектору $(6, -4, 3)$, то $\frac{x_0}{2}=6\lambda$, $-\frac{2y_0}{9}=-4\lambda$, $\frac{z_0}{8}=3\lambda$. Подставив эти равенства в уравнение поверхности, получим $\lambda_1=\frac{1}{6}$, $\lambda_2=-\frac{1}{6}$. Поэтому $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=4$ или $x_0=-2$, $y_0=-3$, $z_0=-4$. Следовательно, существуют две нормали, параллельные данной прямой:

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3} \text{ и } \frac{x+2}{6}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+4}{3}.$$

699. Поверхность M задана уравнением $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=2z$. Найти уравнения нормалей, параллельных следующим прямым:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{-6}$;

б) $\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

700. Поверхность M задана уравнением $xyz=1$. Написать уравнения нормалей, которые проходят через начало координат.

701. Поверхность M задана уравнением $x^2+2y^2+3z^2=21$. Написать уравнения касательных плоскостей, параллельных плоскостям: а) $x+4y+6z=0$; б) $4x-2y+3z-1=0$.

Р е ш е н и е. а) Так как искомая плоскость должна быть параллельной данной, то ее нормальный вектор имеет координаты $(1, 4, 6)$. С другой стороны, нормальный вектор в точке (x_0, y_0, z_0) коллинеарен вектору $\overrightarrow{\operatorname{grad} F}=(2x_0, 4y_0, 6z)$. Поэтому имеют место равенства $\frac{2x_0}{1}=y_0=z_0=\lambda$, откуда $x_0=\frac{1}{2}\lambda$, $y_0=\lambda$, $z_0=\lambda$. Подставив полученные выражения в уравнение поверхности, получим $\frac{\lambda^2}{4}+2\lambda^2+3\lambda^2=21$, откуда $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$. Искомая плоскость касается поверхности в точке с координатами $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=2$ или в точке с координатами $x_0=-1$, $y_0=-2$, $z_0=-2$. Следовательно, существуют две касательные плоскости к данной поверхности, которые параллельны плоскости $x+4y+6z=0$:

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0 \text{ и } (x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0$$

$$\text{или } x+4y+6z-21=0 \text{ и } x+4y+6z+21=0.$$

702. Найти уравнение поверхности M, все нормали которой пересекаются в одной точке O.

Р е ш е н и е. Пусть $\vec{r}(u, v)$ — некоторая параметризация искомой поверхности, а $\vec{m}(u, v)$ — ее единичный нормальный вектор.

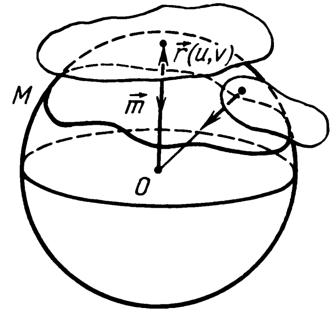


Рис. 79

Тогда имеет место равенство $\vec{r}(u, v) = \lambda(u, v)\,\vec{m}(u, v)$, где $\lambda(u, v)$ — функция от параметров u, v. Дифференцируя $\vec{r}$ по параметрам u, v, получаем $\vec{r}_u = \lambda_u \vec{m} + \lambda \vec{m}_u$, $\vec{r}_v = \lambda_v \vec{m} + \lambda \vec{m}_v$. Рассмотрим скалярные произведения $\vec{r}_u \cdot \vec{m}$ и $\vec{r}_v \cdot \vec{m}$, получим:

$$\lambda_u \vec{m}^2 + \lambda \vec{m}_u \cdot \vec{m} = 0 \text{ и } \lambda_v \vec{m}^2 + \lambda \vec{m}_v \vec{m} = 0.$$

Откуда следует, что $\lambda_u = 0$, $\lambda_v = 0$. Следовательно, $\lambda = \text{const}$ и $\vec{r}(u, v) = \lambda \vec{m}(u, v)$. Получили параметризацию сферы радиуса λ, значит, M является частью сферы (рис. 79). Обратно, если M — часть сферы с центром O, радиусом λ, т. е. $\vec{r}(u, v)^2 = \lambda^2$, следовательно, $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$ и векторы $\vec{m}(u, v)$ и $\vec{r}(u, v)$ параллельны. Значит, все ее нормали пересекаются в точке O.

703. Поверхность M образована главными нормалями линии γ, заданной вектор-функцией $\vec{f}(s)$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали в произвольной точке поверхности.

704. Поверхность M образована бинормалями линии γ, заданной вектор-функцией $\vec{f}(s)$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали в произвольной точке поверхности.

705. Доказать, что все касательные плоскости к поверхности M, заданной уравнением $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, проходят через одну точку.

706. Поверхность M образована касательными к линии γ, заданной вектор-функцией $\vec{f}(s)$. Доказать, что поверхность M во всех точках касательной к линии γ имеет одну и ту же касательную плоскость.

707. Показать, что касательные плоскости поверхности переноса (см. задачу 694), заданной вектор-функцией $\vec{r}(u, v) = \frac{1}{2}(\vec{f}(u) + \vec{\varphi}(v))$, вдоль каждой из линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ параллельны некоторой прямой.

708. Дана гладкая поверхность M. От каждой точки T поверхности M отложены в направлении ее вектора нормали векторы $\overrightarrow{TT'}$ постоянной длины. Множество концов этих векторов M' называется поверхностью, параллельной данной. Доказать, что поверхности M и M' в соответствующих точках T и T' имеют общие нормали.

§ 30. ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ. ДЛИНА ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ, УГОЛ МЕЖДУ ЛИНИЯМИ, ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Литература: [2], § 57.

709. Пусть M — гладкая поверхность, параметризованная вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$, а $\vec{a}$ — произвольный вектор касательной плоскости. Показать, что скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ выражается в виде квадратичной формы от его координат x_1, x_2 относительно базиса $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, коэффициенты которой совпадают с коэффициентами первой квадратичной формы поверхности.

Решение. Так как M — гладкая поверхность, то $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны и являются базисом касательной плоскости. По определению координат вектора относительно базиса имеем $\vec{a}=x_1\vec{r}_u+x_2\vec{r}_v$. Вычисляя скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ и пользуясь свойствами скалярного произведения, находим:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=(x_1\vec{r}_u+x_2\vec{r}_v)(x_1\vec{r}_u+x_2\vec{r}_v)=$$
$$=\vec{r}_u^{\,2}x_1^2+2\vec{r}_u\vec{r}_vx_1x_2+\vec{r}_v^{\,2}x_2^2.$$

Таким образом, $\vec{a}\cdot\vec{a}=Ex_1^2+2Fx_1x_2+Gx_2^2$, где коэффициенты $E=\vec{r}_u^{\,2}$, $F=\vec{r}_u\vec{r}_v$, $G=\vec{r}_v^{\,2}$ в точности совпадают с коэффициентами первой квадратичной формы.

710. Установить, как изменятся коэффициенты первой квадратичной формы E, F, G при переходе к другой параметризации поверхности.

711. Показать, что скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ касательной плоскости выражается в виде билинейной формы от их координат (x_1, x_2) и (y_1, y_2) относительно базиса $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ с коэффициентами E, F, G первой квадратичной формы:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=Ex_1y_1+F(x_1y_2+x_2y_1)+Gx_2y_2=I(\vec{a}, \vec{b}).$$

712. Гладкая поверхность S задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$. Кривая $\gamma\subset S$ определяется вектор-функцией $\vec{f}(t)=(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$. Найти координаты вектора $\vec{f}'(t)$ кривой γ в произвольной точке P относительно базиса $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$. (Координаты вектора относительно базиса $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ называются его внутренними координатами.)

713. Показать, что скалярный квадрат $\vec{f}'(t_0)\cdot\vec{f}'(t_0)$ вектора $\vec{f}(t_0)$ кривой γ на поверхности S выражается через его внутренние координаты $u'(t_0)$, $v'(t_0)$ (см. задачу 712) по формуле

$$\vec{f}'(t_0)\cdot\vec{f}'(t_0)=E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2=I(\vec{f}'(t_0), \vec{f}'(t_0)).$$

714. Поверхность S определена вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$. Показать, что скалярный квадрат дифференциала вектор-функции $d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$ выражается через его внутренние координаты du и dv по формуле

$$d\vec{r}\cdot d\vec{r}=Edu^2+2Fdu\cdot dv+Gdv^2=I(d\vec{r}, d\vec{r}).$$

715. На гладкой поверхности S две кривые, заданные вектор-функциями $\vec{f}(u(t), v(t))$ и $\vec{f}_1(u(\tau), v(\tau))$, пересекаются в точке P_0 с внутренними координатами $u(t_0)=u_1(\tau_0)$, $v(t_0)=v_1(\tau_0)$. Найти угол между кривыми в точке P_0, если даны коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы поверхности.

Решение. По определению угол между двумя кривыми равен углу между касательными векторами в точке их пересечения. Касательные векторы данных кривых $\vec{f}'(t_0)$, $\vec{f}_1'(\tau_0)$ имеют следующий вид (см. задачу 712):

$$\vec{f}'(t_0)=u'(t_0)\vec{r}_u+v'(t_0)\vec{r}_v,\quad \vec{f}_1'(\tau_0)=u_1'(\tau_0)\vec{r}_u+v_1'(\tau_0)\vec{r}_v.$$

Пользуясь результатами задач 709 и 711, получаем:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{f}'(t_0)\cdot\vec{f}_1'(\tau_0)}{|\vec{f}'(t_0)|\cdot|\vec{f}_1'(\tau_0)|}=$$

$$\frac{Eu_1'u_1+F(u'v_1'+u_1'v')+Gv'v_1'}{\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}\sqrt{E(u_1')^2+2Fu_1'v_1'+G(v_1')^2}}.$$

Угол φ между кривыми равен углу между векторами $d\vec{r}(u(t), v(t))=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$, где $du=u_t dt$, $dv=v_t dt$, и $\delta\vec{r}(u_1(\tau), v_1(\tau))=$ $=\vec{r}_u\delta u+\vec{r}_v\delta v$, где $\delta u=u_\tau d\tau$, $\delta v=v_\tau d\tau$.

$$\cos\varphi=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}$$ —

этот угол также называется углом между направлениями $(du:dv)$ и $(\delta u:\delta v)$.

716. Вычислить первые квадратичные формы поверхностей, определяемых следующими вектор-функциями $\vec{r}(u, v)$:

а) $\vec{r}(u, v)=a+u\vec{p}+v\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ — неколлинеарные векторы, $D=R^2$ (плоскость);

б) $\vec{r}(u, v)=(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)$, $D=\left\{(u, v)\middle|\ |u|<\frac{\pi}{2}, 0<v<2\pi\right\}$ (сфера без полуокружности);

в) $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, av)$, $D=\{(u, v)|u>0, a\neq 0\}$ (прямой геликоид);

г) $\vec{r}(u, v)=(v\cos u, v\sin u, \varphi(v))$, $D=\{(u, v)|v>0, 0<u<2\pi\}$ (поверхность вращения);

д) $\vec{r}(u,\ v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ \varphi(u)+av)$, $D=\{(u,\ v)\mid u>0,\ a\neq 0\}$ (геликоид общего вида);

е) $\vec{r}(u,\ v)=(v\cos u,\ v\sin u,\ u+v)$, $D=R^2$ (винтовая поверхность);

ж) $\vec{r}(u,\ v)=(a\sin u\cos v,\ a\sin u\sin v,\ \varphi(u))$, где $\varphi(u)=a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}+\right.$ $\left.+\cos u\right)$, $a>0$, $D=\{(u,\ v)\mid 0<u<\pi,\ 0<v<2\pi\}$ (псевдосфера);

з) $\vec{r}(u,\ v)=(\varphi(u)\cos v,\ \varphi(u)\sin v,\ \psi(u))$, $D=\{(u,\ v)\mid 0<v<2\pi\}$ (поверхность вращения);

и) $\vec{r}(u,\ v)=(v\cos u,\ v\sin u,\ \varphi(v))$, $D=\{(u,\ v)\mid v>0,\ 0<u<2\pi\}$,

где $\varphi(v)$ — обратная к функции $v=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right)$ (катеноид).

Решение. з) Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы по формулам $E=\vec{r}_u^{\,2}$, $F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$, $G=\vec{r}_v^{\,2}$. Так как $\vec{r}_u=$ $=(\varphi'(u)\cos v,\ \varphi'(u)\sin v,\ \psi'(u))$, $\vec{r}_v=(-\varphi(u)\sin v,\ \varphi(u)\cos v,\ 0)$, то $E=\vec{r}_u^{\,2}=(\varphi'(u))^2\cos^2 v+(\varphi'(u))^2\sin^2 v+(\psi'(u))^2=(\varphi'(u))^2+$ $+(\psi'(u))^2$, $F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=-\varphi'(u)\varphi(u)\cos v\sin v+\varphi'(u)\varphi(u)\sin v\times$ $\times\cos v=0$, $G=\vec{r}_v^{\,2}=(\varphi(u))^2\sin^2 v+(\varphi(u))^2\cos^2 v=(\varphi(u))^2$.

Отсюда первая квадратичная форма имеет вид:

$$I(d\vec{r},\ d\vec{r})=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=$$
$$=(\varphi'(u)^2+\psi'(u)^2)\,du^2+\varphi(u)^2dv^2.$$

717. Вычислить первые квадратичные формы следующих поверхностей, заданных как графики функций $z=\varphi(x,\ y)$, $(x,\ y)\in D\subset R^2$:

а) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (сфера);
б) $z=\varphi(x)$ (цилиндрическая поверхность);
в) $z=axy$;
г) $z=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)\right)$;

д) $z=a\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}$;

е) $z=\frac{a^3}{xy}$;

ж) тор — $z=\sqrt{r(r-2)}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$;
з) поверхность вращения кривой $z=f(x)$, $y=0$ вокруг оси $Oz - z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Решение. г) Первая квадратичная форма поверхности, заданной как график функции $z=\varphi(x, y)$, вычисляется по формуле

$$I=(1+\varphi_x^2)\,dx^2+2\varphi_x\varphi_y dxdy+(1+\varphi_y^2)\,dy^2.$$

В нашем случае $\varphi_x=-\dfrac{y}{\left(1+\cos^2\dfrac{y}{x}\right)x^2}$, $\varphi_y=\dfrac{1}{\left(1+\cos^2\dfrac{y}{x}\right)x}$.

Следовательно,

$$I=\left(1+\frac{y^2}{\left(1+\cos^2\frac{y}{x}\right)^2x^4}\right)dx^2-2\frac{y}{\left(1+\cos^2\frac{y}{x}\right)^2x^3}dxdy+$$

$$+\left(1+\frac{1}{\left(1+\cos^2\frac{y}{x}\right)^2x^2}\right)dy^2.$$

718. Найти длину дуги AB координатной линии на поверхности S, определяемой вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=(u, v, uv)$, если точка A имеет внутренние координаты $(1, 3)$, а точка B — $(1, 7)$.

Решение. Если поверхность определена вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$, то длина дуги AB ее произвольной кривой $\vec{r}(u(t), v(t))$ вычисляется по формуле

$$L(\smile{AB})=\int_a^b\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}\,dt,$$

где $\vec{r}(u(a), v(a))=\overrightarrow{OA}$, $\vec{r}(u(b), v(b))=\overrightarrow{OB}$.

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы данной поверхности. Так как $\vec{r}_u=(1, 0, v)$, $\vec{r}_v=(0, 1, u)$, то $E=1+v^2$, $F=uv$, $G=1+u^2$. Найдем длину дуги координатной линии v. Положим $v=t$, $u=\text{const}$. Отсюда $u'=0$, $v'=1$. Следовательно,

$$L(\smile{AB})=\int_3^7\sqrt{(1+1)\cdot 1dt}=4\sqrt{2}.$$

719. Найти длину дуги AB координатной линии на поверхности S, определяемой вектор-функцией $\vec{r}=\left(u, v, \dfrac{a^3}{uv}\right)$, $u\neq 0$, $v\neq 0$, если точка A имеет внутренние координаты $(2, 6)$, а точка B — $(3, 6)$.

720. Вычислить длины дуг AB кривых, заданных на поверхностях (см. задачи 716 (а, б, в, е)) уравнением $2u-v=0$, если внутренние координаты точек A и B равны соответственно $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ и $(1, 2)$.

721. Найти длину дуги AB линии, заданной уравнением $u-v=0$ на поверхности S с первой квадратичной формой $I=du^2+\text{sh}^2\, udv$, если внутренние координаты точек A и B равны соответственно (u_1, v_1) и (u_2, v_2).

722. Найти угол между координатными линиями поверхности задачи 718 в точке $A\,(1, 3)$.

Решение. Из решения задачи 718 следует, что первая квадратичная форма рассматриваемой поверхности имеет вид:

$$I=(1+v^2)\,du^2+2uvdudv+(1+u^2)\,dv^2.$$

Угол φ между координатными линиями — это угол между их касательными векторами $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Подставляя для координатной линии u: $u'=1$, $v'=0$, для координатной линии v: $v_1'=1$, $u_1'=0$ — в формулу для вычисления $\cos\varphi$ (см. решение задачи 715), получаем:

$$\cos\varphi=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

В точке $A\,(1, 3)$ $F=uv=3$, $E=10$, $G=2$, следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

723. Найти угол между координатными линиями на поверхности S, определяемой вектор-функцией $\vec{r}\,(u, v)=(u, v, auv)$, $a\neq 0$, если они пересекаются в точке P_0 с внутренними координатами $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

724. На геликоиде, определенном вектор-функцией $\vec{r}\,(u, v)=$ $=(au\cos v,\ au\sin v,\ bv)$, найти: 1) угол между координатными линиями; 2) угол между линиями $u+v=0$ и $u-v=0$.

725. На прямом геликоиде, определенном вектор-функцией $\vec{r}\,(u, v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$, $a\neq 0$, найти линии, делящие пополам углы между координатными линиями.

Решение. Первая квадратичная форма прямого геликоида (см. задачу 716, *в*) имеет следующий вид:

$$I=du^2+(u^2+a^2)\,dv^2.$$

Угол между линиями на поверхности вычисляется как угол между касательными векторами к этим линиям в точке их пересечения:

$$d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv \quad \text{и} \quad \delta\vec{r}=\vec{r}_u\delta u+\vec{r}_v\delta v,$$

по известной формуле

$$\cos\varphi=\frac{Edu\delta u+F\,(du\delta v+\delta udv)+Gdv\delta u}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\,\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}}.$$

Пусть искомая линия γ задана вектор-функцией $\vec{r}(u(t),\ v(t))$. Ее касательный вектор имеет вид $d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$. Для координатной линии u $\delta v=0$, и ее касательный вектор имеет вид $\delta\vec{r}=\vec{r}_u\delta u$. Коэффициенты первой квадратичной формы по условию равны $E=1$, $F=0$, $G=u^2+a^2$. Следовательно, угол φ_1 между линией γ и координатной линией u находится из равенства

$$\cos\varphi_1=\frac{du\delta u}{\sqrt{du^2+(u^2+a^2)\,dv^2}\,\sqrt{\delta u^2}}.$$

Для координатной линии v $u=\text{const}$, $\delta u=0$, и касательный вектор к ней $\delta\vec{r}=\vec{r}_v\delta v$. Поэтому угол между ней и линией находится из равенства

$$\cos\varphi_2=\frac{(u^2+a^2)\,dv\delta v}{\sqrt{du^2+(u^2+a^2)\,dv^2}\,\sqrt{(u^2+a^2)\,\delta v^2}}.$$

Из равенства $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$ следует, что $du=\pm\sqrt{u^2+a^2}\,dv$. Чтобы решить полученное дифференциальное уравнение, разделим переменные и проинтегрируем:

$$\pm\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\int dv.$$

Отсюда находим уравнения искомых линий:

$$v=\pm\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+c.$$

726. Параболоид задан уравнением $z=axy$. Найти:

а) прямые на параболоиде (прямолинейные образующие), пересекающие линию $x=\text{const}$ под прямым углом;

б) угол между линиями $x=x_0$ и $y=y_0$ на параболоиде $z=axy$.

727. Поверхность вращения задана параметризацией $\vec{r}(u,v)=(f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ z(u))$. Проверить, что ее меридианы $v=\text{const}$ и параллели $u=\text{const}$ ортогональны. Найти линии, которые делят пополам углы между меридианами и параллелями.

728. Геликоид задан параметризацией $\vec{r}(u,v)=(au\cos v,\ au\sin v,\ bv)$. Найти площадь криволинейного четырехугольника Ω, ограниченного линиями: $u=0$, $u=\frac{1}{a}$, $a>0$, $v=0$, $v=1$.

Решение. Площадь σ области Ω на поверхности вычисляется по формуле

$$\sigma=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

где D — прообраз области Ω в R^2. Так как $\vec{r}_u=(a\cos v,\ a\sin v,\ 0)$, $\vec{r}_v=(-au\sin v,\ au\cos v,\ b)$, то коэффициенты первой квадратичной формы равны $E=\vec{r}_u^2=a^2$, $F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=0$, $G=\vec{r}_v^2=a^2u^2+b^2$. Вычислим площадь σ четырехугольника Ω:

$$\sigma=\int\limits_{v=0}^{v=1}\int\limits_{u=0}^{u=\frac{1}{a}}\sqrt{a^2(a^2u^2+b^2)}\,du\,dv=ab\int\limits_0^{\frac{1}{a}}\sqrt{\frac{a^2u^2}{b^2}+1}\,du,$$

заменив $x=\frac{au}{b}$, получим $\sigma=b^2\int\limits_0^{\frac{1}{b}}\sqrt{1+x^2}dx=$

$$=b^2\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2}))\Big|_0^{\frac{1}{b}}=\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{b}\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\right.$$
$$\left.+\ln\left(\frac{1}{b}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\sqrt{1+b^2}+\frac{b^2}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{b}.$$

729. Найти площадь $\sigma(P)$ поверхности тора, заданной вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=((R+a\cos\psi)\cos\varphi, (R+a\cos\psi)\sin\varphi, a\sin\psi)$, $0<a<R$, и ограниченной меридианами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и параллелями $\psi=\psi_1$, $\psi=\psi_2$.

730. Вычислить площади частей плоскости, заключенных внутри:

а) эллипса с полуосями a и b;
б) гиперболы с полуосями a и b и прямой $x=2a$;
в) параболы $y^2=2px$ и прямой $x=3p$.

731. Найти площади $\sigma(P)$ частей гладкой поверхности, заданных следующими условиями:

а) $x^2+y^2=R^2$, $z>0$, $mx<z<nx$, $0<m<n$;
б) $x^2+y^2=R^2$, $x>0$, P заключена внутри цилиндра $y^2+z^2=R^2$;
в) $x^2+y^2=2x$, P заключена внутри сферы $x^2+y^2+z^2=4$.

732. Найти площадь $\sigma(P)$ поверхности тора, заданного уравнением $(x-a)^2+y^2+z^2=R^2$, $a>R>0$ (см. рис. 78).

733. На геликоиде, заданном вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=(u\sin v, u\cos v, v)$, дан криволинейный треугольник с областью изменения параметров $\Delta=\{(u, v)|0\leqslant u\leqslant \operatorname{sh} v, 0\leqslant v\leqslant v_0\}$. Найти длины сторон, углы и площадь этого треугольника.

734. Вычислить площадь круга радиуса r на сфере радиуса R и сравнить ее с площадью круга того же радиуса на евклидовой плоскости.

§ 31. ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА. НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА

Литература: [2], § 58.

735. Поверхность S задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$. Гладкая кривая γ на ней определена вектор-функцией $\vec{f}(s)$, где s — длина дуги. Доказать, что нормальная кривизна k_n кривой γ выражается в виде билинейной формы от внутренних координат $u'(s)$ и $v'(s)$ касательного вектора $\vec{f}'(s)$:

$$k_n = Lu'(s)^2 + 2Mu'(s)\,v'(s) + Nv'(s)^2,$$

где L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы.

Решение. Линия γ поверхности S задана вектор-функцией $\vec{f}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$. Дважды продифференцируем последнюю формулу и получим:

$$\vec{f}''(s) = \vec{r}_{uu}u'(s)^2 + 2\vec{r}_{uv}u'(s)\,v'(s) + \vec{r}_{vv}v'(s)^2 + \vec{r}_u u''(s) + \vec{r}_v v''(s).$$

Так как $k_n = \vec{m}\cdot\vec{f}''(s)$, где $\vec{m}$ — единичный вектор нормали поверхности, то, подставляя в это равенство выражение для $\vec{f}''(s)$ и учитывая, что $\vec{m}\cdot\vec{r}_u = \vec{m}\cdot\vec{r}_v = 0$, получим:

$$k_n = (\vec{m}\cdot\vec{r}_{uu})\,u'(s)^2 + 2(\vec{m}\cdot\vec{r}_{uv})\,u'(s)\,v'(s) +$$
$$+ (\vec{m}\cdot\vec{r}_{vv})\,v'(s)^2 = Lu'(s)^2 + 2Mu'(s)\,v'(s) + Nv'(s)^2,$$

где L, M, N в точности совпадают с коэффициентами второй квадратичной формы.

736. Поверхность S задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$. Гладкая кривая γ на ней определена вектор-функцией $\vec{r}(u(t), v(t))$. Доказать, что нормальная кривизна k_n кривой γ в точке $A_0(u(t_0), v(t_0))$ равна отношению второй квадратичной формы поверхности к первой:

$$k_n = \frac{Lu'(t_0)^2 + 2Mu'(t_0)\,v'(t_0) + Nv'(t_0)^2}{Eu'(t_0)^2 + 2Fu'(t_0)\,v'(t_0) + Gv'(t_0)^2},$$

вычисленными для $t = t_0$.

737. Найти вторые квадратичные формы поверхностей, определяемых следующими вектор-функциями:

а) плоскости — $\vec{r}(u, v) = \vec{a} + u\vec{p} + v\vec{q}$, $(u, v) \in R^2$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ — неколлинеарные векторы;

б) сферы радиуса R — $\vec{r}(u, v) = (R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u)$, $R > 0$, $|u| < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 2\pi$;

в) эллипсоида вращения — $\vec{r}(u, v) = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ c\sin u)$;

г) однополостного гиперболоида вращения — $\vec{r}(u, v) = (a\operatorname{ch} u\cos v,\ a\operatorname{ch} u\sin v,\ c\operatorname{sh} u)$;

д) двуполостного гиперболоида вращения — $\vec{r}(u, v) = (a\operatorname{sh} u\cos v,\ a\operatorname{sh} u\sin v,\ c\operatorname{ch} u)$;

е) параболоида вращения — $\vec{r}(u, v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ u^2)$;

ж) кругового цилиндра — $\vec{r}(u, v)=(R\cos v, R\sin v, u)$;

з) кругового конуса — $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, ku)$, $u\neq 0$;

и) прямого геликоида — $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, av)$, $a\neq 0$, $u>0$;

к) поверхности вращения — $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, f(u))$, $0<u<\infty$, $0<v<2\pi$; $f(u)$ — функция класса C^p, $p\geqslant 2$;

л) геликоида общего вида — $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, f(u)+av)$, $a\neq 0$, $u>0$;

м) винтовой поверхности — $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$, $0<u<\infty$, $0<v<2\pi$;

н) псевдосферы — $\vec{r}(u, v)=(a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, f(u))$, где $\vec{f}(u)=a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}+\cos u\right)$, $0<u<\pi$, $0<v<2\pi$, $a>0$;

о) тора — $\vec{r}(u, v)=((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v$, в $\sin u)$;

п) катеноида — $\vec{r}(u, v)=(\sqrt{a^2+u^2}\cos v, \sqrt{a^2+u^2}\sin v$, $a\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}))$, $0<u<\infty$, $-\infty<v<\infty$.

Решение. а) Найдем первые и вторые частные производные вектор-функции $\vec{r}(u, v)=\vec{a}+u\vec{p}+v\vec{q}$:

$$\vec{r}_u=\vec{p},\ \vec{r}_v=\vec{q},\ \vec{r}_{uu}=\vec{0},\ \vec{r}_{uv}=\vec{0},\ \vec{r}_{vv}=\vec{0}.$$

Следовательно, $L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{m}=0$, $M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{m}=0$, $N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{m}=0$ и $\mathrm{II}=0$.

и) Вычислим первые и вторые частные производные вектор-функции $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, av)$:

$$\vec{r}_u=(\cos v, \sin v, 0),\ \vec{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, a),$$
$$\vec{r}_{uu}=\vec{0},\ \vec{r}_{uv}=(-\sin v, \cos v, 0),\ \vec{r}_{vv}=(-u\cos v-u\sin v, 0).$$

Теперь найдем единичный вектор нормали к поверхности $\vec{m}$ и коэффициенты второй квадратичной формы:

$$[\vec{r}_u\,\vec{r}_v]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos v & \sin v & 0\\ -u\sin v & u\cos v & a\end{vmatrix}=(a\sin v, -a\cos v, u),$$

$$|[\vec{r}_u\,\vec{r}_v]|=\sqrt{a^2+u^2},$$

$$\vec{m}=\left(\frac{a\sin v}{\sqrt{a^2+u^2}},\ -\frac{a\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}},\ \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}\right),$$

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{m}=0,\ M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{m}=\frac{-a\sin^2 v-a\cos^2 v}{\sqrt{a^2+u^2}}=$$

$$=-\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}},\ N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{m}=\frac{-u\cos v a\sin v+u\sin v a\cos v}{\sqrt{a^2+u^2}}=0.$$

Следовательно, вторая квадратичная форма имеет вид:

$$\mathrm{II}=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=-\frac{2adudv}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$

738. Поверхность M является графиком функции $z=f(x, y)$. Доказать, что ее вторая квадратичная форма имеет вид:

$$\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}(f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2).$$

739. Используя задачу 738, найти вторые квадратичные формы поверхностей, заданных как графики следующих функций:

а) $z=ax+by+c$; б) $z=ax^2+by^2$; в) $z=ax^2-by^2$; г) $xyz=a^3$.

740. Точка A_0 на поверхности S называется омбилической, если в этой точке коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности пропорциональны между собой: $L=\lambda E$, $M=\lambda F$, $N=\lambda G$, $\lambda\in R$. Показать, что нормальная кривизна в любом направлении на поверхности, вычисленная в омбилической точке, не зависит от кривой и равна коэффициенту пропорциональности λ квадратичных форм.

741. Доказать, что поверхность, целиком состоящая из омбилических точек, является частью сферы.

742. Доказать, что поверхность содержится в некоторой плоскости тогда и только тогда, когда ее вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

743. Найти кривизны нормальных сечений, имеющих общее касательное направление с координатными линиями поверхностей из задачи 737.

Решение. а) Нормальным сечением поверхности, проходящим через точку A_0 в направлении касательного вектора $\vec{p}$, называется линия пересечения поверхности с плоскостью, проходящей через точку A_0 и параллельной векторам $\vec{p}$ и $\vec{m}$, где $\vec{m}$ — вектор нормали поверхности в точке A_0. Кривизна нормального сечения совпадает с точностью до знака с нормальной кривизной в точке A_0 в направлении вектора $\vec{p}\,(p_1, p_2)$ и, значит, может быть вычислена по формуле

$$k_n=\frac{Lp_1^2+2Mp_1p_2+Np_2^2}{Ep_1^2+2Fp_1p_2+Gp_2^2}.$$

Направляющими векторами нормальных сечений, рассматриваемых в задаче, можно считать векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Их внутренние координаты равны $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Следовательно, в первом случае $k_n=\frac{L}{E}$, а во втором $k_n=\frac{N}{G}$. Из решения задачи 737 следует, что $L=N=0$ и нормальные кривизны, а значит, и кривизны нормальных сечений, проведенных через точку $A_0(u_0, v_0)$ в обоих направлениях, равны нулю.

744. Найти кривизну нормального сечения, проходящего через касательную к кривой, задаваемой уравнениями $u=u_0+t$, $v=v_0-t$ в точке $A_0(u_0, v_0)$ для поверхностей из задачи 737.

745. Линия на поверхности называется асимптотической, если в каждой ее точке $k_n=0$. Найти асимптотические линии на следующих поверхностях:

а) $z=xy$;

б) $z=xy^2$;

в) $z=a\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$;

г) $\vec{r}(u, v)=\left(u^2+v,\ u^3+uv,\ u^4+\frac{2}{3}u^2v\right)$;

д) $\vec{r}(u, v)=(u,\ uv,\ u+v^3)$;

е) $\vec{r}(u, v)=((1+u)\cos v,\ (1+u)\sin v,\ u)$, $0<u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$;

ж) $\vec{r}(u, v)=(\cos v+u\sin v,\ -\sin v+u\cos v,\ v)$, $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<\infty$;

з) $\vec{r}(u, v)=\left(a(1+\cos u)\operatorname{ctg} v,\ a(1+\cos u),\ a\frac{\cos u}{\sin v}\right)$;

и) $\vec{r}(u, v)=(\psi(u)\cos v,\ \psi(u)\sin v,\ \varphi(u))$.

Решение. и) Асимптотические линии определяются условием $k_n=0$. Поэтому уравнения искомых линий можно получить, решив дифференциальное уравнение $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$, где L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы. В рассматриваемом примере $\vec{r}_u=(\psi'\cos v,\ \psi'\sin v,\ \varphi')$, $\vec{r}_v=(-\psi\sin v,\ \psi\cos v,\ 0)$. Следовательно, единичный вектор нормали имеет вид:
$\vec{m}=\frac{1}{|[\vec{r}_u\vec{r}_v]|}[\vec{r}_u\vec{r}_v]=\frac{1}{\sqrt{\psi^2((\psi')^2+(\varphi')^2)}}(-\psi\psi'\cos v,\ -\psi\varphi'\sin v,\ \psi'\psi)$.
Так как $\vec{r}_{uu}=(\psi''\cos v,\ \psi''\sin v,\ \varphi'')$, $\vec{r}_{uv}=(-\psi'\sin v,\ \psi'\cos v,\ 0)$, $\vec{r}_{vv}=(-\psi\cos v,\ -\psi\sin v,\ 0)$, то коэффициенты второй квадратичной формы соответственно равны:

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{m}=\frac{\psi(\varphi''\psi'-\psi''\varphi')}{\sqrt{\psi^2((\psi')^2+(\varphi')^2)}},\quad M=\vec{r}_{uv}\vec{m}=0,$$

$$N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{m}=\frac{\psi^2\varphi'}{\sqrt{\psi^2((\psi')^2+(\varphi')^2)}}.$$

Дифференциальное уравнение асимптотических линий теперь принимает следующий вид:

$$(\varphi''\psi'-\psi''\varphi')\,du^2+\psi\varphi'dv^2=0,$$

откуда $dv=\pm\sqrt{\frac{\psi''\varphi'-\varphi''\psi'}{\psi\varphi'}}\,du$. Следовательно,

$$v=\pm\int\sqrt{\frac{\psi''\varphi'-\varphi''\psi'}{\psi\varphi'}}\,du.$$

746. Доказать, что асимптотическая линия либо является прямой, либо ее главная нормаль лежит в касательной плоскости поверхности, бинормаль совпадает с нормалью поверхности, а соприкасающаяся плоскость — с касательной плоскостью поверхности.

§ 32. ПОЛНАЯ И СРЕДНЯЯ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

Литература: [2], § 59.

747. Найти полную и среднюю кривизны прямого геликоида, заданного вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, av)$, $a\neq 0$, $u>0$ в произвольной его точке.

Решение. Средняя кривизна H вычисляется по формуле

$$H=\frac{EN-2MF+LG}{2(EG-F^2)},$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы, а L, M, N — второй. Подставим значения этих коэффициентов из решения задачи 737, и, получим $E=1$, $F=0$, $G=u^2+a^2$, $L=0$, $M=\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, $N=0$. Следовательно, $H=0$.

Полная, или гауссова, кривизна вычисляется по формуле

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Отсюда $K=-\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$.

748. Поверхность вращения задана вектор-функцией

$$\vec{r}(u, v)=(f(u), \psi(u)\cos v, \psi(u)\sin v), \psi(u)>0.$$

Найти среднюю и полную кривизны в произвольной ее точке.

749. Найти полную кривизну поверхности, первая квадратичная форма которой имеет вид $I=du^2+e^{2u}dv^2$.

750. Найти полную и среднюю кривизны винтовой поверхности, заданной вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=(u\cos v, u\sin v, u+v)$.

751. Найти полную кривизну псевдосферы, заданной вектор-функцией $\vec{r}(u, \varphi)=\left(\pm a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}-\sqrt{a^2-u^2}, u\cos\varphi, u\sin\varphi\right)$, $a>0$, $u>0$.

752. Найти полную и среднюю кривизны поверхности, образованной бинормалями данной кривой.

753. Найти полную и среднюю кривизны поверхностей, которые заданы как графики следующих функций:

а) $z=f(x, y)$; б) $z=ax^2+by^2$, $a>0$, $b>0$; в) $z=x^2-y^2$.

Решение. а) Для поверхности, заданной как график функции $z=f(x, y)$, коэффициенты первой квадратичной формы соответственно равны:

$$E=1+f_x^2,\ F=f_x f_y,\ G=1+f_y^2,$$

а коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ M=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ N=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

Следовательно, полная кривизна имеет вид:

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2},$$

а средняя:

$$H=\frac{(1+f_y^2)f_{xx}-2f_x f_y f_{xy}+(1+f_x^2)f_{yy}}{2(1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

754. Доказать, что средняя кривизна поверхности, заданной как график функции $z=\ln\cos x-\ln\cos y$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, равна нулю.

755. В пространстве E_3 заданы поверхности S_1 и S_2 как графики функций $z=\ln(x^2+y^2)$ и $z=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Доказать, что в точках M_1 поверхности S_1 и M_2 поверхности S_2 с одинаковыми координатами x, y полные кривизны этих поверхностей совпадают.

756. Доказать, что если коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности пропорциональны, то ее полная кривизна K равна квадрату средней кривизны H: $K=H^2$.

757. Поверхность M^* образована концами отрезков постоянной длины a, отложенных на нормалях от поверхности M по одну сторону от нее (параллельная поверхность; см. задачу 708). Выразить полную K^* и среднюю кривизну H^* поверхности M^* через полную и среднюю кривизны K и H поверхности M.

758. Дана поверхность M постоянной средней кривизны H. На всех ее нормалях отложены отрезки длиной $\frac{1}{2H}$ по одну сторону от поверхности. Доказать, что у построенной таким образом поверхности, «параллельной» данной, полная кривизна постоянна, и вычислить ее.

759. Дана поверхность M постоянной положительной полной кривизны K. На всех ее нормалях отложены отрезки $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Доказать, что средняя кривизна построенной таким образом поверхности постоянна, и вычислить ее.

760. Доказать, что в соответствующих точках у двух «параллельных» поверхностей M и M^* полные и средние кривизны связаны соотношением

$$\frac{H^2-K}{K^2}=\frac{H^{*2}-K^*}{K^{*2}}.$$

§ 33. ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ КРИВИЗНЫ. ТИПЫ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ

Литература: [2], § 59.

761. Найти главные направления в произвольной точке $A(u, v)$ поверхностей из задачи 737.

Решение. и) Главными направлениями поверхности в точке $A(u, v)$ являются направления касательных векторов $\vec{p}$ к кривым поверхности, для которых нормальная кривизна k_n принимает экстремальные значения. Направление вектора $\vec{p}(p_1, p_2)$ определяется отношением $\theta=p_2:p_1$. В частности, направлением вектора $\vec{f}(t)$ будет отношение $\theta=v':u'$, а вектора $d\vec{r}-\theta=dv:du$. Главные направления могут быть найдены из формул

$$\begin{vmatrix} -dv & dudv & -du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0 \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} -\theta^2 & \theta & -1 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0.$$

В данной задаче (см. решение задачи 737, и) это уравнение принимает вид:

$$\begin{vmatrix} -\theta^2 & \theta & -1 \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

или $\theta^2(u^2+a^2)-1=0$, откуда находим главные направления:

$$\theta_1=\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}, \quad \theta_2=-\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}.$$

Касательным вектором с направлением θ_1 является, например, вектор $\vec{r}_u+\theta_1\vec{r}_v$ с внутренними координатами $\left(1, \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)$, а с направлением θ_2 — вектор $\vec{r}_u+\theta_2\vec{r}_v$ с внутренними координатами $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)$. Следовательно,

$$\vec{p}_1=\vec{r}_u+\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\vec{r}_v=\left(\cos v-\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)\vec{i}+$$
$$+\left(\sin v+\frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)\vec{j}+\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\vec{k};$$

$$\vec{p}_2=\vec{r}_u-\frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\vec{r}_v=\left(\cos v+\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)\vec{i}+$$
$$+\left(\sin v-\frac{u\cos v}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)\vec{j}-\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\vec{k}.$$

762. Найти главные кривизны в произвольной точке $A(u, v)$ поверхностей задачи 737, а — к, н — п.

Решение. и) Главные кривизны могут быть найдены как корни уравнения $k^2-2Hk+K=0$, где

$$H=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}, \quad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

(H и K — средняя и полная кривизны поверхности). В случае задачи 737, и это уравнение принимает вид:

$$k^2-\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}=0,$$

откуда главные кривизны в точке $A(u, v)$ равны соответственно

$$k_1=\frac{a}{a^2+u^2}, \quad k_2=-\frac{a}{a^2+u^2}.$$

763. Поверхности заданы как графики функции $z=f(x, y)$. Найти главные направления и главные кривизны в указанных точках.

а) $z=x^2+xy+y^2$ в точке $O(0, 0\ 0)$;

б) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ в точке $O(0, 0, 0)$;

в) $e^z\cos x=\cos y$ в точках $A(x_0, y_0, z_0)$ и $O(0, 0, 0)$.

764. Найти главные радиусы кривизны поверхности, заданной уравнением $y=x\operatorname{tg}\frac{z}{a}$, в произвольной точке.

765. Найти главные радиусы кривизны в произвольной точке:
а) гиперболического параболоида $z=xy$;
б) эллиптического параболоида $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

766. Доказать, что главные направления геликоида (см. задачу 761) делят пополам углы между направлениями образующей и винтовой линией.

767. Доказать, что у поверхности вращения параболы вокруг ее директрисы отношение главных радиусов кривизны постоянно.

768. Доказать, что на однополостном гиперболоиде биссектрисы углов между образующими имеют главные направления.

769. Доказать, что на гиперболическом параболоиде биссектрисы углов между образующими имеют главные направления.

770. Определить типы точек следующих поверхностей:

а) сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

б) эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

в) гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

г) гиперболического параболоида $2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$;

д) графика функции $z=e^y \sin x$;

е) графика функции $z=ax+\ln y$;

ж) графика функции $z=xy^2$.

Р е ш е н и е. д) Точки поверхности, в которых полная кривизна $K>0$, называются эллиптическими (рис. 80), $K<0$ — гиперболическими (рис. 81) и $K=0$ — параболическими (рис. 82).

Из решения задачи 753, а следует, что $K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}$. Так как $f_{xx}=-e^y \sin x$, $f_{xy}=e^y \cos x$, $f_{yy}=e^y \sin x$, то

$$K=\frac{-e^{2y}\sin^2 x-e^{2y}\cos^2 x}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}=\frac{-e^{2y}}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}<0.$$

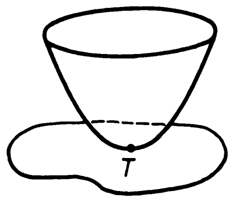


Рис. 80

Все точки поверхности гиперболические.

771. Доказать, что на цилиндрической поверхности, заданной вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=\vec{f}(u)+v\vec{a}$ (где $f(u)$ — функция класса C^2, $\vec{a}$ — постоянный вектор), нет гиперболических точек.

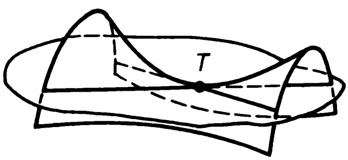


Рис. 81

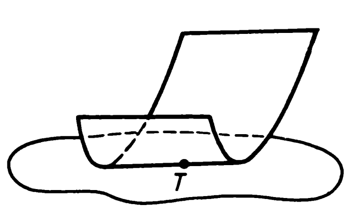


Рис. 82

§ 34. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

Литература: [2], § 61—66.

772. Поверхность задана вектор-функцией

$$\vec{r}(u, v)=(u, v, uv^2), (u, v)\in R^2.$$

Найти геодезическую кривизну кривой $u=c$, лежащей на поверхности.

Решение. Линия $u=c$ определяется вектор-функцией $\vec{f}(v)=(c, v, cv^2)$, следовательно, она принадлежит классу C^∞ и ее геодезическая кривизна вычисляется по формуле

$$k_g=\left(\vec{m}, \vec{\tau}, \frac{d\vec{\tau}}{ds}\right)=\left(\vec{m}, \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right),$$

где $\left(\vec{m}, \vec{\tau}, \frac{d\vec{\tau}}{ds}\right)$ — смешанное произведение векторов $\vec{m}$, $\vec{\tau}$ и $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$. Вектор нормали данной поверхности имеет вид:

$$\vec{m}=\frac{1}{\sqrt{v^4+4u^2v^2+1}}(-v^2, -2uv, 1).$$

Найдем векторы $\vec{\tau}=\frac{d\vec{f}}{ds}$ и $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{d^2\vec{f}}{ds^2}$ в произвольной точке данной кривой: $\vec{\tau}=\frac{d\vec{f}}{ds}=\frac{d\vec{f}}{dv}\frac{dv}{ds}=\frac{d\vec{f}}{dv}\cdot\frac{1}{|\vec{f}_v|}$; $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{d\vec{\tau}}{dv}\cdot\frac{dv}{ds}=\frac{d\vec{\tau}}{dv}\cdot\frac{1}{|\vec{f}_v|}$.

Так как $\vec{f}_v=(0, 1, 2cv)$, то $|\vec{f}_v|=\sqrt{1+4c^2v^2}$.

Следовательно, $\vec{\tau}=\frac{1}{\sqrt{1+4c^2v^2}}(0, 1, 2cv)$,

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\left(0, -\frac{4c^2v}{(1+4c^2v^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2c}{(1+4c^2v^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\frac{1}{(1+4c^2v^2)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\left(0, \frac{-4c^2v}{(1+4c^2v^2)^2}, \frac{2c}{(1+4c^2v^2)^2}\right).$$

Теперь можем вычислить геодезическую кривизну в произвольной точке кривой $u=c$:

$$k_g=\left(\vec{m}, \vec{\tau}, \frac{d\vec{\tau}}{ds}\right)=\begin{vmatrix} -v^2 & -2cv & 1 \\ 0 & 1 & 2cv \\ 0 & -2cv & 1 \end{vmatrix}\cdot$$

$$\frac{2c}{\sqrt{v^4+4c^2v^2+1}\sqrt{1+4c^2v^2}(1+4c^2v^2)^2}=$$

$$=\frac{-2cv^2(1+4c^2v^2)}{\sqrt{v^4+4c^2v^2+1}\sqrt{1+4c^2v^2}(1+4c^2v^2)^2}=\frac{-2cv^2}{\sqrt{v^4+4c^2v^2+1}(1+4c^2v^2)^{3/2}}.$$

773. Найти геодезическую кривизну винтовой линии $u=c$, лежащей на геликоиде, заданном вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=$ $=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$.

774. Найти геодезическую кривизну окружности радиуса r, лежащей на сфере радиуса R.

775. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями. В каком случае параллели будут геодезическими линиями?

Решение. Поверхность вращения симметрична относительно любого осевого сечения. Меридиан является пересечением осевого сечения с поверхностью вращения. Следовательно, геодезическая линия, касающаяся меридиана, симметрична относительно плоскости осевого сечения Так как через каждую точку поверхности в данном направлении проходит единственная геодезическая линия, то она совпадает с меридианом.

Параллель является геодезической линией тогда и только тогда, когда ее нормаль совпадает с нормалью к поверхности. Нормаль параллели перпендикулярна к оси вращения и пересекает ее. Касательная плоскость в точке параллели перпендикулярна нормали параллели. Значит, касательная к меридиану в этой точке перпендикулярна нормали параллели. Следовательно, касательная к меридиану параллельна оси вращения.

776. Доказать, что всякая прямая на поверхности является геодезической линией.

777. Поверхность задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$. Доказать, что уравнение $(\vec{m}, d\vec{r}, d^2\vec{r})=0$ является дифференциальным уравнением геодезических линий этой поверхности.

Решение. Линия γ будет геодезической, если в каждой ее точке геодезическая кривизна равна нулю, т. е. $k_g=\left(\vec{m}, \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)=0$. Следовательно, решением дифференциального уравнения $(\vec{m}, d\vec{r}, d^2\vec{r})=0$ будет функция, определяющая геодезическую линию.

778. Найти геодезические линии следующих поверхностей: а) кругового цилиндра; б) кругового конуса; в) сферы; г) прямого геликоида.

Решение. в) Окружности больших кругов являются геодезическими линиями сферы (см. указание к задаче 774). Через каждую точку сферы в любом направлении проходит большой круг. Значит, все геодезические линии являются окружностями больших кругов.

г) Прямой геликоид задается вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=$ $=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$. Решением дифференциального уравнения $(\vec{m}, d\vec{r}, d^2\vec{r})=0$ (см. задачу 777) будет функция, определяющая геодезическую линию. Преобразуем это смешанное произведение. В качестве нормального вектора (необязательно единичного) возьмем вектор $\vec{m}=(a\sin v,\ -a\cos v,\ u)$. Пусть геодезическая линия в координатах задается уравнениями $u=u(t)$, $v=v(t)$. Тогда

$$\frac{dr}{dt}=(u'\cos v-v'u\sin v,\ u'\sin v+v'u\cos v,\ av');$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=(u''\cos v-2u'v'\sin v-v''u\sin v-(v')^2u\cos v,$$
$$u''\sin v+2u'v'\cos v+v''u\cos v-(v')^2\,u\sin v,\ av'').$$

Вычислим смешанное произведение $(\vec{m},\ d\vec{r},\ d^2\vec{r})$, получим

$$\left(\vec{m},\ \frac{d\vec{r}}{dt},\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)=-u''v'(u^2+a^2)+u'v''(u^2+a^2)+(v')^3u(u^2+a^2)+$$
$$+2(u')^2v'u.$$

Таким образом, уравнение $(\vec{m},\ d\vec{r},\ d^2\vec{r})=0$ имеет вид:

$$v'u''-v''u'-\frac{2u}{u^2+a^2}v'(u')^2-(v')^3u=0. \qquad (1)$$

Легко видеть, что линия $v=\text{const}$ удовлетворяет этому уравнению (изменение функции u отвечает только различным параметризациям этой линии). Через каждую точку геликоида проходит такая геодезическая линия. Рассмотрим какую-нибудь геодезическую линию, не принадлежащую этому семейству. Так как через каждую точку в данном направлении проходит ровно одна геодезическая линия, то направление нашей линии отличается от направления линии $v=\text{const}$, а поэтому мы можем выбрать на ней параметризацию с помощью функции v, т. е. задать ее функцией $u=u(v)$. В этом случае $v'=1$, $v''=0$ и уравнение (1) превращается в уравнение

$$u''-\frac{2u}{u^2+a^2}(u')^2-u=0.$$

Сделаем замену параметра $u=a\operatorname{tg}\alpha$. Тогда $u'=\frac{a}{\cos^2\alpha}\alpha'$, $u''=2a\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha}(\alpha')^2+\frac{a\alpha''}{\cos^2\alpha}$. Уравнение преобразуется в уравнение

$$\alpha''-\sin\alpha\cos\alpha=0, \qquad (2)$$

$\alpha=\frac{\pi}{2}k$ является решением этого уравнения. Предположим, что у некоторого решения в точке v_0 $\alpha''(v_0)=\alpha'(v_0)=0$. Тогда $\alpha(v_0)=$ $=\frac{\pi}{2}k$, где k — целое число, а так как существует ровно одно решение дифференциального уравнения второго порядка, то это решение совпадает с $\alpha=k\frac{\pi}{2}$. Поэтому у любого другого решения если $\alpha'(v_0)=0$, то $\alpha''(v_0)\neq 0$, т. е. в соседних точках $\alpha'\neq 0$. Отсюда следует, что на соответствующей геодезической линии мы можем везде, кроме отдельных точек, выбрать в качестве параметра α и можем выразить $\alpha'(v)=\beta(\alpha(v))$, где β — некоторая функция. Тогда

$$\alpha''(v)=\frac{d}{dv}(\alpha'(v))=\frac{d}{dv}(\beta(\alpha(v)))=\frac{d\beta(\alpha(v))}{d\alpha}\alpha'(v)=\beta(\alpha(v))\frac{d\beta(\alpha(v))}{d\alpha}.$$

Поэтому мы получаем для β дифференциальное уравнение

$$\beta(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\beta(\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha=0, \text{ т. е.}$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\beta^2(\alpha))=\sin 2\alpha,\ \beta^2(\alpha)=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+c,\ \beta=\pm\sqrt{c_1-\cos^2\alpha}.$$

Мы получаем для $\alpha(v)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dv}\alpha(v)=\pm\sqrt{c_1-\cos^2\alpha(v)}, \quad \text{т. е. } dv=\pm\frac{d\alpha}{\sqrt{c_1-\cos^2\alpha}}.$$

Таким образом, решениями уравнения (2) будут $\alpha=\frac{\pi}{2}k$ и

$$v-v_0=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{c_1-\cos^2 t}}.$$

Перейдя обратно к переменной u, получим, что решениями (1) будут $u=0$. И так как

$$\frac{d\operatorname{arctg}\frac{u}{a}}{\sqrt{c-\cos^2\operatorname{arctg}\frac{u}{a}}}=\frac{1}{a}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)\sqrt{c-\frac{1}{1+u^2/a^2}}}=\frac{a\,du}{\sqrt{(a^2+u^2)(c-1)a^2+cu^2}},$$

то остальные решения задаются формулой

$$v-v_0=\int_{u_0}^{u}\frac{a\,dt}{\sqrt{(a^2+t^2)((c-1)a^2+ct^2)}}.$$

Итак, геодезические на геликоиде следующие:

$$v=\text{const},\ u=0,\ v-v_0=\int_{u_0}^{u}\frac{a\,dt}{\sqrt{(a^2+t^2)((c-1)a^2+ct^2)}}.$$

779. На сфере радиуса r дан криволинейный треугольник, стороны которого — дуги больших окружностей сферы, а его площадь равна σ. Найти сумму внутренних углов этого треугольника.

Решение. Так как дуги больших окружностей сферы — геодезические линии, то мы можем воспользоваться следующим вариантом формулы Гаусса — Бонне: $\sum_{i=1}^{3}(\pi-\alpha_i)=2\pi-\iint\limits_{\Delta}K\,d\sigma$, где α_i — внутренние углы нашего треугольника Δ, K — гауссова кривизна сферы, равная $\frac{1}{r^2}$, т. е. $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\pi+\frac{\sigma}{r^2}$.

780. На псевдосфере дан криволинейный треугольник, стороны которого — геодезические линии, а его площадь равна σ. Найти сумму внутренних углов этого треугольника.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

14. Достаточно построить образы двух точек данной прямой. Искомая прямая проходит через эти образы.

15. Центр искомой окружности является образом центра данной окружности при центральной симметрии относительно точки O. Радиус образа совпадает с радиусом прообраза.

17. Найдите образы двух точек данной прямой.

18. Постройте образ центра данной окружности. Радиус образа окружности равен радиусу прообраза.

20. См. указание к задаче 17.

21. См. указание к задаче 18.

23. См. указание к задаче 17.

24. См. указание к задаче 18.

32. См. [1], § 103.

35. См. [1], § 103.

56. Пусть треугольник ABC искомый. Достройте его до параллелограмма (рис. 83). Сведите задачу к построению треугольника ACD.

57. Пусть треугольник ABC искомый. Постройте $\angle CBD$, равный $\angle C$, отложите отрезок BD, равный $\tilde{b}$ (рис. 84). Сведите построение треугольника ABC к построению треугольника ABD.

58. Пусть треугольник ABC искомый. На стороне AC отложите отрезок CD, равный CB. Выразите $\angle ADB$ через $\angle A$ и $\angle B$.

60. Пусть треугольник ABC искомый, O — центр вписанной окружности. Выразите $\angle BOC$ через $\angle A$.

62. Пусть a — данная прямая, α — данная окружность, O — ее центр, $OM \perp a$, $M \in a$ (рис. 85). Докажите, что точка M — середина стороны QR искомого квадрата. Постройте $\angle QMP$.

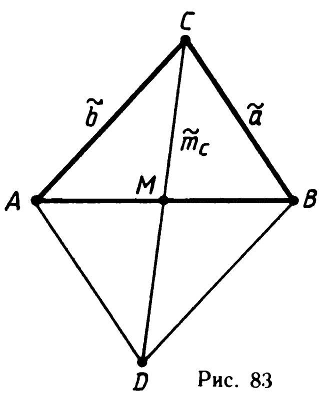


Рис. 83

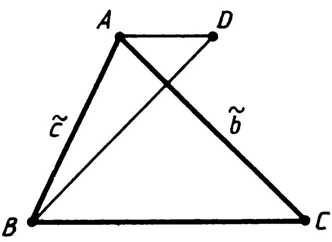


Рис. 84

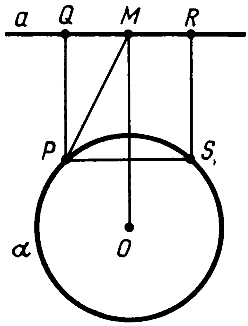


Рис. 85

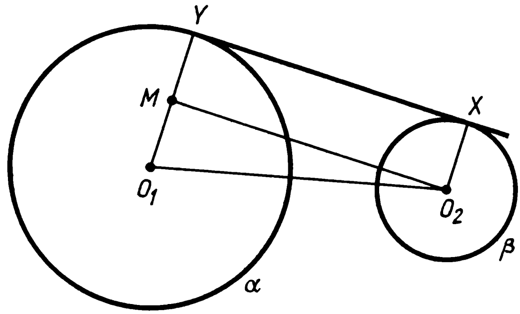


Рис. 86

63. Пусть α и β — данные окружности, O_1 и O_2 — их центры, XY — искомая касательная (рис. 86). Через точку O_2 проведите прямую, параллельную XY. Постройте треугольник O_1MO_2.

64. Сведите задачу к построению прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна отрезку между центрами данных окружностей, а катет — половина данной суммы.

73. Докажите, что точка тогда и только тогда принадлежит радикальной оси двух окружностей, когда разность квадратов расстояний между этой точкой и центрами окружностей равна разности квадратов радиусов.

80. Пусть AB — искомая хорда, $[PA]-[PB]=\tilde{m}$, где $\tilde{m}$ — данный отрезок. Отложите на хорде AB от точки A отрезок $[AX]$, равный $[PB]$. Сведите задачу к построению точки X.

90. Пусть $(O, \tilde{r})$ — данная окружность α. Через точку A проведите прямую h, перпендикулярную l. Отложите на этой прямой от точки A отрезок AB, равный $\tilde{r}$. Тогда центр искомой окружности равноудален от точек B и O.

91. Сведите решение к задаче 90.

92. Воспользуйтесь задачей 68.

93. Воспользуйтесь задачей 69.

106. Пусть ABC — искомый треугольник, O — центр его вписанной окружности. Выразите $\angle BOC$ через $\angle BAC$.

109. Пусть X — искомая точка, O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Выразите $\angle O_1XO_2$ через данную сумму углов.

111. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 87). Продолжите медиану AM, отложите отрезок MA', равный $[AM]$. Определите $\angle A'CA$. Сведите задачу к построению точки C.

121. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC $\tilde{h}_b:\tilde{h}_c=\tilde{c}:\tilde{b}$.

127. Воспользуйтесь задачей 74.

128. Воспользуйтесь указанием к задаче 127.

129. Воспользуйтесь задачами 71 и 73.

138. Пусть l — прямая AB, M и N — данные точки, X — искомая точка (рис. 88), $\angle NXA=2\angle MXB$. Тогда прямая XN касается окружности с центром в точке M', симметричной M относительно l, и радиуса, равного $\frac{1}{2}[MM']$.

144. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой CD. Выразите величину угла $A'XB$ через разность углов AXC и BXD.

145. Сведите задачу к задаче 144.

146. Докажите, если $[AL]$ — биссектриса $\angle A$ треугольника ABC, то $\angle C-\angle B=\angle ALB-\angle ALC$. Сведите задачу к задаче 145.

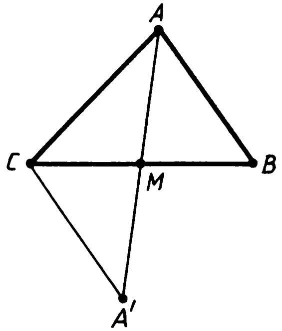


Рис. 87

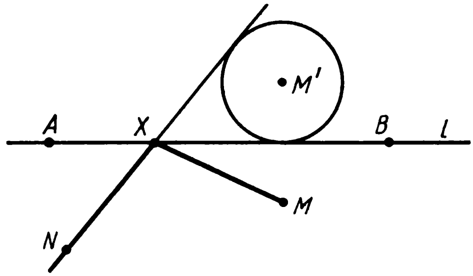


Рис. 88

153. Пусть X — искомая точка (рис. 89), A' — точка, симметричная A относительно E. Тогда прямые $A'Q$ и AX параллельны между собой. Определите $\angle A'QB$ и воспользуйтесь основным множеством 6° (см. § 3).

154. Пусть α и β — данные окружности, O и Q — их центры, A — точка их пересечения (рис. 90). Пусть CD — искомая секущая. Постройте точку Q', симметричную Q относительно A, затем окружность γ с центром в Q' и радиусом, равным половине данного отрезка, проведите касательную OM к γ. Докажите, что прямые CD и OM перпендикулярны между собой.

159. Пусть четырехугольник $ABCD$ искомый, $[AB]=\tilde{a}$, $[BC]=\tilde{b}$, $[CD]=\tilde{c}$ — данные отрезки. Сведите задачу к размещению отрезка, равного и параллельного $[CD]$, между окружностью $\alpha=(B, \tilde{b})$ и прямой AD.

160. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник, $[AD]=\tilde{a}$ и $[BC]=\tilde{b}$ — данные противоположные стороны, $[AC]=\tilde{m}$ и $[BD]=\tilde{n}$ — данные диагонали. Сведите решение к размещению отрезка, равного и параллельного $[BC]$, между двумя окружностями

$$\alpha=(A, \tilde{m}) \text{ и } \beta=(B, \tilde{n}).$$

161. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник, $[AB]=\tilde{a}$, $[BC]=\tilde{b}$, $[CD]=\tilde{c}$, $[AD]=\tilde{d}$ — искомые стороны, угол α равен углу между сторонами BC и AD.

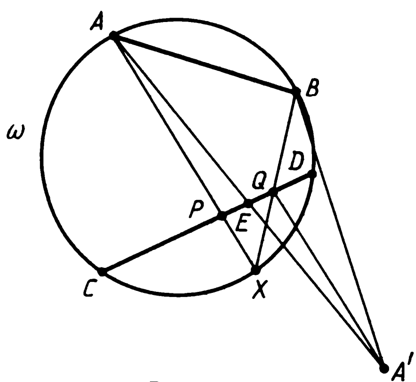


Рис. 89

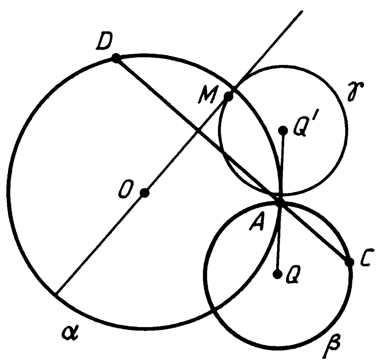


Рис. 90

Сведите решение к размещению отрезка, равного и параллельного $[BC]$, между двумя окружностями $\alpha=(A, \tilde{a})$ и $\beta=(D, \tilde{c})$.

162. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник, $[AD]=\tilde{a}$, $[BC]=\tilde{b}$ — противоположные стороны, $[AC]=\tilde{m}$ и $[BD]=\tilde{n}$ — данные диагонали. Сведите решение к размещению отрезка, равного и параллельного $[BD]$, между двумя окружностями $\alpha=(A, \tilde{a})$ и $\beta=(C, \tilde{b})$.

168. Пусть ABC — искомый треугольник, AM, BN и CP — данные медианы, O — их точка пересечения. Перенесите отрезок BO на вектор $\overrightarrow{OC}$.

171. Пусть ABC — искомый треугольник, AM, BN и CP — его медианы, O — их точка пересечения. Осуществите параллельный перенос отрезка OC на вектор $\overrightarrow{OB}$. Воспользуйтесь задачей 104.

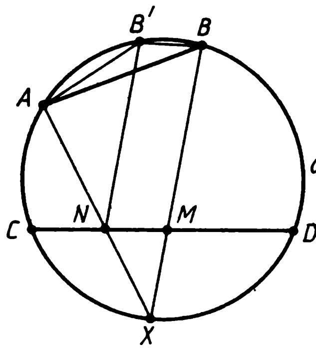


Рис. 91

172. Пусть X — искомая точка (рис. 91). Осуществите параллельный перенос точки B на вектор $\overrightarrow{MN}$. Получите точку B'. Определите угол ANB' и воспользуйтесь множеством 6° (см. § 3).

173. Предположим, что задача решена, секущая l искомая (рис. 92). Перенесите окружность ω_2 на вектор $\overrightarrow{QN}$, получите окружность ω_2' с центром в точке O_2'. Докажите, что $(O_1O_2')\perp l$, а отрезки касательных, проведенных из точки A к окружностям ω_1 и ω_2', равны между собой. Определите множества, содержащие точку O_2'.

184. Проведите произвольный луч с началом в точке O. На отрезке этого луча, заключенном между двумя данными концентрическими окружностями, постройте множество точек плоскости, из которых этот отрезок виден под данным углом. Определите угол, на который следует повернуть луч, чтобы точка A принадлежала этому множеству.

185. Поверните вокруг точки A на $\angle\varphi$ одну из окружностей и воспользуйтесь задачей 173.

197. Пусть треугольник ABC искомый (рис. 93). Тогда из подобия треугольников CAP и CQB вытекает, что $\tilde{h}_a:\tilde{h}_b=[CA]:[CB]$. Таким образом, задачу можно переформулировать так: даны четыре отрезка: $\tilde{m}$, $\tilde{n}$, $\tilde{h}_a$, $\tilde{h}_b$, требуется построить треугольник ABC, для которого $\tilde{a}:\tilde{c}=\tilde{m}:\tilde{n}$, $\tilde{a}:\tilde{b}=\tilde{h}_b:\tilde{h}_a$, отрезок $\tilde{h}_a$ является высотой $\angle A$.

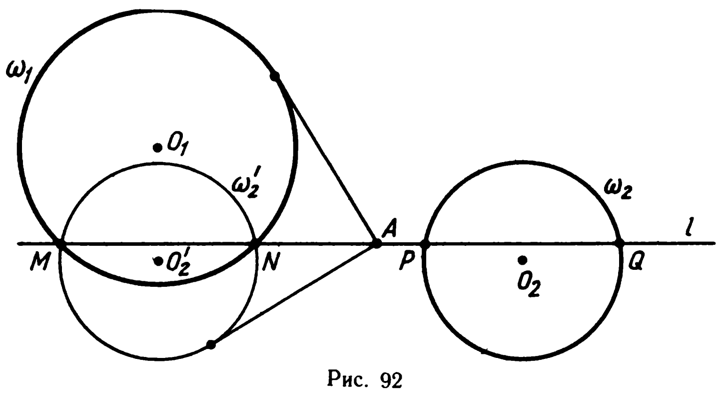


Рис. 92

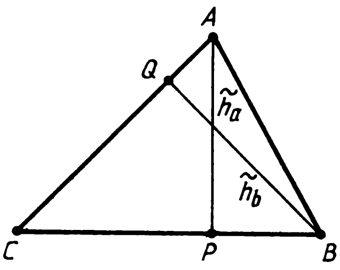


Рис. 93

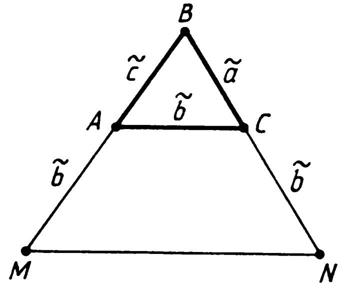


Рис. 94

200. Возьмите произвольный отрезок $\tilde{c}'$, постройте отрезок $\tilde{h}'_c$ так, чтобы $\tilde{c}':\tilde{h}'_c=\tilde{c}:\tilde{h}_c$. Постройте, используя множество 7^0 (см. § 3), треугольник $A'B'C'$, для которого $[A'B']=\tilde{c}'$, высота вершины C' равна $\tilde{h}'_c$, $\tilde{a}':\tilde{b}'=\tilde{a}:\tilde{b}$.

216. Пусть треугольник ABC искомый (рис. 94). Отложите на продолжении сторон AB и BC отрезок $\tilde{b}$. Воспользуйтесь задачей 215.

218. Осуществите симметрию данной прямой относительно серединного перпендикуляра заданных точек. Сведите решение к задаче 217.

219. Данная и искомая окружности гомотетичны относительно точки касания. Найдите образы данных прямых при этой гомотетии. Затем определите ее центр.

230. Воспользуйтесь следующей теоремой: две окружности ортогональны между собой тогда и только тогда, когда одна из них проходит через пару точек, инверсных относительно другой.

231. См. указание к задаче 230.

234. Примите данную точку за центр инверсии, воспользуйтесь задачей 159.

235. См. указание к задаче 234.

244. Примите точку касания двух данных окружностей за центр инверсии. Воспользуйтесь задачей 219.

245. Увеличьте радиусы данных окружностей на один и тот же отрезок так, чтобы две окружности касались между собой. Воспользуйтесь задачей 244.

268. г) Для того чтобы разделить окружность на 10 частей, достаточно построить равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна радиусу окружности, а угол при вершине составляет 36°. Воспользуйтесь тем, что биссектриса угла основания такого треугольника отсекает подобный ему треугольник.

269. Воспользуйтесь формулой: площадь треугольника S равна $S=pr$, где p — полупериметр, r — величина радиуса вписанной окружности.

274. Предварительно докажите следующее утверждение: биссектриса угла треугольника делит пополам угол между высотой того же угла и радиусом описанной окружности, проведенным в его вершину.

279. Докажите, что если O — центр описанной окружности треугольника ABC, M, L и H — точки пересечения прямых, содержащих соответственно медиану $\tilde{m}_a$, биссектрису $\tilde{l}_a$ и высоту $\tilde{h}_a$ с описанной окружностью, то прямые OL и AH параллельны между собой и точка пересечения OL и AM совпадает с серединой стороны BC.

280. Докажите, что если ABC — квадрат, M и N — произвольные точки сторон AB и AD, ω — окружность, построенная на MN как на диаметре, то точка пересечения ω и диагонали AC совпадает с серединой дуги $\smile{MN}$.

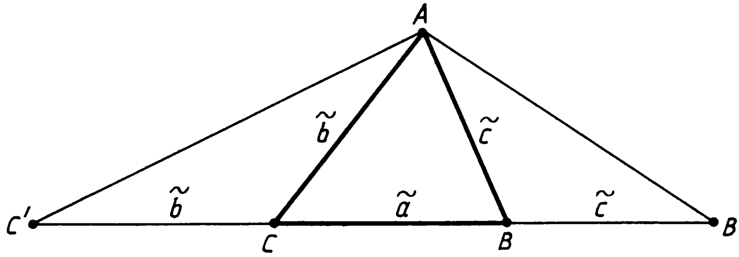


Рис. 95

282. Пусть X — искомая точка. Используя площади треугольников AXB, AXC, BXD и CXD, найдите $[AX]:[DX]$, $[BX]:[CX]$. Затем используйте окружность Аполлония (множество 7°, § 3).

283. Докажите, что центр искомой окружности лежит на множестве 8° (см. § 3), определяемом центрами данных окружностей.

285. Распрямите треугольник так, как показано на рисунке 95. Выразите $\angle B'$ и $\angle C'$ треугольника $AB'C'$ через $\angle B$ и $\angle C$.

286. Распрямите треугольник так, как показано на рисунке 95.

287. Пусть X — искомая точка. Продолжите отрезок AX и отложите на нем отрезок XY, равный $[XB]$. Выразите $\angle AYB$ через $\angle AXB$.

288. Используя радиусы, найдите углы треугольника. Далее воспользуйтесь методом подобия.

290. Сведите задачу к построению равнобочной трапеции по боковой стороне, средней линии и углу между основанием и диагональю.

292. Воспользуйтесь «методом обратности». Вокруг треугольника DEF опишите треугольник, равный ABC. Сведите задачу к задаче 64.

293. Воспользуйтесь «методом обратности».

294. Воспользуйтесь «методом обратности».

295. Воспользуйтесь «методом обратности».

296. Воспользуйтесь «методом обратности».

297. Воспользуйтесь «методом обратности».

299. Сведите задачу к задаче 144.

300. Пусть AE — искомая прямая, ω_1 и ω_2 — данные окружности (рис. 96). Осуществите параллельный перенос окружности ω_1 на вектор $\overrightarrow{BD}$. Докажите, что $|BD| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - (r_2 - r_1)^2} - \frac{1}{2}|\tilde{a}|$, где r_1 и r_2 — величины радиус-ок-

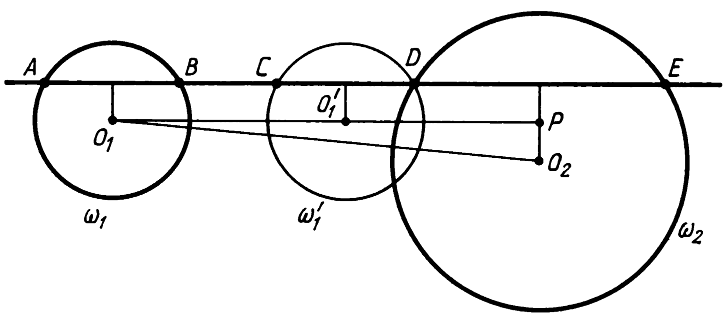


Рис. 96

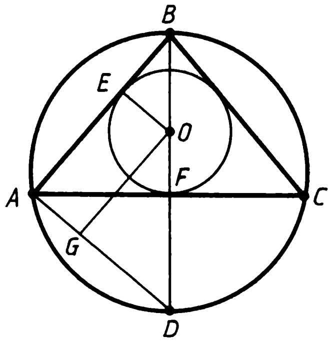


Рис. 97

ружностей ω_1 и ω_2, $\tilde{a}$ — данный отрезок, равный сумме $[AB]+[DE]$.

302. Пусть треугольник ABC искомый (рис. 97), O — центр вписанной окружности, $\tilde{r}$ и $\tilde{R}$ соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. $[OE]=[OF]=\tilde{r}$, $[BD]=2\tilde{R}$, OG — перпендикуляр, опущенный из O на AD. Так как $\angle BAD$ прямой, то четырехугольник $AEOG$ — прямоугольник. Докажите, что треугольник AFD равен треугольнику OGD. Обозначьте $[OB]$ через $\tilde{x}$, $[OD]$ через $\tilde{y}$. Из подобия $\triangle AFD$ и $\triangle BEO$ получите, что $\tilde{x}\tilde{y}=2\tilde{R}\tilde{r}$. Так как $\tilde{x}+\tilde{y}=2\tilde{R}$, то, решив систему

$$\begin{cases}\tilde{x}\tilde{y}=2\tilde{R}\tilde{r},\\ \tilde{x}+\tilde{y}=2\tilde{R},\end{cases}$$

постройте отрезок $\tilde{x}$, затем искомый треугольник.

307. Воспользуйтесь аффинной эквивалентностью изображения и оригинала. Точка пересечения диагоналей делит диагонали оригинала в том же отношении, что и ее изображение делит диагонали изображения.

322. Постройте поляру точки относительно эллипса.

323. Пусть O — изображение центра окружности $\bar{O}$, AB и CD — изображения ортогональных диаметров $\bar{A}\bar{B}$ и $\bar{C}\bar{D}$ окружности $\bar{\gamma}$ (рис. 98). Через точки A и B проведите прямые, параллельные CD, а через C и D — параллельные AB. Получите параллелограмм $KLMN$, который является изображением квадрата $\bar{K}\bar{L}\bar{M}\bar{N}$, описанного около данной окружности $\bar{\gamma}$. Пусть $\bar{R}\in\bar{\gamma}$, $\bar{P}=\bar{A}\bar{R}\cap\bar{K}\bar{L}$, $\bar{Q}=\bar{R}\bar{B}\cap\bar{C}\bar{D}$. Так как $\bar{A}\bar{R}\bar{B}=\frac{\pi}{2}$, то $\angle\bar{A}\bar{B}\bar{R}$ и $\angle\bar{R}\bar{A}\bar{K}$ равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Кроме того, $\bar{A}\bar{K}=\bar{O}\bar{B}$. Значит, $\triangle\bar{O}\bar{B}\bar{Q}=\triangle\bar{A}\bar{K}\bar{P}$. Из равенства треугольников следует, что $\bar{K}\bar{P}=\bar{O}\bar{Q}$ и $\bar{P}\bar{C}=\bar{C}\bar{Q}$, и, значит, $\bar{K}\bar{O}$ и $\bar{P}\bar{Q}$ параллельны. Так как при параллельном проектировании сохраняется параллельность прямых, то KO и PQ должны быть параллельны. Отсюда следует способ построения точки R.

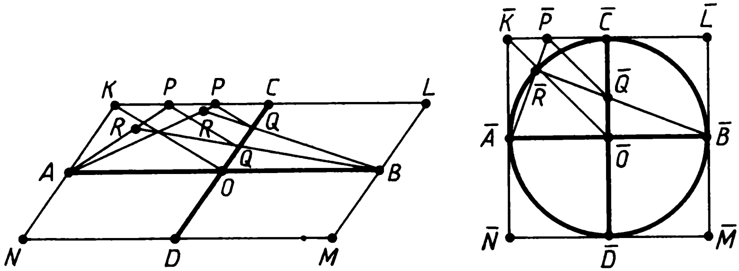


Рис. 98

Построение. Строим:

1) KO;
2) произвольную точку $P \in KL$;
3) $PQ \parallel KO$, $Q \in CD$;
4) $R = AP \cap BQ$.

364. а) 1; б) 1; в) 3; г) 2.

368. Присоедините к изображению репер (A, B, D, A'). Найдите вторичные проекции M_3 и N_3 данных точек.

379. Постройте сечения призмы данными плоскостями. Рассмотрите общие точки сечений.

380. См. указание к задаче 379.

384. Изображение: б) евклидово определенное. Для метрической определенности необходимо ввести один параметр;

в) метрически определенное;

г) евклидово определенное. Для метрической определенности необходимо ввести один параметр;

д) не является метрически или евклидово определенным. Для евклидовой определенности необходимо ввести еще один параметр, для метрической определенности — два параметра;

е) евклидово определенное. Для метрической определенности необходимо ввести один параметр;

ж) метрически определенное;

з) евклидово определенное. Для метрической определенности необходимо ввести еще один параметр;

к) не является ни евклидово, ни метрически определенным. Для евклидовой определенности необходимо ввести еще один параметр, для метрической определенности — два;

л) евклидово определенное. Для метрической определенности необходимо ввести один параметр;

м) метрически определенное.

396. Воспользуйтесь тем, что основания высот, проведенных из двух вершин A и B, лежат на окружности, построенной на AB как на диаметре.

407. Из точки A опустите перпендикуляр AH на ребро SC. Линии пересечения HM и HN секущей плоскости с гранями BCS и DCS будут перпендикулярны ребру SC.

415. Опустите из вершины B перпендикуляр BH на ребро DC. Докажите, что плоскости ABH и BDC перпендикулярны между собой.

428. Точка принадлежит биссектральной плоскости горизонтальной и вертикальной плоскостей.

430. Прямая принадлежит биссектральной плоскости, горизонтальной и вертикальной плоскостям.

440. Найдите следы прямых $\bar{M}\bar{N}$ и $\bar{M}\bar{P}$.

441. Прямая пересечения плоскостей определяется точками пересечения следов s_h и t_h и s_v и t_v.

443. Постройте следы t_h и t_v плоскости $\bar{\beta}$, проходящей через $\bar{M}\bar{N}$ и перпендикулярной горизонтальной плоскости H, используйте при этом, что t_v перпендикулярна прямой X пересечения H и вертикальной плоскости V. Затем определите прямую $\bar{l}(l_1, l_2)$ пересечения плоскостей $\bar{\pi}$ и $\bar{\beta}$. Проекция X_2 искомой точки X совпадает с пересечением прямых l_2 и M_2N_2.

454. На множестве $T = \{a, b, c\}$ можно ввести следующие топологические структуры: 1) $\varnothing$, T; 2) T, $\varnothing$, $\{a\}$; 3) T, $\varnothing$, $\{b\}$; 4) T, $\varnothing$, $\{c\}$; 5) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b, c\}$; 6) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{a, c\}$; 7) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{a, b\}$; 8) T, $\varnothing$, $\{b\}$, $\{a, b\}$; 9) T, $\varnothing$, $\{b\}$, $\{a, c\}$; 10) T, $\varnothing$, $\{b\}$, $\{b, c\}$; 11) T, $\varnothing$, $\{c\}$, $\{a, b\}$; 12) T, $\varnothing$, $\{c\}$, $\{a, c\}$; 13) T, $\varnothing$, $\{c\}$, $\{b, c\}$; 14) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$; 15) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$; 16) T, $\varnothing$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{b, c\}$; 17) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$; 18) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$; 19) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$; 20) T, $\varnothing$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$; 21) T, $\varnothing$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$; 22) T, $\varnothing$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$; 23) дискретная топология.

456. Указание. Доказать, что однозначное множество является открытым. Рассмотреть множество, дополнение которого до T состоит из конечного числа элементов.

457. Система интервалов

$$U_n=\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[.$$

459. T, $\varnothing$, $\{b\}$.

460. $\{b\}$.

463. Система отрезков $I_n=\left[-2+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right]$.

464. $\{M(x, y)|a\leqslant x\leqslant b,\ c<y<d\}$.

465. а) Открытое множество; б), в), г) множество не является ни открытым, ни замкнутым; д) замкнутое множество.

466. а) Открытое множество; б), г) замкнутое множество; в), д) множество не является ни открытым, ни замкнутым.

468. Например, гипербола и ее асимптота.

469. Например, две числовые последовательности $\{n\}$ и $\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$, $n\geqslant 2$.

470. б) $\operatorname{int} T=\{N(x, y)|x^2+y^2<r^2\}$, $\partial T=\{P(x, y)|x^2+y^2=r^2\}$, $\operatorname{ext} T=\{Q(x, y)|x^2+y^2>r^2\}$; в) $\operatorname{int} T=\varnothing$, $\partial T=\{P(x, y)|x^2+y^2=r^2\}$, $\operatorname{ext} T=\{Q(x, y)|x^2+y^2\neq r^2\}$.

471. а), б), в) $\operatorname{int}=]a, b[$, $\partial T=\{a\}\cup\{b\}$, $\operatorname{ext} T=]-\infty, a[\cup]b, \infty[$; г), д) $\operatorname{int} T=]a, \infty[$, $\partial T=\{a\}$, $\operatorname{ext} T=]-\infty, a[$; е), ж) $\operatorname{int} T=\operatorname{ext} T=\varnothing$, $\partial T=E_1$.

472. а) Окружность $\{M(x, y)|x^2+y^2=r^2\}$;

б) открытый круг $\{M(x, y)|x^2+y^2<r^2\}$;

в) замкнутый круг $\{M(x, y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$;

г) окружность $\{M(x, y)|x^2+y^2=r^2\}$;

д) интервал $\{M(x, y)|y=0,\ a<x<b\}$;

е) множество точек плоскости, составляющие ось $Ox\,\{P(x, y)|y=0,\ x\in]-\infty, +\infty[\}$;

ж) множество точек плоскости, не принадлежащих оси Ox $\{P(x, y)|y\neq 0,\ x\in]-\infty, +\infty[\}$.

473. б) $\operatorname{int} T=\{M(x, y)|x^2+y^2<r^2\}$, $\partial T=\{N(x, y)|x^2+y^2\geqslant r^2\}$, $\operatorname{ext} T=\varnothing$; в) $\operatorname{int} T=\varnothing$, $\partial T=\{N(x, y)|x^2+y^2\geqslant r^2\}$, $\operatorname{ext} T=\{P(x, y)|x^2+y^2<r^2\}$; г) $\operatorname{int} T=\varnothing$, $\partial T=T$, $\operatorname{ext} T=\{N(x, y)|x^2+y^2<r^2\}$; д) $\operatorname{int} T=\varnothing$, $\partial T=\{P(x, y)|x^2+y^2\geqslant a^2\}$, $\operatorname{ext} T=\{N(x, y)|x^2+y^2<a^2\}$; е) $\operatorname{int} T=\{M(x, y)|x^2+y^2<a^2\}$, $\partial T=\{N(x, y)|x^2+y^2\geqslant a^2\}$, $\operatorname{ext} T=\varnothing$.

474. а) $\operatorname{int} T=T$, $\partial T=\{N(x, y)|x=a\}$, $\operatorname{ext} T=\{P(x, y)|x<a\}$; б) $\operatorname{int} T=\varnothing$, $\partial T=E_2$, $\operatorname{ext} T=\varnothing$; в) $\operatorname{int} T=\operatorname{ext} T=\varnothing$, $\partial T=E_2$; г) $\operatorname{int} T=\varnothing$, $\partial T=\{N(x, y)|-r\leqslant x\leqslant r\}$, $\operatorname{ext} T=\{P(x, y)||x|>r\}$; д) $\operatorname{int} T=\varnothing$, $\partial T=\{N(x, y)|-a\leqslant x\leqslant a\}$, $\operatorname{ext} T=\{P(x, y)||x|>a\}$.

475. $\operatorname{int}\{a, b\}=\{a, b\}$, $\partial\{a, b\}=\{c\}$, $\operatorname{ext}\{a, b\}=\varnothing$.

476. $\operatorname{int} A=A$, $\partial A=\varnothing$, $\operatorname{ext} A=T\setminus A$.

477. $\operatorname{int} A=A$, $\partial A=T\setminus A$, $\operatorname{ext} A=\varnothing$.

480. а), б) — два пересекающихся замкнутых круга A и B: $A=\{M(x, y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$, $B=\{M(x, y)|\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2\leqslant r^2\}$; в), г) $A=\{M(x, y)|-2a\leqslant x<0,\ -a\leqslant y\leqslant a\}$, $B=\{M(x, y)|0\leqslant x\leqslant 2a,\ -a\leqslant y\leqslant a\}$.

481. б) $\bar{\omega}=\omega$; в) $\bar{\Omega}=\Omega'$, $\Omega'=\{M(x, y)|x^2+y^2\leqslant r^2\}$; г) $\bar{\Omega}'=\Omega'$; д) $\overline{\Lambda_1\cup\Lambda_2}=E_2$.

482. б) $\bar{\Omega}=\{M(x, y)||x|\leqslant r\}$; в) $\bar{l}=E_2$; г) $\bar{m}=m$.

483. а), б), в) $\bar{\Omega}=\overline{\Omega'}=l=E_2$; г) $m=\{M(x, y)|x^2+y^2\geqslant r^2\}$.

484. $\overline{\{a\}}=\{a, c\}$, $\overline{\{b\}}=\{b\}$, $\overline{\{c\}}=\{c\}$.

488. б) $M_1=\{A\}$, $M_2=\{B\}$, $M_3=\{C\}$, $M_4=\{A, B\}$, $M_5=\{A, C\}$, $M_6=\{B, C\}$, $M_7=\{A, B, C\}$, $M_8=\varnothing$; в) $M_1=\{A, B\}$, $M_2=\{C\}$, $M_3=\{A, B, C\}$, $M_4=\varnothing$.

494. Пространство нехаусдорфово.

498. $\{U_n\}$, где $U_n=\left]a+\dfrac{|b-a|}{n},\ b-\dfrac{|b-a|}{n}\right[$.

499. а), е) Компактное множество; б), в), д), ж) некомпактное множество.

501. Указание. Воспользоваться утверждением: отрезок $[a, b]$ числовой прямой является компактным множеством.

502. Система отрезков $\{I_n\}$: $I_n=[-n, n]$.

504. а) Пространство связно; б) пространство не является связным.

508. Указание. Пусть T — несвязное топологическое пространство, $T=O_1\cup O_2$, где $O_1\cap O_2=\varnothing$, O_1, O_2 — открытые множества. Используя задачу 507, доказать, что для любого α либо $T_\alpha\subset O_1$, либо $T_\alpha\subset O_2$.

513. Указание. При доказательстве необходимости следует предположить, что связное подпространство T прямой E_1 не является выпуклым. Тогда T содержит такие точки a и b, для которых отрезок, соединяющий эти точки, не лежит целиком в T. Пусть $p\in[a, b]\setminus T$. Обозначим: $u_1=\{x|x<p, x\in T\}$, $u_2=\{x|x\in T, x>p\}$. Доказать, что u_1 и u_2 — непустые, непересекающиеся, открытые в T множества.

515. L — связное подпространство.

516. Указание. Пусть M — точка окружности. Доказать, что множества $\varnothing$, E_2, $\{M\}$, $E_2\setminus\{M\}$ определяют искомую топологию.

517. б), в) Отображение является непрерывным; г) отображение не является непрерывным.

518. а), б), г) Отображение является непрерывным; в), д) отображение не является непрерывным.

519. Отображение не является непрерывным.

521. а) Отображение не является непрерывным; б) отображение является непрерывным.

528. Указание. Воспользоваться задачей 525.

530. Указание. Воспользоваться задачей 525.

531. Образом прямой $y=1$ является луч $\{M(x, y)|x=y, x\in]0, +\infty[\}$, который не замкнут.

540. а) $y=\dfrac{c-d}{a-b}x+\dfrac{ad-bc}{a-b}$; в) $y=e^x+a$; г) $y=-e^x+a$; д) $y=c\left|\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi a}{2b}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2b}\right)\right|$.

545. Указание. Пусть M' — образ точки M при данном отображении, O — начало системы координат. Доказать, что $|OM'|=\dfrac{|OM|}{r-|OM|}$. Использовать эту зависимость для вывода формул обратного преобразования.

547. Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит сфере, а $M'(x', y')$ — ее образ при стереографической проекции, то $x'=\dfrac{2rx}{2r-z}$, $y'=\dfrac{2ry}{2r-z}$.

550. Указание. Воспользоваться результатом задачи 549. Например, отрезок и интервал не гомеоморфны между собой, так как число $i(M)$ равно двум для всех точек M интервала, но не для всех точек отрезка.

552. а) Эллипсоид; б) пара слившихся плоскостей, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, параболический цилиндр; в) однополостный гиперболоид; г) пара параллельных плоскостей, двуполостный гиперболоид, гиперболический цилиндр.

561. б) $\chi(M)=0$; в) $\chi(M)=-2$; г) $\chi(M)=0$; д) $\chi(M)=0$; е) $\chi(M)=1$.

562. Указание. Использовать теорему Эйлера и утверждение: каждое ребро принадлежит двум граням, каждая вершина принадлежит минимум трем ребрам.

563. а), б) Ориентируемые многообразия; в), г) неориентируемые многообразия.

564. б) $\vec{f}+\vec{g}=(1-t, t^3+1, t-t^2), \vec{f}\cdot\vec{g}=-t, [\vec{f}\cdot\vec{g}]=(-t^5-t, 0, 1+t^4)$; в) $\vec{f}+\vec{g}=((t+1)\cos t, (t+1)\sin t, t-1)$, $\vec{f}\cdot\vec{g}=0$, $[\vec{f}\cdot\vec{g}]=(-2t\sin t, 2t\cos t, 0)$; г) $\vec{f}+\vec{g}=(\sin 2t+(\sin t)^{-1}e^t+e^{-t}, t^2-1+(t+1)^{-1}), \vec{f}\cdot\vec{g}=2\cos t+t, [\vec{f}\cdot\vec{g}]=\left(\frac{e^t}{t+1}-\frac{t^2-1}{e^t}, \frac{t^2-1}{\sin t}-\frac{\sin 2t}{t+1}, \frac{\sin 2t}{e^t}-\frac{e^t}{\sin t}\right)$; е) $\vec{f}+\vec{g}=(\sin t\cos t)^{-1}(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{f}\cdot\vec{g}=\vec{a}^2+\vec{b}^2+(\mathrm{tg}^2\, t+\mathrm{ctg}^2\, t)\,\vec{a}\vec{b}$, $[\vec{f}\cdot\vec{g}]=(\mathrm{tg}^2\, t-\mathrm{ctg}^2\, t)\,[\vec{a}\cdot\vec{b}]$.

565. б) $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})=2t\cos t(\sin t-1)+\sqrt{t}\cos^2 t$; в) $(\vec{f}, \vec{g}, \vec{h})=(-t^4+t^{\frac{5}{2}}+t^3)\times(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
Указание. Воспользоваться свойством дистрибутивности смешанного произведения векторов относительно операции сложения.

570. б) $\vec{r}\,'=(2t, \cos t, 2e^{2t})$, $\vec{r}\,''=(2, -\sin t, 4e^{2t})$; в) $\vec{r}\,'=\left(-\frac{1}{t^2}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}\right)$, $\vec{r}\,''=\left(\frac{2}{t^3}, \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)^3}}, \frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{t^7}}\right)$; г) $\vec{r}\,'=\left(\frac{1}{\cos^2 t}e^{\mathrm{tg}\, t}, -\mathrm{tg}\, t, e^t\cos e^t\right)$, $\vec{r}\,''=\left(\frac{1+\sin 2t}{\cos^4 t}e^{\mathrm{tg}\, t}, -\frac{1}{\cos^2 t}, e^t\cos e^t-e^{2t}\sin(e^t)\right)$; е) $\vec{r}\,'=-2t\sin(t^2+1)\,\vec{a}+\frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\vec{b}-\frac{1}{t^2\cos^2\frac{1}{t}}\vec{c}$, $\vec{r}\,''=-2(\sin(t^2+1)+2t^2\cos(t^2+1))\,\vec{a}-\left(\frac{\sin\sqrt{t}}{4t}+\frac{\cos\sqrt{t}}{4\sqrt{t^2}}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{t^2\cos^2\frac{1}{t}}+\frac{2\sin\frac{1}{t}}{t^4\cos\frac{1}{t}}\right)\vec{c}$.

576. $t_0=1$, $t_0=-1$.

577. Не следует. Дифференцируемость функции $|\vec{r}(t)|$ нарушается при тех значениях параметра, при которых $|\vec{r}|=0$, а $\vec{r}\,'\neq\vec{0}$.

578. Утверждение неверно. Указание. В качестве примера рассмотреть функцию $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t, 1)$.

581. а) $r'_s=(-3s^{-4}, -s^{-2}, 1)$; б) $r'_s=\left(e^s\cos e^s, -e^s\sin e^s, \frac{e^s}{\cos^2 e^s}\right)$; в) $r'_s=\left(1, -\frac{1}{s^2}, 2s\right)$.

582. б) $\vec{r}_u=\left(\cos(u+v), -2u\sin(u^2-v), \frac{1}{\cos^2(u+v)}\right)$, $\vec{r}_v=\left(\cos(u+v), \sin(u^2-v)\, \frac{1}{\cos^2(u+v)}\right)$, $\vec{r}_{u^2}=\left(-\sin(u+v), -2\sin(u^2-v)-4u^2\cos(u^2-v), \frac{2\sin(u+v)}{\cos^3(u+v)}\right)$, $\vec{r}_{v^2}=\left(-\sin(u+v), -\cos(u^2-v), \frac{2\sin(u+v)}{\cos^3(u+v)}\right)$, $\vec{r}_{uv}=\left(-\sin(u+v), 2u\cos(u^2-v), \frac{2\sin(u+v)}{\cos^3(u+v)}\right)$; в) $\vec{r}_u=\left(\frac{1}{2}(u+1)^{-1}u^{-\frac{1}{2}}, 0, -2u(1-(u^2+v^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\vec{r}_v=(0, 2(1-4v^2)^{-\frac{1}{2}}, -2v(1-(u^2+v^2)^2)^{-\frac{1}{2}})$, $\vec{r}_{u^2}=\left(-\frac{1}{4}(1+3u)\times\right.$

$\times(1+u)^{-2}u^{-\frac{3}{2}}, 0, 2\,((u^2+v^2)^2-2u^2(u^2+v^2)-1)(\sqrt{1-(u^2+v^2)^2})^{-3}), \vec{r}_{v^2}=\Big(0{,}8v(1-$ $-4v^2)^{-\frac{3}{2}},\quad 2\,((u^2+v^2)^2-2v^2(u^2+v^2)-1)(1-(u^2+v^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\Big),\quad \vec{r}_{uv}=\Big(0,\ 0,$ $\dfrac{-4uv\,(u^2+v^2)}{(\sqrt{1-(u^2+v^2)^2})^3}\Big)$; г) $\vec{r}_u=2uve^{u^2v}\vec{a}-\dfrac{1}{u}\vec{b},\ \vec{r}_v=u^2e^{u^2v}\vec{a}+\dfrac{2}{v}\vec{b},\ \vec{r}_{u^2}=2ve^{u^2v}(1+$ $+2u^2v)\,\vec{a}-\dfrac{1}{u^2}\vec{b},\ \vec{r}_{v^2}=u^4e^{u^2v}\vec{a}-\dfrac{2}{v^2}\vec{b},\ \vec{r}_{uv}=2ue^{u^2v}(1+u^2v)\,\vec{a}.$

585. а) $\vec{r}\,'=(2t+1{,}4t^3-1,\ 3t^2+6t)$; б) $\vec{r}\,'=\Big(0{,}2,\ \dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\Big)$;

в) $\vec{r}\,'=\Big(\dfrac{-\sin\sqrt{t}\cos 3t}{2\sqrt{t}}-3\cos\sqrt{t}\sin 3t,\ \dfrac{9}{2}\sqrt{t}\cos(3t\sqrt{t}),\ -3\cos(\cos 3t)\sin 3t\Big)$.

587. а) $\vec{r}_t=\Big(0,\ -2t,\ -\dfrac{2s}{(s+t)^2}\Big),\ \vec{r}_s=\Big(2,\ 2s,\ \dfrac{2t}{(s+t)^2}\Big)$; б) $\vec{r}_t=\Big(s^2,\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{s}{\sqrt[3]{t^4}},$ $0\Big),\ \vec{r}_s=\Big(2st,\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{t}},\ -\dfrac{2}{s^3}\Big)$; в) $\vec{r}_t=\Big(2ts^2,\ -\dfrac{\ln s}{(\ln t)^2}(st)^{\frac{1}{\ln t}},\ 1\Big),\ \vec{r}_s=\Big(2t^2s,\ \dfrac{(st)^{\frac{1}{\ln t}}}{s\ln t},$ $0\Big)$.

589. а) $(f\cdot\vec{r})'=(-\sin 2t,\ \cos 2t,\ \cos t)$; б) $(f\cdot\vec{r})'=\Big(-\dfrac{1}{t^2},\ \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t}},$ $\dfrac{-1}{2(t-1)\sqrt{t-1}\sqrt{t}}\Big)$; в) $(f\cdot\vec{r})'=\Big(\Big(3\ln t+\dfrac{1}{t}\Big)e^{3t},\ \dfrac{\ln t}{t},\ \dfrac{(t+1)\ln(t+1)+t\ln t}{2t\,(t+1)}\Big)$.

590. а) $(g\cdot\vec{m})_u=\Big(\dfrac{3}{2}\sqrt{u+v},\ -\dfrac{2v}{(u-v)^2},\ 2u\Big),\ (g\cdot\vec{m})_v=\Big(\dfrac{3}{2}\sqrt{u+v},\ \dfrac{2u}{(u-v)^2},$ $-2v\Big)$; б) $(g\cdot\vec{m})_u=(\cos u,\ v\cos v\,(\cos u-u\sin u),\ 0),\ (g\cdot\vec{m})_v=(0,\ u\cos u\,(\cos v-$ $-v\sin v),\ 3v^2)$.

592. а) $(\vec{m}\vec{n})'=\dfrac{5}{2}t\sqrt{t}+\dfrac{3}{2}\sqrt{t}+2t-\dfrac{1}{t^2}$; б) $(\vec{m}\vec{n})'=3(\cos 3t-\sin 3t)$; в) $(\vec{m}\vec{n})'=\dfrac{2}{t}$.

593. а) $(\vec{m}\vec{n})_u=\dfrac{1}{v},\ (\vec{m}\vec{n})_v=-\dfrac{u}{v^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{v}}$; б) $(\vec{m}\vec{n})_u=-2v\sin(2uv)-2u\sin\times$ $\times(u^2-v^2),\ (\vec{m}\vec{n})_v=-2u\sin(2uv)+2v\sin(u^2-v^2)$; в) $(\vec{m}\vec{n})_u=(\arcsin v-\arccos\times$ $\times(u+v))\dfrac{1}{1+u^2}-\dfrac{\operatorname{arcctg} u}{\sqrt{1-(u+v)^2}}-\sin u\cos v,\quad (\vec{m}\vec{n})_v=\dfrac{\operatorname{arcctg} u}{\sqrt{1-v^2}}-\dfrac{\operatorname{arctg} u}{\sqrt{1-(u+v)^2}}-$ $-\cos u\sin v.$

598. Указание. Представить вектор-функцию $\vec{r}(u,\ v)$ в виде $\vec{r}(u,\ v)=$ $=|\vec{r}|\,\vec{e},\ |\vec{e}|=1$. Использовать ортогональность векторов $\vec{e}_u$ и $\vec{e}_v$ к вектору $\vec{e}$.

600. а) $[\vec{m}\vec{n}]'=\Big(0,\ -\dfrac{1}{(t+1)^2},\ 3t^2\Big)$; б) $[\vec{m}\vec{n}]'=\Big(-\dfrac{\cos t}{\sin^2 t},\ -2\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\sin^2 t},\ 0\Big)$; в) $[\vec{m}\vec{n}]'=\Big(\dfrac{\ln t}{t}-2e^{2t}\Big)[\vec{a}\vec{b}]$.

601. а) $[\vec{m}\vec{n}]_u=(2u\cos u^2\operatorname{tg}(u+v)+\dfrac{\sin(u^2)}{\cos^2(u+v)},\quad v\sin(uv)\operatorname{tg}(u+v)-$ $-\dfrac{\cos(uv)}{\cos^2(u+v)},\quad -v\sin(uv)\cos(u^2)-2u\cos(uv)\sin(u^2)),\quad [\vec{m}\vec{n}]_v=\Big(\dfrac{\sin(u^2)}{\cos^2(u+v)},$

$u \sin(uv) \operatorname{tg}(u+v) - \dfrac{\cos(uv)}{\cos^2(u+v)}, \quad -u \sin(uv) \cos(u^2)\Big)$; б) $[\vec{m}\vec{n}]_u = 2\dfrac{\operatorname{arctg} u}{1+v^2}[\vec{a}\vec{b}]$, $[\vec{m}\vec{n}]_v = \dfrac{\operatorname{arctg} v}{1+v^2}\,[\vec{a}\vec{b}]$.

602. б), в), д) Вектор-функция определяет погружение класса C^∞; г) вектор-функция не определяет погружения.

603. а), б) Промежуток не должен содержать чисел вида $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; в) промежуток не должен содержать чисел вида $\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

604. б), г), д), е) Вектор-функция определяет погружение класса C^∞; в) вектор-функция определяет погружение класса C^2; ж), з) вектор-функция не определяет погружения.

605. б) $I =]0, +\infty[$; в) $I =]1; +\infty[$; г) $I =]0, \pi[$; д) $I =]-\infty, +\infty[$.

606. б) Да; в) нет; г) да.

607. а) Да; б) да; в) нет; г) нет.

608. б), г), е) — к) C^∞ — диффеоморфизм; в), д) не является диффеоморфизмом.

609. а) $\varphi(t) = (c-d)\dfrac{t-b}{a-b} + d$; б) $\varphi(t) = e^t + a$; в) $\varphi(t) = \ln(t-a)$; г) $\varphi(t) = \dfrac{b-a}{\pi} \operatorname{arctg} t + \dfrac{a+b}{2}$; д) $\varphi(t) = \operatorname{tg}\left(\pi\dfrac{b-t}{a-b} + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Указание. Воспользоваться задачей 608.

610. Указание. Рассмотреть в случаях г), д), е) соответственно диффеоморфизмы $t = \cos\tau$, $t = e^\tau$, $t = \operatorname{tg}\dfrac{\tau}{2}$.

612. Использовать существование «двойных» точек погружения $\vec{g}(\tau)$, т. е. таких точек образа промежутка I, которые отвечают двум различным значениям параметра. Погружение $\vec{f}(t)$ «двойных» точек не имеет.

613. б) $\vec{r}(t) = \left(-\dfrac{C}{A} + Bt, \ -At\right)$, $t \in]-\infty, +\infty[$, если $A \neq 0$, $\vec{r}(t) = \left(Bt, \ -\dfrac{C}{B}\right)$, $t \in]-\infty, +\infty[$, если $A = 0$; в) $\vec{r}(t) = (r\cos t, \ r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi[$; г) $\vec{r}(t) = (a\cos t, \ b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi[$; д) $\vec{r}(t) = (a \operatorname{ch} t, \ a \operatorname{sh} t)$, $t \in]-\infty, +\infty[$; е) $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{t^2}{2p}, \ t\right)$, $t \in]-\infty, +\infty[$.

615. б) $\vec{r}(t) = (1+13t, \ 4-11t, \ -1-3t)$, $t \in]-\infty, +\infty[$; в) $\vec{r}(t) = (4\cos t, \ 4\sin t, \ 3)$, $t \in [0, 2\pi[$; г) $\vec{r}(t) = (2t, \ t, \ 5t^2)$, $t \in]-\infty, +\infty[$; д) $\vec{r}(t) = (2\cos t, \ 2\sin t, \ 4)$, $t \in [0, 2\pi[$; е) $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \ \sqrt{2}\cos t, \ 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi[$; ж) $\vec{r}(t) = (2\cos t, \ \sin t, \ 2 + 6\cos t + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi[$; з) $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \ \operatorname{sh} t, \ \operatorname{ch}^2 t + 4\operatorname{sh}^2 t)$, $t \in]-\infty, +\infty[$.

616. б) t_1: $y = 0$, $x = 0$; t_2: $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$; t_3: $2x + y + 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$; t_4: $10x - y - 25 = 0$, $x + 10y - 255 = 0$; в) t_1: $y = b$, $x = 0$; t_2: $y = -b$, $x = 0$; t_3: $x = a$, $y = 0$; t_4: $x = -a$, $y = 0$; г) t_1: $x = a$, $y = 0$; t_2: $b\left(e + \dfrac{1}{e}\right)x - a\left(e - \dfrac{1}{e}\right)y - 2ab = 0$, $a\left(e - \dfrac{1}{e}\right)x + b\left(e + \dfrac{1}{e}\right)y - \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)\left(e^2 - \dfrac{1}{e^2}\right) = 0$; t_3: $b\left(e + \dfrac{1}{e}\right)x + a\left(e - \dfrac{1}{e}\right)y - 2ab$, $a\left(\dfrac{1}{e} - e\right)x + b\left(e + \dfrac{1}{e}\right)y + \dfrac{1}{2}\left(e^2 - \dfrac{1}{e^2}\right) \times (a^2 + b^2) = 0$; д) $x - y - a\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\right) = 0$, $x + y - a\dfrac{\pi}{2} = 0$.

617. а) M_1: $2x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 9 = 0$; б) M_1: $y = -b$, $x = 0$, M_2: $bx + \sqrt{3}ay - 2ab = 0$, $\sqrt{3}ax - by - \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - b^2) = 0$; в) M_1: $x = -a$, $y = 0$.

619. Нет.

620. $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

621. $(1, 1)$, $(-3, 9)$.

622. $\left(-\frac{1}{27}, -\frac{8}{9}\right)$.

624. Указание. Выбрать точку, через которую проходит нормаль, за начало системы координат. Доказать, что радиус-вектор кривой удовлетворяет условию $\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}(t)=0$. Воспользоваться задачей 594.

626. б) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2=\arccos\frac{4}{5}$; в) $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$, $\varphi=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; г) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\varphi_1=\varphi_2=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$; д) $(0, 2)$, $(0, -2)$, $\varphi_1=\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, $\varphi_2=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$; е) $\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$, $\varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{2}$.

627. $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

628. б) t_1: $x=2t$, $y=t$, $z=1$; t_2: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$; в) t_1: $x-1=\frac{y-3}{14}=\frac{z-2}{-2}$; $t_2=\frac{x-2}{\frac{1}{4}}=\frac{y-24}{5}=\frac{z-\frac{5}{4}}{-\frac{1}{16}}$; г) t_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=z-1$; t_2: $\frac{x-e^2}{2e^2}=\frac{y-\frac{1}{e}}{-\frac{1}{e}}=\frac{z-e}{e}$; $t_3=\frac{x-\frac{1}{e^2}}{2\frac{1}{e^2}}=\frac{y-e}{-e}=\frac{z-\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}$; д) t_1: $\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-1}{4}$; t_2: $\frac{x-\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}}=y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{z-\sqrt{3}}{8}$; t_3: $\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-3}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-3\sqrt{3}}=\frac{z+\frac{1}{\sqrt{3}}}{8}$;
е) t_1: $\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{y-\frac{\pi}{3}}{-2}=\frac{z-\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}}$; t_2: $x=\frac{\pi}{2}-t$, $y=t$, $z=1$; t_3: $x+\frac{\pi}{4}=-y+\frac{3\pi}{4}=\frac{z-2}{-2}$.

629. б) $x+2=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+8}{12}$; в) $x=2$, $y=t$, $z=2$.

631. $\frac{x+1}{3}=\frac{2-y}{4}=\frac{7-z}{7}$; $\frac{x-\frac{343}{27}}{147}=\frac{y-\frac{98}{9}}{84}=\frac{z+\frac{49}{3}}{-63}$.

632. $\varphi=\arccos\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

633. $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

634. $p(0, 1, -1)$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

635. а) $M_1(0,\ 0,\ 0)$, $\varphi=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$; $M_2(1,\ 1,\ 2)$, $\varphi=\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$;

б) кривые не пересекаются; в) $M(3,\ 2,\ 0)$, $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

636. б) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $8\sqrt{2}a$; г) $9a$; д) $\sqrt{2}a(\operatorname{sh} t_1-\operatorname{sh} t_0)$.

637. 10.

638. б) $\vec{r}(s)=\left(\frac{6-2s}{3},\ \frac{9-s}{3},\ \frac{2s}{3}\right)$; в) $\vec{r}(s)=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$; г) $\vec{r}(s)=\left(\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\cos\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ \left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\sin\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right),\ 1+\right.$ $\left.+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)$; д) $\vec{r}(s)=\left(3+\frac{1}{2}(\sqrt{9+2s}-2)^2,\ 2(\sqrt{9+2s}-2),\ \frac{4}{3}(\sqrt{9+2s}-2)^{\frac{3}{2}}+1\right)$.

639. Указание. Доказать, что для решения задачи достаточно проверить $|\vec{r}'(t)|=1$.

640. б) α: $z+1=0$, β: $x=0$; в) α: $ax+bz=0$, β: $bx-az=0$; г) α: $x+3z=0$, β: $3x-z=0$; д) α: $x+y+z-2=0$, β: $2x-y-z-1=0$; е) α: $x+2y=0$, β: $2x-y=0$; ж) α: $2x+z-4=0$, β: $y-1=0$; з) α: $y+2z=0$, β: $2x-2y+z=0$; и) α: $2x+y+4z-7=0$, β: $6x-8y-z+3=0$; к) α: $y=0$, β: $2x-z=0$.

641. а) α: $x+y+4z-20=0$, β: $x-y=0$; б) α: $x-2y=0$, β: $2x+y=0$; в) α: $x+3y-z-9=0$, β: $3x-y=0$; г) α: $3x+y+6z-10=0$, β: $5x-9y-$ $-z+5=0$; д) α: $z=0$, β: $ax-by+b^2-a^2=0$.

644. $N_1(3,\ 9,\ 27)$, $N_2(6,\ 36,\ 216)$.

645. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{2}+4\pi k\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{2}+2\pi(2k+1)\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

646. б) Уравнения главной нормали: $x=t+1$, $y=1$, $z=25t+1$, уравнения бинормали: $x=25t+1$, $y=1$, $z=-t+1$;

в) уравнения главной нормали: $x=\pi$, $y=0$, $z=t-1$, уравнения бинормали: $x=t-\pi$, $y=t$, $z=-1$;

г) уравнения главной нормали: $x=t+1$, $y=\frac{1}{2}$, $z=-t+\frac{1}{3}$, уравнения бинормали: $x-1=\frac{y-\frac{1}{2}}{-2}=z-\frac{1}{3}$;

д) уравнения главной нормали: $x=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-5}$,

уравнения бинормали: $x=2t$, $y=-t$, $z=1$;

е) уравнения главной нормали: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{4}$,

уравнения бинормали: $\frac{x-1}{3}=y-1=\frac{z-1}{-1}$;

ж) уравнения главной нормали: $\frac{x-1}{2\pi}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{\pi^2+16}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{8}$,

уравнения бинормали: $x=4t-1$, $y=\frac{\pi}{4}$, $z=\pi(-t)+\frac{\pi}{2}$.

649. $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

652. б) $\vec{\tau}=(0,\ -1,\ 0)$, $\vec{\nu}=(-1,\ 0,\ 0)$, $\vec{\beta}=(0,\ 0,\ 1)$; в) $\vec{\tau}=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\vec{\nu}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{\beta}=\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) $\vec{\tau}=(0,\ 0,\ 1)$, $\vec{\nu}=(-1,\ 0,\ 0)$, $\vec{\beta}=(0,\ -1,\ 0)$; д) $\vec{\tau}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\vec{\nu}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{\beta}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)$; е) $\vec{\tau}=\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\vec{\nu}=(0,\ -1,\ 0)$, $\vec{\beta}=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$; ж) $\vec{\tau}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ 0,\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$, $\vec{\nu}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{\beta}=\left(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$; з) $\vec{\tau}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{\nu}=\left(\frac{7}{\sqrt{66}},\ -\frac{1}{\sqrt{66}},\ \frac{4}{\sqrt{66}}\right)$, $\vec{\beta}=\frac{1}{\sqrt{11}}(-1,\ -3,\ 1)$; и) $\vec{\tau}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{th} 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2\operatorname{ch} 1}\right)$, $\vec{\nu}=\left(\frac{1}{\operatorname{ch} 1},\ 0,\ -\operatorname{th} 1\right)$, $\vec{\beta}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{th} 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2\operatorname{ch} 1}\right)$.

653. б) $k=\frac{\sqrt{20}}{(\sqrt{4t^2+5})^3}$, $\varkappa=0$; в) $k=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{(20t^2+28t+15)^3}}$, $\varkappa=0$; г) $k=\varkappa=\frac{1}{3(t^2+1)^2}$; д) $k=\frac{1}{a}$, $\varkappa=0$; е) $k=\varkappa=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$; ж) $k=\frac{\sqrt{3}t}{2\sqrt{2}(\sqrt{t^2+t+1})^2}$, $\varkappa=0$; з) $k=\frac{a}{a^2+b^2}$, $\varkappa=\frac{b}{a^2+b^2}$; и) $k=\varkappa=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}\,(t+1)^2}$; к) $k=\varkappa\frac{1}{\sqrt{2}t^{3/2}(t+1)^2}$; л) $k=\varkappa=\frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$; м) $k=\frac{\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}$, $\varkappa=\frac{2\sqrt{2}t^2}{a(t^2+1)^2}$.

654. $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\varkappa=0$.

658. $\varphi=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$. Указание. Вектор $\vec{p}$ не меняется вдоль кривой в том и только в том случае, когда $\frac{d\vec{p}}{ds}=\vec{0}$.

659. Указание. Из первой формулы Френе следует $\frac{d\vec{\tau}}{ds}=0$. Вывести отсюда, что $\vec{\tau}(s)=\vec{a}s+\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы.

660. Указание. Из формул Френе следует, что $\frac{d\vec{\beta}}{ds}=\vec{0}$, т. е. $\vec{\beta}=\vec{\beta}_0=\text{const}$. Так как векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$ перпендикулярны между собой, то $\frac{d\vec{\tau}}{ds}\vec{\beta}_0=0$. Получить отсюда, что кривая принадлежит плоскости, определяемой точкой $\vec{\tau}(s_0)$ и нормальным вектором $\vec{\beta}_0$.

661. а) $3x-2y+8=0$; б) $x-z+3=0$; в) $x+y-z=0$; г) $x-2y+z=0$; д) $x+y-2z+2=0$; е) $2x-y+1=0$; ж) $x+2y-z=0$; з) $(b_2a_3-a_2b_3)(x-c_1)+(b_3a_1-b_1a_3)(y-c_2)+(b_1a_2-a_1b_2)(z-c_3)=0$. Указание. Воспользоваться задачей 660.

662. $f=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные числа.

665. Указание. Принять точку за начало системы координат. Доказать, что если $\vec{r}(t)$ — параметризация кривой, то векторы $\vec{r}$, $\vec{r}'$ и $\vec{r}''$ — линейно зависимы Вывести отсюда, что $\varkappa=0$.

667. Указание. Доказать, что $\vec{\tau}\vec{a}=\mathrm{const}$, отсюда получить, что $a=$ $=p\vec{\tau}+q\vec{\beta}$, где p и q — постоянные числа. Используя равенство $\frac{d\vec{a}}{ds}=\mathrm{const}$, доказать требуемое утверждение.

668. б) $k=\frac{a}{a^2+b^2}$, $\varkappa=\frac{b}{a^2+b^2}$; в) $k=\varkappa=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{8s+1}-1}\cdot(8s+1)}$; г) $k=\varkappa=$ $=\frac{a}{2a^2+s^2}$.

669. б), в), г) Нет; д), ж) да, C^∞. Указание. Показать, что в области $D=\{(u, v)\,|\,0<u<1,\ v>1\}$ ранг $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}=2$; з) да; C^∞; и) нет; к) да; C^∞.

670. б) Существует. Например, $D=\{(u, v)\,|\,u-v>0\}$; в) существует. Например, $D=\{(u, v)\,|\,u>0,\ v>0\}$; г) существует. Например, $D=\{(u, v)\,|\,u>0,\ v>0\}$; е) существует. Например, $D=\{(u, v)\,|\,u>0,\ v>0\}$; е) существует. Например, $D=\{(u, v)\,|\,2uv+v+1>0\}$; и) существует. Например, $D=\{(u, v)\,|\,u-v>0\}$.

672. б) Эквивалентны $\tilde{u}=\arccos u$, $\tilde{v}=e^v$; в) эквивалентны $u=\arcsin u$, $v=$ $=\arccos v$; г) эквивалентны $u=e^u$, $v=e^v$; д) эквивалентны $\tilde{u}=e^u$, $\tilde{v}=e^v$.

674. а) Определяет вложение; б), в), г) нет; ж), з) определяет вложение; и) нет; к) определяет вложение.

675. а) Круг $\{(u, v)\,|\,u^2+v^2<a^2\}$; б) внутренность эллипса $\left\{(u, v)\,\middle|\,\frac{u^2}{a^2}+\right.$ $\left.+\frac{v^2}{b^2}<c^2\right\}$; в) $\{(u, v)\,|\,-a<u<a,\ 0<v<\pi\}$.

676. г) Указание. В точках множества $\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{9}=0$ нарушается дифференцируемость. Нужно область D выбрать так, чтобы в нее не попали точки, лежащие на прямых

$$\frac{u}{2}-\frac{v}{3}=0 \text{ и } \frac{u}{2}+\frac{v}{3}=0.$$

679. а) $z=\sqrt{1-x^2-2y^2}$ — эллиптическая поверхность; б) $x^2+y^2+z^2=a^2$ — сферическая поверхность; в) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ — параболическая поверхность; $z=$ $=xy$ — гиперболический параболоид.

680. Указание. Показать, что поверхность M может быть задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v)$ класса C^p, $p\geqslant 1$, для которой $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны. Доказать, что M гомеоморфна открытому кругу.

681. Указание. Если точка $P\in M$, точка O — начало декартовой системы координат, то $\overrightarrow{OP}=\vec{f}(s)+t\vec{m}(s)$, где $\vec{m}(s)$ — вектор главной нормали. В качестве внутренних координат точки P взять параметры s и t. Найти $\vec{m}(s)$.

682. Указание. Представить рассматриваемые множества в виде следующих объединений: а) $S^2=S^2\backslash A\cup S^2\backslash B$, где A и B — различные точки S^2; б) $C=$ $=C\backslash l\cup C\backslash m$, где l и m — различные образующие C; в) $Z=Z\backslash A\cup Z\backslash B$, где A и B — различные точки Z; г) $Q=Q'\cup Q''$, где Q' и Q'' — полости гиперболоида Q, причем каждая гомеоморфна R^2; д) $M=M\backslash\gamma\cup M\backslash\gamma'$, γ, γ' — различные меридианы M.

683. б) $\vec{r}(u, v)=(R\cos u,\ R\sin u,\ v)$, $D=\{(u, v)\,|\,0\leqslant u<2\pi,\ -\infty<v<\infty\}$; в) $\vec{r}(u, v)=(a\cos u\cos v,\ b\sin u\cos v,\ c\sin v)$, $D=\left\{(u, v)\,|\,|0<u<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\right.$

$\leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}\Big\}$; г) $\vec{r}(u, v) = \left(u, v, \pm c\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 1}\right)$, $D = R^2$; д) $\vec{r}(u, v) = (u, v, f(\sqrt{u^2+v^2}))$, $D = R^2$; е) $\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

684. $\vec{r}(u, v) = (up_1 + vq_1, up_2 + vq_2, up_3 - vq_3)$, где $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Указание. Воспользоваться теоремой о неявной функции и задачей 682.

686. Указание. Радиус-вектор от произвольной точки T цилиндрической поверхности M является суммой векторов $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{NT}$, где $N \in K$, $\overrightarrow{NT} \parallel \vec{e}$. Поэтому $\overrightarrow{ON} = \vec{f}(u)$, $\overrightarrow{NT} = v\vec{e}$, $\vec{r}(u, v) = \vec{f}(u) + v\vec{e}$. Если $\vec{f}(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$, $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$, то $\vec{r}(u, v) = (f_1(u) + ve_1, f_2(u) + ve_2, f_3(u) + ve_3)$.

687. $\vec{r}(u, v) = v\vec{f}(u) = (vf_1(u), vf_2(u), vf_3(u))$.

688. $\vec{r}(u, v) = \vec{f}(u) + v\vec{f}'(u) = (f_1(u) + vf_1'(u), f_2(u) + vf_2'(u), f_3(u) + vf_3'(u))$.

689. $\vec{r}(u, v) = (a(\cos v - u\sin v), a(\sin v + u\cos v), b(u+v))$. Указание. Касательный вектор к линии γ имеет вид $\vec{f}'(v) = (-a\sin v, a\cos v, b)$. Искомая поверхность будет задана вектор-функцией $\vec{r}(u, v) = \vec{f}(v) + u\vec{f}'(v)$ (см. задачу 688). $\vec{r}(u, v) = (a(\cos v - u\sin v), a(\sin v + u\cos v), b(u+v))$.

690. $\vec{r}(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v)$. Тор не является гладкой поверхностью.

691. $\vec{r}(u, v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$.

692. Указание. б) За направляющий вектор бинормали выбрать вектор $\vec{B} = [f_t f_{tt}] = a(b\sin t, b\cos t, a)$ или $\beta = (b\sin u, -b\cos u, a)$. Воспользоваться равенством $\vec{r}(u, v) = \vec{f}(u) + v(\beta)$, т. е.
$\vec{r}(uv) = (a\cos u + bv\sin u, a\sin u - bv\cos u, bu + va)$.

693. $\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, av)$.

694. $\vec{r}(u, v) = \frac{1}{2}(\vec{f}(u) + \vec{\varphi}(v)) = \frac{1}{2}(f_1(u) + \varphi_1(v), f_2(u) + \varphi_2(v), f_3(u) + \varphi_3(v))$.

695. б) Нормаль $\dfrac{x - R\cos v_0 \sin u_0}{-\cos^2 u_0} = \dfrac{y - R\cos v_0 \cos u_0}{\sin u_0 \cos u_0} = \dfrac{z - R\sin u_0}{\cos v_0}$,
касательная плоскость $-x\cos^2 u_0 + y\sin u_0 \cos u_0 + z\cos v_0 - R\sin u_0 \cos v_0 = 0$.

в) Нормаль $\dfrac{x - au_0}{\cos u_0} = \dfrac{y - \sin u_0}{-a}$, $z - bv_0 = 0$,

касательная плоскость $x\cos u_0 - ay + a\sin u_0 - au_0\cos u_0 = 0$.

г) Нормаль $x = (a + b\cos v_0)\cos v_0 + \cos u_0 \cos v_0 t$,
$y = (a + b\cos v_0)\sin u_0 + \sin u_0 \cos v_0 t$,
$z = b\sin v_0 + \sin v_0 t$,
касательная плоскость $(x - x_0)\cos u_0 \cos v_0 + (y - y_0)\sin u_0 \cos v_0 + (z - z_0)\sin v_0 = 0$ или $x\cos u_0 \cos v_0 + y\sin u_0 \cos v_0 + z\sin v_0 - a\cos v_0 - b = 0$.

696. б) Нормаль $\dfrac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \dfrac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \dfrac{z - z_0}{\frac{-z_0}{c^2}}$, касательная плоскость $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} - \dfrac{z z_0}{c^2} = 1$; в) нормаль $\dfrac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \dfrac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \dfrac{z - z_0}{-\frac{z_0}{c^2}}$, касательная плоскость $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} - \dfrac{z_0 z}{c^2} = -1$; г) нормаль $\dfrac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \dfrac{y - y_0}{\frac{-y_0}{b^2}} = \dfrac{z - z_0}{-1}$, касательная плоскость

$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=z+z_0$; д) нормаль $\dfrac{x-x_0}{\frac{1}{x_0}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{1}{y_0}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{1}{z_0}}$, касательная плоскость $\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}+\dfrac{z}{z_0}=3$, где (x_0, y_0, z_0) — точка касания поверхности.

697. а) Нормаль $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-5}{1}$, касательная плоскость $2x-4y-z-5=0$; б) нормаль $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{-6}$, касательная плоскость $3x+4y-6z=0$; в) нормаль $\dfrac{x-R\cos\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{y-R\sin\alpha}{\sin\alpha}$, $z=R$, касательная плоскость $x\cos\alpha+y\sin\alpha-R=0$; г) нормаль $\dfrac{x-x_0}{-e^{y_0}\cos x_0}=\dfrac{y-y_0}{-e^{y_0}\sin x_0}=\dfrac{z-e^{y_0}\sin x_0}{1}$, касательная пплоскость $xe^{y_0}\cos x_0+ye^{y_0}\sin x_0-z-e^{y_0}(x_0\cos x_0+y_0\sin x_0-\sin x_0)=0$.

699. а) $\dfrac{x-12}{2}=\dfrac{y-\frac{25}{2}}{3}=\dfrac{z-\frac{41}{8}}{-6}$; б) $\dfrac{x+72}{4}=\dfrac{y-\frac{25}{2}}{-1}=\dfrac{z-75\frac{1}{8}}{2}$.

700.

$$\begin{cases} x=-1-t,\\ y=-1-t,\\ z=1+t;\end{cases}\quad \begin{cases} x=1+t,\\ y=-1-t,\\ z=-1-t;\end{cases}\quad \begin{cases} x=1+t,\\ y=1+t,\\ z=1+t;\end{cases}\quad \begin{cases} x=-1-t,\\ y=1+t,\\ z=-1-t.\end{cases}$$

701. б) $4x-2y+3z-21=0$ и $4x-2y+3z+21=0$.

703. Указание. Параметризация рассматриваемой поверхности имеет вид $\vec r+\vec f(s)+\lambda\vec v(s)$. Найти производные вектор-функции $\vec r$ по параметрам s и λ, а затем вектор $\left[\dfrac{\partial\vec r}{\partial s}\dfrac{\partial\vec r}{\partial\lambda}\right]$, который является направляющим вектором нормали и нормальным вектором касательной плоскости.

704. Указание. Параметризация рассматриваемой поверхности имеет вид $\vec r+\vec f(s)+\lambda\vec\beta(s)$. Найти $\dfrac{\partial\vec r}{\partial s}=\vec\tau-\lambda\varkappa\vec v$, $\dfrac{\partial\vec r}{\partial\lambda}=\vec\beta$ и $\left[\dfrac{\partial\vec r}{\partial s}\dfrac{\partial\vec r}{\partial\lambda}\right]=-\vec v-\lambda\varkappa\vec\tau$ — направляющий вектор нормали и нормальный вектор касательной плоскости.

705. Указание. Показать, что уравнение касательной плоскости в произвольной точке поверхности (x, y, z) имеет вид:

$$(X-x)\left(\varphi-\frac{y}{x}\varphi_t\right)+(Y-y)\varphi_t-(Z-z)=0,$$

где $t=\dfrac{y}{x}$, $z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, а X, Y, Z — координаты произвольной точки касательной плоскости. Из полученного уравнения следует, что каждая касательная плоскость проходит через начало координат $O(0, 0, 0)$.

706. Указание. Рассматриваемая поверхность задается вектор-функцией $\vec r=\vec f(s)+\lambda\vec\tau$, где $\vec\tau$ — единичный вектор касательной к линии γ. Найти $\dfrac{\partial\vec r}{\partial s}$, $\dfrac{\partial\vec r}{\partial\lambda}$, $\dfrac{\partial\vec r}{\partial s}\times\dfrac{d\vec r}{d\lambda}$ и показать, что при $s=\mathrm{const}$ касательная и соприкасающаяся плоскости совпадают. Так как $\dfrac{\partial\vec r}{\partial s}=\vec\tau+\lambda k\vec v$, $\dfrac{\partial\vec r}{\partial\lambda}=\vec\tau$, то $\left[\dfrac{\partial\vec r}{\partial\lambda}\dfrac{\partial\vec r}{\partial s}\right]=\lambda k\vec\beta$. Значит, нормальные векторы касательной и соприкасающейся плоскостей коллинеарны. Если $s=\mathrm{const}$, то $\vec{\beta}=\mathrm{const}$, и, значит, во всех точках касательной к линии γ касательной плоскостью к поверхности является соприкасающаяся плоскость к линии γ в точке касания.

707. Указание. Доказать, что касательные плоскости в точках линии $u=C_1$ параллельны вектору $\vec{f}_u(C_1)$, а в точках линии $v=C_2$ параллельны вектору $\vec{\varphi}_v(C_2)$.

708. Указание. Найти параметризацию поверхности M' $\vec{\rho}(u, v)$ и доказать, что $\vec{m}\vec{\rho}_u=0$, $\vec{m}\vec{\rho}_v=0$, где $\vec{m}$ — вектор нормали поверхности M.

710. Указание. В формулы $E=\vec{r}_u^2$, $F=\vec{r}_u\vec{r}_v$, $G=\vec{r}_v^2$ подставить выражения

$$\vec{r}_u=\vec{r}_{\tilde{u}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}+\vec{r}_{\tilde{v}}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v} \text{ и } \vec{r}_v=\vec{r}_{\tilde{u}}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\vec{r}_{\tilde{v}}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}.$$

712. Указание. Продифференцировать по t вектор-функцию $\vec{f}(t)=\vec{r}(u(t), v(t))$ и убедиться, что $\vec{f}'(t)=u_t\vec{r}_u+v_t\vec{r}_v$, где u_t, v_t — внутренние координаты вектора $\vec{f}'(t)$.

716. Воспользоваться задачами 709, 711. а) $\vec{p}^2du^2+2\vec{p}\vec{q}dudv+\vec{q}^2dv^2$; б) $du^2+\cos^2 u dv^2$; в) $du^2+(u^2+a^2)dv^2$; г) $(v^2du^2+(1+\varphi'(v))^2)dv^2$; д) $(1+(\varphi'(u))^2)du^3+2a\varphi'(u)dudv+(a^2+u^2)dv^2$; е) $2dv^2+2dudv+(1+v^2)du^2$; ж) $a^2\operatorname{ctg}^2 u du^2+a^2\sin^2 u dv^2$; и) $v^2du^2+\dfrac{v^2}{v^2-a^2}dv^2$.

717. а) $I=\dfrac{(R^2-y^2)dx^2+2xydxdy+(R^2-x^2)dy}{R^2-x^2-y^2}$; б) $I=(1+\varphi_x^2)dx^2$; в) $I=(1+a^2y^2)dx^2+2a^2xydxdy+(1+a^2x^2)dy^2$; д) $I=\left(1+\dfrac{a^2x^2}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)}\right)dx^2+2\dfrac{a^2xy}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)}dxdy+\left(1+\dfrac{a^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-a^2)}\right)dy^2$; е) $I=\left(1+\dfrac{a^6}{x^4y^2}\right)\times dx^2+2\dfrac{a^6}{x^3y^3}dxdy+\left(1+\dfrac{a^6}{x^2y^4}\right)dy^2$; ж) указание. Вычислить r_x и r_y и подставить в z_x и z_y. Затем, использовав общую формулу, получим:

$$I=\left(1+\frac{r_x^2(r-1)^2}{r(r-2)}\right)dx^2+2\frac{r_xr_y(r-1)^2}{r(r-2)}dxdy+\left(1+\frac{r_y^2(r-1)^2}{r(r-2)}\right)dy^2,$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $r_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $r_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; з) $I=\left(1+\dfrac{(f')^2x^2}{x^2+y^2}\right)dx^2+2(f')^2\times\dfrac{xy}{x^2+y^2}dxdy+\left(1+\dfrac{(f')^2y^2}{x^2+y^2}\right)dy^2$.

719. $L(\breve{AB})=\displaystyle\int_2^3\frac{\sqrt{36u^4+a^6}}{6u^2}du$.

720. Указание. Пусть $t=u$. Тогда для линий, заданных уравнением $2u-v=0$, на данных поверхностях $u_t=1$, $v_t=2$. Эти значения нужно подставить в формулу для вычисления длины дуги:

а) $L(\breve{AB})=\displaystyle\int_a^b\sqrt{Eu_t^2+2Fu_tv_t+Gv_t^2}dt$;

$$L(\overset{\smile}{AB})=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{p}^2+4\vec{p}\vec{q}+\vec{q}^2};$$

б) $$L(\overset{\smile}{AB})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+4\cos^2 t}\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{3+2\cos 2t}\,dt;$$

в) $$L(\overset{\smile}{AB})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+4a^2+4u^2}\,du=\frac{1+4a^2}{4}\ln\frac{2+\sqrt{5+4a^2}}{1+\sqrt{2+4a^2}}+$$
$$+\frac{2}{1+4a^2}\sqrt{5+4a^2}-\frac{1}{1+4a^2}\sqrt{2+4a^2};$$

е) $$L(\overset{\smile}{AB})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{9+v^2}\,dv=\frac{9}{2}\ln\frac{2(1+\sqrt{10})}{1+\sqrt{37}}+\frac{\sqrt{10}}{9}-\frac{\sqrt{37}}{36}.$$

721. $|\operatorname{sh} u_1-\operatorname{sh} u_2|$.

723. $\varphi=\frac{\pi}{3}$ (см. решения задач 715, 720, 722).

724. 1) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 2) $\cos\varphi=\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (см. решения задач 715, 722).

726. Указание. а) Так как первая квадратичная форма данной поверхности имеет вид:

$$I=(1+a^2y^2)\,dx^2+2a^2xy\,dx\,dy+(1+a^2x^2)\,dy^2,$$

а угол φ между рассматриваемыми линиями равен $\frac{\pi}{2}$, то $a^2dx+(1+a^2x^2)\,dy=0$. Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, получим уравнение искомых линий: $y=\pm\frac{c}{\sqrt{1+a^2x^2}}$; б) $\cos\omega=\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{(1+a^2y^2)(1+a^2x^2)}}$.

727. $$v=\pm\int\sqrt{\frac{(f'(u))^2+(z'(u))^2}{f(u)^2}}\,du.$$

729. $\sigma=a(\varphi_2-\varphi_1)[R(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$.

730. а) πab; б) $\frac{2b}{a}\ln(2+\sqrt{3})$; в) $4\sqrt{6}p^2$.

Указание. Первая квадратичная форма плоскости $z=0$ в прямоугольных декартовых координатах имеет вид $I=dx^2+dy^2$. Следовательно, площадь области D вычисляется по формуле $\sigma=\iint\limits_D dx\,dy$.

731. Указание. Задать данную поверхность вектор-функцией и решать аналогично задаче 728.
а) $2R^2(n-m)$; б) $4R^2$; в) 16.

732. Указание. Вычислить площадь восьмой части тора, для точек которого $x>0$, $y>0$, $z>0$, затем полученную площадь умножить на 8: $\sigma=4\pi^2aR$.

733. Длины сторон v_0, $\operatorname{sh} v_0$, $\sqrt{2}\operatorname{sh} v_0$, углы $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, площадь $\sigma=$ $=\frac{1}{4}(v_0^2+\operatorname{sh}^2 v_0)$.

734. Задать сферу вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=(R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)$ и решать аналогично задаче 728. Круг радиуса r с центром в северном полюсе имеет область изменения параметров — прямоугольник $D=\left\{(u, v) \mid 0<u<2\pi, \frac{\pi}{2}-\arccos\frac{r}{R}<v<\frac{\pi}{2}\right\}$, $\sigma=2\pi R(R-r)$.

737. б) $II=R(du^2+\cos^2 u dv^2)$;

в) $\mathrm{II}=\frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u+c\cos^2 u}}(du^2+\cos^2 u dv^2)$;

г) $\mathrm{II}=-\frac{ac}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2 u+c^2\,\mathrm{ch}^2 u}}(du^2-\mathrm{ch}^2 u dv^2)$;

д) $\mathrm{II}=\frac{ac}{\sqrt{a^2\,\mathrm{ch}^2 u+c^2\,\mathrm{sh}^2 u}}(du^2+\mathrm{sh}^2 u dv^2)$;

е) $II=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}(du^2+u^2dv^2)$; ж) $II=Rdv^2$;

з) $II=\frac{ku}{\sqrt{1+k^2}}dv^2$; к) $II=\frac{f_{un}du^2+uf_u dv^2}{\sqrt{1+f_u^2}}$;

л) $II=\frac{f_{uu}udu-2adudv+f_u u^2dv^2}{\sqrt{a^2+u^2f_u^2+u^2}}$;

м) $II=\frac{-2dudv+u^2dv^2}{\sqrt{1+2u^2}}$;

н) $II=-a\,\mathrm{ctg}\,u\,(du^2-\sin^2 u dv^2)$;

о) $II=bdu^2+\cos u\,(a+b\cos u)\,dv^2$;

п) $II=-\frac{a}{u^2+a^2}du^2+adv^2$.

739. а) $II=0$; б) $II=\frac{2adx^2+2bdy^2}{\sqrt{4a^2x^2+4b^2y^2+1}}$; в) $II=\frac{2adx^2-2bdy^2}{\sqrt{4a^2x^2+4b^2y^2+1}}$; г) $II=\frac{2a^3}{\sqrt{x^4y^4+a^6(x^2+y^2)}}\left(\frac{y}{x}dx^2+dxdy+\frac{x}{y}dy^2\right)$.

740. Указание. Воспользоваться формулой для вычисления нормальной кривизны в направлении вектора $\vec{p}=(p_1, p_2, p_3)$:

$$k_n=\frac{Lp_1^2+2Mp_1p_2+Np_2^2}{Ep_1^2+2Fp_1p_2+Gp_2^2}.$$

741. Указание. Воспользоваться задачей 740.

743. б) $k_1=\frac{L}{E}=\frac{1}{R}$, $k_2=\frac{N}{G}=\frac{1}{R}$;

в) $k_1=\frac{L}{E}=\frac{ac}{(a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\frac{N}{G}=\frac{c}{a\sqrt{a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u}}$;

г) $k_1=\frac{ac}{(a^2\,\mathrm{sh}^2 u+c^2\,\mathrm{ch}^2 u)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\frac{ac\,\mathrm{ch}^2 u}{(a^2\,\mathrm{sh}^2 u+c^2\mathrm{ch}^2 u)^{\frac{3}{2}}}$;

д) $k_1=\frac{ac}{(a^2\,\mathrm{ch}^2 u+c^2\,\mathrm{sh}^2 u)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\frac{c}{a\sqrt{a^2\,\mathrm{ch}^2 u+c^2\,\mathrm{sh}^2 u}}$;

е) $k_1=\frac{2}{(\sqrt{1+4u^2})^3}$, $k_2=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}$; ж) $k_1=0$, $k_2=\frac{1}{R}$; з) $k_1=0$, $k_2=\frac{k}{u\sqrt{1+k^2}}$;

и) $k_1=k_2=0$; к) $k_1=\frac{f_{uu}}{(1+f_u^2)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\frac{f_u}{u\sqrt{1+f_u^2}}$; л) $k_1=\frac{uf_{uu}}{\sqrt{a^2+u^2f_u^2+u^2}\,(1+f_u^2)}$,

$k_2=\frac{u^2f_u}{\sqrt{a^2+u^2f_u^2+u^2}\,(u^2+a^2)}$; м) $k_1=0$, $k_2=\frac{u^2}{(u^2+1)\sqrt{1+2u^2}}$; н) $k_1=\frac{1}{a\,|\mathrm{ctg}\,u|}$,

$k_2=\frac{1}{a}\,|\mathrm{ctg}\,u|$; о) $k_1=\frac{1}{6}$, $k_2=\left|\frac{\cos u}{a+b\cos u}\right|$; п) $k_1=\frac{-a}{u^2+a^2}$, $k_2=\frac{a}{u^2+a^2}$.

744. Указание. Рассматриваемое в задаче нормальное сечение параллельно вектору $\vec{p}$ с внутренними координатами $(1, -1)$. Поэтому нормальная кривизна этого сечения равна $k_n=\frac{L-2M+N}{E-2F+G}$. А кривизна нормального сечения равна $|k_n|$.

745. а) $x=C_1$, $y=C_2$; б) $y=C_1$, $y=\frac{C_2}{x^2}$; в) $\frac{y}{x}=C_1$, $\frac{1}{y_2}-\frac{1}{x^2}=C_2$; г) $u=C_1$, $u^5=v^2(C_2-\sqrt{u})^2$; д) $v=C_1$, $u=C_2v$; е) $v=C$; ж) $v=C_1$, $v=2u+C_2$; з) $v=C_1$, $\frac{\cos^2 u+\cos v}{(1+\cos u)^2}=C_2$.

748. $\mathrm{II}=\frac{(\psi'f''-\psi''f')\,du^2+\psi f'dv^2}{\sqrt{(f')^2+(\psi')^2}}$, $H=\frac{\psi(\psi'f''-\psi''f')+f'[(f')^2+(\psi')^2]}{2\psi[(f')^2+(\psi')^2]^{\frac{3}{2}}}$,

$K=\frac{f'(\psi'f''-\psi''f')}{\psi[(f')^2+(\psi')^2]^2}$.

749. $K=-1$.

750. $K=-\frac{1}{(2n^2+1)^2}$, $H=\frac{1+u^2}{(2u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

751. $K=-\frac{1}{a^2}$ при $x\neq 0$; K не определена при $x=0$.

752. Если данная кривая задана вектор-функцией $\vec{f}(s)$, а k, $\varkappa$ — кривизна и кручение, то $\vec{r}(s, u)=\vec{f}(s)+u\vec{\beta}(s)$,

$$K=-\frac{\varkappa^2}{(1+u^2\varkappa^2)^2},\quad H=-\frac{k+k\varkappa^2u^2-u\frac{d\varkappa}{ds}}{2(1+u^2\varkappa^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

753. б) $K=\frac{4ab}{(1+4x^2a^2+4y^2b^2)^2}$, $H=\frac{a+b+4ab^2y^2+4x^2ba^2}{(1+4a^2x^2+4y^2b^2)^{\frac{3}{2}}}$;

в) $K=-\frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^2}$, $H=\frac{4(y^2-x^2)}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

757. $K^*=\frac{K}{1-2aH+a^2K}$, $H^*=\frac{H-aK}{1-2aH+a^2K}$.

758. Указание. Воспользоваться задачей 757. $K^*=4H^2=\mathrm{const}$.

759. $H^*=-\frac{1}{2}\sqrt{K}$.

760. Указание. Воспользоваться задачей 757.

761. б) Все направления главные; в) при $u=\pm\frac{\pi}{2}$ все направления главные, при $c\neq a$ и $u\neq\pm\frac{\pi}{2}$ главные направления $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$, при $c=a$ все направления главные; г) $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$; д) при $u=0$ все направления главные; при $u\neq 0$ $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$ — главные направления; е) при $u=0$ все направления главные, при $u\neq 0$ $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$ — главные направления; з) $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$; к) при $(1+f_u^2)f_u=uf_{uu}$ все направления главные, при $(1+f_u^2)\ f_u\neq uf_{uu}$ главные направления $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$;

л) $\vec{r}_u du+\vec{r}_v\dfrac{u^3 f_{uu}+ua^2 f_{uu}+u^2(f_u^3+f_u)}{2au^2f_u^2+2au^2+2a^3}dv\pm$

$$\pm\vec{r}_v\frac{\sqrt{(a^2+u^2)\,uf_{uu}-u^2f_u\,(1+f_u'^2)^2+4a^2\,(1+f_u^2+uf_uf_{uu}\,(u^2f_u^2+u^2+a^2))}}{2au^2f_u^2+2au^2+2a^3}dv;$$

м) $\vec{r}_u du+\vec{r}_v\dfrac{-u^2\pm\sqrt{u^4+4a^2u^2+2a^4}}{2au^2+a^3}dv$; н) $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$; о) $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$; п) $\vec{r}_u du$ и $\vec{r}_v dv$.

762. а) $k_1=k_2=0$; б) $k_1=k_2=\frac{1}{R}$; в) $k_1=\dfrac{ac}{(a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=$
$=\dfrac{c}{a\,(a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u)^{\frac{1}{2}}}$;

г) $k_1=\dfrac{ac}{(a^2\,\mathrm{sh}^2\,u+c^2\,\mathrm{ch}^2\,u)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\dfrac{c}{a\,(a^2\,\mathrm{sh}^2\,u+c^2\,\mathrm{ch}^2\,u)^{\frac{1}{2}}}$;

д) $k_1=\dfrac{ac}{(a^2\,\mathrm{ch}^2\,u+c^2\,\mathrm{sh}^2\,u)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\dfrac{c}{a\,(a^2\,\mathrm{ch}^2\,u+c^2\,\mathrm{sh}^2\,u)^{\frac{1}{2}}}$;

е) $k_1=\dfrac{2}{\sqrt{1+4u^2}}$, $k_2=\dfrac{2}{(1+4u^2)^{\frac{3}{2}}}$; ж) $k_1=0$, $k_2=\dfrac{1}{k}$;

з) $k_1=0$, $k_2=\dfrac{k}{u\sqrt{1+k^2}}$; к) $k_1=\dfrac{f_{uu}}{(1+f_n^2)^{\frac{3}{2}}}$, $k_2=\dfrac{f_u}{u\sqrt{1+f_u^2}}$;

н) $k_1=-\mathrm{tg}\,u$, $k_2=\mathrm{ctg}\,u$; о) $k_1=\dfrac{1}{6}$, $k_2=\dfrac{\cos u}{a+b\cos u}$;

п) $k_1=-\dfrac{a}{u^2+a^2}$, $k_2=\dfrac{a}{u^2+a^2}$.

763. а) (1, 1) и (1, −1). Можно найти нормальную кривизну k_n в направлении, образующем угол α с осью Ox в точке (0, 0, 0); $k_n=2+\sin 2\alpha$. Так как k_1 и k_2 — это экстремальные значения нормальной кривизны, то $k_1=\max k_n=\max(2+\sin 2\alpha)=3$, $k_2=\min k_n=\min(2+\sin 2\alpha)=1$. Отсюда находим главные направления: $\alpha_1=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\alpha_2=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, где α_1, α_2 — углы, образованные искомыми направлениями с осью Ox;

б) $k_1=\dfrac{1}{p}$, $k_2=\dfrac{1}{q}$; (1, 0) и (0, 1);

в) $k_1=\dfrac{1}{\cos x\cos y\,(1+\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}^2\,y)}$, $k_2=-\dfrac{1}{\cos x\cos y\,(1+\mathrm{tg}^2\,x+\mathrm{tg}^2\,y)}$,

$k_1(0,\ 0)=1$, $k_2(0,\ 0)=-1$; главные направления $(\cos x,\ \cos y)$ и $(\cos x,\ -\cos y)$ в точках $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$ и $(1,\ -1)$.

764. $R_1=\dfrac{x^2+y^2+a^2}{a(x^2+y^2)}$, $R_2=-\dfrac{x^2+y^2+a^2}{a(x^2+y^2)}$.

765. Указание. а) Использовать решение задачи 753, а для вычисления K и H. Так как $z=xy$, то $K=-\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$, $H=-\dfrac{xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Из уравнения $k^2-2Hk+K=0$ найти k_1 и k_2, затем $R_1=\dfrac{1}{k_1}$, $R_2=\dfrac{1}{k_2}$;

$$R_1=\frac{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{-xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}},\quad R_2=\frac{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{-xy-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}};$$

б) $$R_{1,\,2}=\frac{1}{4}\left(1+4\frac{x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}(a^2+b^2+4z)\pm$$

$$\pm\frac{1}{4}\sqrt{\left(1+\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}\right)\left((a^2+b^2+4z)^2-4a^2b^2-16\frac{b^2}{a^2}x^2-16\frac{a^2}{b^2}y^2\right)}.$$

766. Указание. Показать, что у геликоида, заданного параметризацией $\vec{r}(u,\ v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$, координатные линии — винтовые линии и прямолинейные образующие. Затем найти главные направления и определить углы между главными направлениями и координатными линиями.

767. Указание. Использовать задачу 748 и найти $K=-\dfrac{a^4}{2(a^2+u^2)^3}$. Так как кривизна меридиана является главной кривизной поверхности вращения, то одна из главных кривизн $k_1=\dfrac{a^2}{(a^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}$. Следовательно, отношение главных кривизн равно $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{k_1^2}{K}=-2$.

768. Указание. Учесть, что кривизна прямых образующих равна нулю, а следовательно, $k_n=0$ и они имеют асимптотическое направление. Главные направления — оси гиперболы являются биссектрисами углов между асимптотами.

769. Указание. См. указание к задаче 768.

770. Указание. а) Воспользоваться задачей 748 для вычисления полной кривизны, учитывая, что $f(u)=R\cos u$, $\psi(u)=R\sin u$.

$$K=\frac{-R\sin u\,(-R\cos u\,R\cos u-R\sin u\,R\sin u)}{R\sin u}=R^2>0.$$

Эллиптические точки. б) Воспользоваться решением задачи 753 и найти полную кривизну:

$$K=\frac{c^2}{a^2b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2\left(1+\dfrac{c^2x^2}{a^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}+\dfrac{c^2y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}\right)^2}.$$

Так как для всех точек эллипсоида $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\neq 0$, $1-\frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\neq 0$, $1-\frac{y^2}{b^2}-$ $-\frac{z^2}{c^2}\neq 0$, то все точки эллипсоида эллиптические. в) См. указание к б).

$$K=\frac{-1}{a^2b^2c^2\left(\frac{z^2}{c^4}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^2}<0;$$

все точки гиперболоида гиперболические. г) Воспользоваться решением задачи 753, а и показать, что $K<0$. Значит, все точки гиперболические. е) $K=0$, все точки параболические, ж) Точки с ординатами $y=0$ параболические ($K=0$); с ординатами $y\neq 0$ гиперболические ($K<0$).

771. Указание. Воспользоваться решением задачи 753 и показать, что $K=0$.

773. Указание. Нормальная кривизна в направлении винтовой линии на геликоиде равна нулю, поэтому $|k_g|=k$, а $k=\frac{|c|}{a^2+c^2}$. Так как главная нормаль направлена по образующей геликоида к его оси, то $k_g\geqslant 0$, $k_g=\frac{|c|}{a^2+c^2}$.

774. Указание. Пусть α — угол между главной нормалью окружности радиуса r и нормалью сферы. Тогда $\cos\alpha=\frac{r}{R}$ и $|k_g|=k\sin\alpha=\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}=$ $=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{rR}$. Знак k_g зависит от выбора параметризации.

778. Указание. а) Выбрать прямоугольную декартову систему координат так, чтобы прямолинейные образующие были параллельны оси Oz. Тогда уравнение поверхности $\vec{r}(s, v)=f(s)\vec{e}_1+\varphi(s)\vec{e}_2+v\vec{e}_3$. Будем искать уравнения геодезической в виде $v=v(s)$ как решение дифференциального уравнения $(\vec{m}, d\vec{r}, d^2\vec{r})=0$, которое будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} \varphi' & -f' & 0 \\ f' & \varphi' & v' \\ f'' & \varphi'' & v'' \end{vmatrix}=0.$$

Учитывая, что $(\varphi')^2+(f')^2=1$, получаем $\varphi'\varphi''+f'f''=\frac{1}{2}((\varphi')^2+(f')^2)'=0$. Следовательно, уравнение для определения геодезических принимает вид $v''=0$ и находится семейство геодезических $v=c_1u+c_2$. Прямолинейные образующие, параллельные оси Oz, также являются геодезическими. Они не входят в найденное решение $\vec{r}(s, v)=f(s)\vec{e}_1+\varphi(s)\vec{e}_2+(c_1u+c_2)\vec{e}_3$, так как их нельзя задать уравнениями $v=v(s)$. Геодезическими линиями являются винтовые линии, параллели и меридианы. б) Задать коническую поверхность вектор-функцией $\vec{r}(u, v)=(uR\sin v, uR\cos v, uh)$. Дифференциальное уравнение для определения геодезических имеет вид $(\vec{m}, d\vec{r}, d^2\vec{r})=0$ или $R(R^2+h^2)(-uu''v''+2(u')^2v'+$ $+u'uv''+\frac{R^2}{R^2+h^2}u^2(v')^3=0$. Уравнения геодезических $u\cos\left(\frac{Rv}{\sqrt{R^2+h^2}}-\varphi\right)=c_1$ или $v=c_2$.

780. Указание. Применить теорему Гаусса-Бонне $\pi-\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=-\iint_{\Delta}K\,d\sigma$, т. е. $\sum\alpha_i=\pi-\frac{\sigma}{r^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия.— М.: Просвещение, 1986.— Ч. I.
2. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия.— М.: Просвещение, 1987.— Ч. II.
3. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия.— М.: Просвещение, 1975.— Ч. II.
4. Атанасян С. Л. Задачник-практикум по конструктивной геометрии.— М.: МГЗПИ, 1983.
5. Сборник задач по геометрии / Л. С. Атанасян, М. В. Васильева, Е. Е. Вересова, Г. Б. Гуревич, А. Ф. Ильин, Н. В. Лактанова, О. С. Редозубова.— М.: Просвещение, 1975.
6. Сборник задач по геометрии / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев, В. П. Иваницкая, Г. Б. Кузнецова, В. М. Майоров, З. А. Скопец.— М.: Просвещение, 1980.
7. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И. В. Белько, В. И. Ведерников, В. Т. Вознев, А. А. Гусак, А. И. Нахимовская, А. П. Рябушко, Л. К. Тутаев, А. С. Федоненко.— М.: Наука, 1979.
8. Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии.— М.: Наука, 1979.
9. Мищенко А. В., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.— М.: МГУ, 1981.
10. Панкратов А. А. Начертательная геометрия.— М.: Просвещение, 1963.
11. Пясецкий В. С. Из опыта преподавания курса «Элементы топологии» // Проблемы подготовки учителя математики в пединститутах.— М.: МГЗПИ, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

АТАНАСЯН Сергей Левонович
ЦАЛЕНКО Мария Михайловна

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *А. К. Компанец*
Младший редактор *Н. Е. Терехина*
Художник *В. В. Костин*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технический редактор *М. М. Широкова*
Корректор *Г. И. Мосякина*

ИБ № 14773

Сдано в набор 02.04.93. Лицензия ЛР № 010001 от 10.10.91. Подписано к печати 15.12.94. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. офс. № 1. Гарнит. Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12. Усл. кр.-отт. 12,37. Уч.-изд. л. 11,05. Тираж 15 000 экз. Заказ 666.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати
410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

3000 -