МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

А. П. ГРОМОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ПРОСВЕЩЕНИЕ

1971

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

А. П. ГРОМОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА, КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Для студентов заочных отделений физико-математических факультетов педагогических институтов по курсу высшей алгебры

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва — 1971

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим совокупность направленных отрезков пространства, исходящих из некоторой точки O. По правилу параллелограмма для любых двух таких отрезков или векторов a и b найдется вектор $a+b$. Кроме этой операции сложения векторов, хорошо известна также операция умножения вектора a на вещественное число λ. Часто эту совокупность векторов с указанными операциями называют *векторным пространством*. В дальнейшем оно обозначается V_3.

Аксиоматизируя свойства операций над векторами из V_3, приходим к общему понятию векторного, или линейного пространства.

Определение 1. Пусть P — некоторое числовое поле, R — любое непустое множество элементов и

а) в R определена операция сложения (т. е. указан закон, по которому для любых двух элементов a, $b \in R$ находится вполне определенный элемент в R, называемый их суммой и обозначаемый через $a+b$),

б) определена операция умножения элементов из R на числа из P (т. е. указан закон, по которому для любого элемента $a \in R$ и любого числа $\lambda \in P$ находится вполне определенный элемент в R, называемый произведением числа λ на элемент a и обозначаемый через $\lambda \cdot a$ или λa).

Множество R называется *линейным* (или *векторным*) *пространством над полем P*, а его элементы — *векторами*, если указанные операции (сложения векторов и умножения вектора на число) удовлетворяют аксиомам:

I. 1°. $a+b=b+a$ (коммутативность сложения).

2°. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения).

3°. Существует вектор θ, такой, что $a+\theta=a$ для любого $a \in R$. Вектор θ называется *нулевым* или просто нулем пространства R.

4°. Для каждого вектора $a \in R$ существует вектор $-a$, такой, что $a+(-a)=\theta$. Вектор $-a$ называется *противоположным* для a.

II. 5°. $1 \cdot a=a$, где 1 — единица поля P.

6°. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ (ассоциативность умножения на число поля P)

III. 7°. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ (дистрибутивность умножения относительно сложения чисел поля P)*.

8°. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ (дистрибутивность умножения относительно сложения в множестве R).

Если поле коэффициентов P есть поле всех комплексных чисел, то линейное пространство называется *комплексным линейным пространством*; если P есть поле всех вещественных чисел, то — *вещественным линейным пространством*; если P — произвольное поле, то R — *линейным пространством над полем* P.

Как правило, в дальнейшем всюду в качестве основного поля P будет предполагаться поле вещественных чисел D. Отступление от этого правила будет оговариваться.

Как и при определении группы, в определении линейного пространства ничего не говорится о технике выполнения операций: в любом конкретном случае, как только выполняемые операции будут удовлетворять аксиомам 1° — 8°, эти операции приобретают право называться сложением и умножением на число, а совокупность элементов с такими операциями получает право называться линейным пространством.

Примеры линейных пространств. 1. Пространство V_3. Элементы этого пространства — направленные геометрические отрезки обычного пространства, имеющие общее начало в фиксированной точке O. Сложение векторов выполняется по правилу параллелограмма. При умножении вектора на вещественное число λ длина вектора умножается на число $|\lambda|$, а направление вектора при $\lambda>0$ остается неизменным, при $\lambda<0$ меняется на противоположное. Выполнение аксиом 1°—8° легко проверяется.

Совокупность векторов из V_3, расположенных в некоторой плоскости (проходящей через точку O), образует линейное пространство, обозначаемое V_2. Совокупность векторов из V_3, принадлежащих некоторой прямой (проходящей через точку O), образует линейное пространство, обозначаемое через V_1.

2. Пространство T_n. Элемент x — вектор этого так называемого арифметического линейного пространства — любая упорядоченная совокупность n вещественных чисел $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ (n — фиксированное натуральное число):

$$x=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n).$$

Числа ζ_i называются компонентами вектора x. Суммой векторов

$$x=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \quad \text{и} \quad y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

называется вектор

$$x+y=(\zeta_1+\eta_1, \zeta_2+\eta_2, \ldots, \zeta_n+\eta_n).$$

---

* Для сложения в R и для сложения в P следовало бы употреблять разные обозначения операций. Мы ради упрощения записей в обоих случаях пишем $+$. Аналогичное замечание относится к обозначениям умножения в аксиоме 6°.

Аксиомы 1°—8° не являются логически независимыми: аксиома 1° является следствием остальных аксиом ([7], № 1822).

Произведением вектора x на вещественное число λ называется вектор

$$\lambda x = (\lambda \zeta_1, \lambda \zeta_2, \ldots, \lambda \zeta_n).$$

Равенство векторов $x = y$ означает равенство соответствующих компонент: $\zeta_1 = \eta_1$, $\zeta_2 = \eta_2$, ..., $\zeta_n = \eta_n$. Выполнимость аксиом 1°—8° легко проверяется, причем $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$.

3. Пространство $C(a, b)$. Элемент этого линейного пространства — любая вещественная функция $x = x(t)$, определенная и непрерывная на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$. Операции сложения функций и умножения функции на вещественное число известны из математического анализа, при этом, очевидно, условия 1°—8° выполняются.

4. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

— однородная система s линейных уравнений с n неизвестными и с коэффициентами из поля D. Введем обозначения матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1}a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

θ — матрица-столбец высоты s. Тогда система (1) в матричной форме запишется так:

$$A \cdot X = \Theta. \qquad (2)$$

Система (1) всегда совместна. Кроме того, если X и Y — два решения системы (1), то $X + Y$ и λX, где λ — любое число, тоже решения системы (1), так как

$$A(X + Y) = AX + AY = \Theta + \Theta = \Theta, \ A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda\Theta = \Theta.$$

Аксиомы 1°—8° выполняются. Таким образом, совокупность решений однородной системы линейных уравнений составляет линейное пространство. Это пространство, очевидно, содержится в пространстве T_n.

5. Пространство многочленов. Множество всех многочленов вида

$$a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

с комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ при фиксированном n, очевидно, является комплексным линейным пространством относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число. Это пространство мы будем называть комплексным пространством многочленов степени $\leqslant n$ (хотя содержащийся в нем нуль-многочлен не имеет степени). Заметим, что совокупность многочленов данной степени $n > 0$ линейного пространства не образует: сумма двух многочленов степени n может оказаться многочленом более низкой степени.

6. Пространство квадратных матриц. Векторы этого пространства — квадратные матрицы одного и того же порядка n с вещественными элементами. Основное поле — поле вещественных чисел. Сложение матриц и умножение их на числа выполняются по известным правилам. Аксиомы 1°—8° выполняются. Нулевым элементом θ здесь будет матрица, все элементы которой нули.

7. Пространство R, векторы которого положительные вещественные числа, основное поле — поле D вещественных чисел. Сложение и умножение чисел α, β, ... поля D обозначаем обычными знаками $+$ и $\cdot$. «Сложение» $\oplus$ векторов a и b в R по определению есть обычное умножение вещественных чисел:

$$a \oplus b = a \cdot b.$$

«Умножение» $\odot$ числа $\alpha \in D$ на вектор $a \in R$ по определению есть возвышение числа a в степень α:

$$\alpha \odot a = a^{\alpha}.$$

Проверьте выполнимость аксиом 1°—8°. Для примера убедимся в выполнимости аксиомы 7°. В данном случае она запишется так:

$$(\alpha + \beta) \odot a = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a).$$

По определению операций $+$, $\oplus$, $\odot$, $\cdot$ имеем:

$$(\alpha + \beta) \odot a = a^{\alpha+\beta}; \quad (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a) = a^{\alpha} \oplus a^{\beta} = a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta},$$

откуда и следует 7°.

8. Основное поле P состоит из двух элементов, обозначаемых 0 и 1. Операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ в P заданы таблицами:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Элементами пространства R являются наборы длины n элементов из P. Операции сложения векторов из R и умножения их на элементы из P производятся покомпонентно (как и в T_n). Получаем линейное пространство R над (нечисловым) полем P; в отличие от ранее рассмотренных пространств это пространство конечно и состоит из 2^n векторов (поскольку каждая из n компонент вектора принимает два значения независимо от других компонент).

Упражнения

Является ли линейным пространством над полем вещественных чисел:

а) множество всевозможных векторов плоскости с общим началом в точке O:

1) концы которых лежат на одной прямой;
2) каждый из которых лежит на одной из осей координат OX и OY;
3) концы которых лежат в первой четверти системы координат;

б) множество тех векторов из пространства T_n, компоненты которых:

1) есть целые числа;
2) удовлетворяют соотношению $\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n = 0$;
3) удовлетворяют соотношению $\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n = 1$;
4) с четными номерами равны между собой?

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Отметим некоторые свойства линейных пространств, которые непосредственно вытекают из аксиом 1°—8°.

Аксиомы 1°—4° означают, что относительно операции сложения линейное пространство R является коммутативной группой. Следовательно, все свойства коммутативных групп имеют место для линейных пространств. В частности:

1. В линейном пространстве существует единственный нуль.

2. В линейном пространстве для каждого элемента существует единственный противоположный элемент.

3. Уравнение $a + x = b$, где a и b — любые данные элементы линейного пространства R, разрешимо в R и притом единственным образом.

Уравнению $a + x = b$ удовлетворяет вектор $b + (-a)$, его называют *разностью* векторов b и a и обозначают через $b - a$. Таким образом, по определению разности имеем:

$$b - a = b + (-a).$$

Другие свойства линейного пространства R связаны с операцией умножения.

4. $\alpha \cdot \theta = \theta$.

В самом деле, пусть a — произвольный вектор пространства R, α — произвольное число из P. Тогда по аксиомам 3° и 8°

$$\alpha a = \alpha(a + \Theta) = \alpha a + \alpha \cdot \Theta.$$

Отсюда следует, что $\alpha\theta=\theta$, ибо по свойству 3 уравнение $\alpha a + x = \alpha a$ имеет единственное решение, а по аксиоме 3° этим решением является θ.

5. $0 \cdot a = \theta$, где 0 — нуль поля P.

В самом деле, по аксиоме 7°

$$\alpha a = (\alpha + 0)a = \alpha a + 0 \cdot a.$$

Отсюда, как и при доказательстве свойства 4, получим, что $0 \cdot a = \theta$.

6. Если $\alpha a = \theta$, то или $\alpha = 0$, или $a = \theta$.

Если $\alpha = 0$, то свойство 6 выполнено. Если $\alpha \neq 0$, то в поле P существует число α^{-1}, такое, что $\alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$. Тогда по аксиомам 5°, 6° и свойству 4 получаем:

$$a = 1 \cdot a = (\alpha^{-1}\alpha)a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \Theta = \Theta.$$

7. $\alpha(-a) = -(\alpha a)$.

По аксиомам 8°, 4° и свойству 5 получаем:

$$\alpha a + \alpha(-a) = \alpha[a + (-a)] = \alpha \cdot \Theta = \Theta.$$

Значит, элемент $\alpha(-a)$ является противоположным для элемента αa, т. е. $\alpha(-a) = -(\alpha a)$.

8. $(-\alpha) a = -(\alpha a)$.

По аксиоме 7° и свойству 5

$$\alpha a + (-\alpha)a = [\alpha + (-\alpha)]a = 0 \cdot a = \Theta,$$

откуда, как и в свойстве 7, заключаем, что $(-\alpha) a = -(\alpha a)$, в частности, $(-1) a = -a$.

9. $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$.

Действительно, по определению разности, аксиоме 8° и свойству 7 получаем:

$$\alpha(a - b) = \alpha[a + (-b)] = \alpha a + \alpha(-b) = \alpha a - \alpha b.$$

10. $(\alpha - \beta) a = \alpha a - \beta a$.

В самом деле, по аксиоме 7°, свойству 8 и определению разности

$$(\alpha - \beta)a = [\alpha + (-\beta)]a = \alpha a + (-\beta)a = \alpha a + (-\beta a) = \alpha a - \beta a.$$

Определение 2. *Линейной комбинацией* векторов a, b, ..., c называется вектор x, получаемый по формуле

$$x = \alpha a + \beta b + \ldots + \gamma c,$$

где α, β, ..., γ — некоторые числа основного поля P. Говорят при этом также, что вектор x линейно выражается через векторы a, b, ..., c.

Для двух линейных комбинаций

$$x = \alpha a + \beta b + \ldots + \gamma c \quad \text{и} \quad y = \alpha_1 a + \beta_1 b + \ldots + \gamma_1 c,$$

по аксиомам 1°—8° и свойствам 1 — 10 можно записать, что

$$x - y = (\alpha - \alpha_1)a + (\beta - \beta_1)b + \ \dots \ + (\gamma - \gamma_1)c,$$

тем самым получаем право приводить подобные члены.

§ 3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Важнейшим понятием в теории линейных пространств является линейная зависимость векторов. Прежде чем определить это понятие, рассмотрим несколько примеров.

Примеры. 1. Дана следующая система трех векторов из пространства T_4:

$$a = (3,\ 1,\ 2,\ 0), \quad b = (0,\ -2,\ 1,\ 5), \quad c = (3,\ -3,\ 4,\ 10).$$

Легко заметить, что $c = a + 2b$, или

$$a + 2b + (-1)c = \Theta. \tag{1}$$

Здесь $\theta = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$.

2. Возьмем теперь другую систему векторов из T_4:

$$x = (3,\ -2,\ 2,\ -3), \quad y = (1,\ 1,\ 4,\ 4), \quad z = (-1,\ 3,\ 4,\ 8).$$

Соотношение, аналогичное равенству (1), для этой системы векторов непосредственно усмотреть затруднительно. Однако нетрудно проверить, что

$$4x + (-7)y + 5z = \Theta. \tag{2}$$

Коэффициенты 4, —7, 5 соотношения (2) можно было бы найти следующим образом. Обозначим их через c_1, c_2, c_3 и, считая неизвестными, будем решать векторное уравнение:

$$c_1x + c_2y + c_3z = \Theta. \tag{2'}$$

Произведя указанные операции умножения и сложения и переходя к равенству компонент векторов в (2′), получаем однородную систему линейных уравнений относительно c_1, c_2, c_3:

$$\left.\begin{aligned} 3c_1 + c_2 - c_3 &= 0, \\ -2c_1 + c_2 + 3c_3 &= 0, \\ 2c_1 + 4c_2 + 4c_3 &= 0, \\ -3c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Одним из решений этой системы является: $c_1 = 4$, $c_2 = -7$, $c_3 = 5$.

3. Рассмотрим систему векторов:

$$a_1 = (3,\ -2,\ 1,\ -3), \quad a_2 = (1,\ 1,\ 4,\ 4), \quad a_3 = (-1,\ 3,\ 4,\ 8).$$

Равенство

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = \Theta \tag{3}$$

приводит к системе уравнений, имеющей единственное — нулевое — решение. (Проверьте!) Таким образом, из равенства (3) следует, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Иначе говоря, равенство (3) выполняется только при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Системы векторов в примерах 1—2 являются линейно зависимыми, система примера 3 — линейно независимой.

Определение 3. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейного пространства R над полем P называется *линейно зависимой*, если существуют не все равные нулю числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ поля P, такие, что

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k = \Theta. \qquad (*)$$

Если же для векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равенство (*) имеет место только при $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, то система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется *линейно независимой*.

Заметим, что свойство линейной зависимости и независимости является свойством системы векторов. Однако в литературе широко используют те же прилагательные в применении непосредственно к самим векторам и говорят, допуская вольность речи, «система линейно независимых векторов» и даже «векторы линейно независимы».

Если в системе имеется всего один вектор a, то при $a \neq \theta$ по свойству 6 (§ 2) из $ca = \theta$ следует $c = 0$. Значит, система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима. Напротив, любая система векторов $a_1, \ldots, a_k$, содержащая нулевой вектор θ, линейно зависима. Например, если $a_1 = \theta$, то

$$1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_k = \Theta.$$

Если система двух векторов a_1 и a_2 линейно зависима, то имеет место равенство $c_1a_1 + c_2a_2 = \theta$ при $c_1 \neq 0$ (или $c_2 \neq 0$). Тогда

$$a_1 = -\frac{c_2}{c_1}a_2 \quad \left(\text{или} \quad a_2 = -\frac{c_1}{c_2}a_1\right),$$

т. е. векторы a_1 и a_2 пропорциональны. Верно и обратное, так как из $a_1 = ca_2$ следует $1 \cdot a_1 + (-c)\, a_2 = \theta$. Значит, система двух векторов a_1, a_2 линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы a_1, a_2 пропорциональны.

Пропорциональные векторы из V_3 лежат на одной прямой; в связи с этим и в общем случае пропорциональные векторы иногда называют коллинеарными.

Отметим некоторые свойства линейной зависимости векторов.

Свойство 1. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Пусть линейно зависима подсистема

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

системы

$$a_1', a_2', \ldots, a_m', \text{ где } k < m.$$

Тогда существуют не все равные нулю числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, такие, что

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k = \Theta.$$

Добавив в левую часть этого равенства остальные векторы данной системы с нулевыми коэффициентами, получим требуемое.

Из свойства 1 следует, что всякая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Свойство 2. Если система векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{4}$$

линейно независима, а система векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b \tag{5}$$

линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы системы (4).

Так как система векторов (5) линейно зависима, то существуют не все равные нулю числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, такие, что

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ka_k + cb = \Theta. \tag{6}$$

Если $c = 0$, то $cb = \theta$ и тогда ненулевые коэффициенты будут среди $c_1, c_2, \ldots, c_k$, что означало бы линейную зависимость системы (4). Значит, $c \neq 0$ и

$$b = -\frac{c_1}{c}a_1 - \frac{c_2}{c}a_2 - \ldots - \frac{c_k}{c}a_k.$$

Свойство 3. Упорядоченная система ненулевых векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \quad (k > 1)$$

линейно зависима тогда и только тогда, когда некоторый вектор a_i, $2 \leqslant i \leqslant k$, является линейной комбинацией предшествующих векторов.

Пусть система $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима. Так как $a_1 \neq \theta$, то вектор a_1 линейно независим. Обозначим через $i \geqslant 2$ наименьшее натуральное число, при котором система $a_1, a_2, \ldots, a_i$ линейно зависима. (Такое i существует: в крайнем случае, если системы a_1, a_2; a_1, a_2, a_3; ...; $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ линейно независимы, то $i = k$.) Тогда существуют не все равные нулю числа $c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i$, такие, что выполняется равенство

$$c_1a_1 + \ldots + c_{i-1}a_{i-1} + c_ia_i = \Theta.$$

Если бы $c_i = 0$, то ненулевые коэффициенты были бы среди $c_1, \ldots, c_{i-1}$ и выполнялось бы равенство

$$c_1a_1 + \ldots + c_{i-1}a_{i-1} = \Theta,$$

что означало бы линейную зависимость системы $a_1, \ldots, a_{i-1}$, но это противоречило бы выбору числа i. Значит, $c_i \neq 0$, и поэтому

$$a_i = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_{i-1}a_{i-1}. \tag{7}$$

Обратно, из равенства (7) по свойству 1 следует линейная зависимость системы $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Из свойства 3 легко следует, что система векторов $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_k$, $k > 1$ тогда и только тогда линейно зависима, когда хотя бы один ее вектор линейно выражается через остальные. В этом смысле и говорят, что понятие линейной зависимости эквивалентно понятию линейной выражаемости.

Свойство 4. Если вектор x линейно выражается через векторы системы

$$a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k, \tag{8}$$

а вектор a_i линейно выражается через остальные векторы системы (8), то вектор x также линейно выражается через эти векторы системы (8).

В самом деле,

$$\begin{gathered}x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{i-1}a_{i-1} + \alpha_i a_i + \alpha_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \alpha_k a_k = \alpha_1 a_1 + \\ + \ldots + \alpha_{i-1}a_{i-1} + \alpha_i(\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{i-1}a_{i-1} + \beta_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \beta_k a_k) + \\ + \alpha_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \alpha_k a_k = \beta'_1 a_1 + \beta'_2 a_2 + \ldots + \beta'_{i-1}a_{i-1} + \\ + \beta'_{i+1}a_{i+1} + \ldots + \beta'_k a_k.\end{gathered}$$

Теперь можно доказать одну из важнейших теорем о линейной зависимости векторов.

Теорема 1. Если каждый вектор линейно независимой системы

$$a_1, a_2, \ldots, a_m \tag{9}$$

есть линейная комбинация векторов

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \tag{10}$$

то $m \leqslant n$. Другими словами, в линейно независимой системе векторов, являющихся линейными комбинациями n векторов $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_n$, число векторов не может быть больше n.

Доказательство. 1-й шаг. Построим систему

$$a_1, b_1, b_2, \ldots, b_n. \tag{11}$$

По условию каждый вектор системы (9), в частности вектор a_1, линейно выражается через векторы (10), а потому система (11) линейно зависима. По свойству 3 в системе (11) некоторый вектор b_i, где $1 \leqslant i \leqslant n$, линейно выражается через предшествующие векторы, а потому и через векторы системы

$$a_1, b'_1, b'_2, \ldots, b'_{n-1}, \tag{12}$$

полученной из (11) удалением вектора b_i. Отсюда по свойству 4 имеем: каждый вектор a_i системы (9) линейно выражается через векторы системы (12).

2-й шаг. Применяя те же рассуждения, что и на 1-м шаге, к системам векторов

$$a_2, a_3, \ldots, a_m$$

и (12) и учитывая, что система векторов a_2, a_1 линейно независима, мы получим систему векторов

$$a_2,\ a_1,\ b_1'',\ b_2'',\ \dots,\ b_{n-2}'', \tag{13}$$

через которые линейно выражаются все векторы системы (9).

Если допустить, что $m > n$, то, продолжая этот процесс, мы через n шагов исчерпаем все векторы b_1, b_2, ..., b_n и получим систему

$$a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_2,\ a_1, \tag{14}$$

такую, что каждый вектор системы (9), в частности a_{n+1}, линейно выражается через векторы системы (14). Тогда система (9) оказывается линейно зависимой, что противоречит условию. Остается принять, что $m \leqslant n$.

Рассмотрим теперь, что означает линейная зависимость векторов в различных пространствах.

1. Пространство V_3. Если система двух векторов a и b линейно зависима, то $a = \lambda b$ или $b = \lambda a$, т. е. векторы коллинеарны. Верно и обратное. Система трех векторов пространства V_3 линейно зависима тогда и только тогда, когда они лежат в одной плоскости. (Докажите!) Система четырех векторов a_1, a_2, a_3, a_4 пространства V_3 всегда линейно зависима. В самом деле, если какая-либо подсистема нашей системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима. Если же никакая собственная подсистема не является линейно зависимой, то по предыдущему это означает, что никакие три вектора нашей системы не лежат на одной плоскости. Тогда из геометрических соображений следует существование вещественных чисел λ_1, λ_2, λ_3, таких, что параллелепипед с ребрами-векторами $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2$, $\lambda_3 a_3$ будет иметь диагональ a_4, т. е. $a_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

2. Пространство T_n. Линейная зависимость векторов пространства T_n, как строк матрицы, рассматривалась нами ранее при изучении систем линейных уравнений. В связи с этим будем считать известным, что максимальное число линейно независимых векторов системы

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = (\zeta_{11},\ \zeta_{12},\ \dots,\ \zeta_{1n}), \\ a_2 = (\zeta_{21},\ \zeta_{22},\ \dots,\ \zeta_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k = (\zeta_{k1},\ \zeta_{k2},\ \dots,\ \zeta_{kn}), \end{array}\right\} \tag{15}$$

т. е. строк или столбцов матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \dots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \dots & \zeta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta_{k1} & \zeta_{k2} & \dots & \zeta_{kn} \end{pmatrix},$$

есть ранг матрицы M (ранг M). В частности, система векторов (15) линейно независима, если ранг $M = k$, и линейно зависима, если ранг $M < k$. Таким образом, решение вопроса о линейной зависимости системы векторов сводится к вычислению ранга матрицы.

Укажем, как можно найти сами зависимости (если они существуют), т. е. коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_k$ в равенстве

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_k a_k = \Theta. \qquad (16)$$

Условием равенства векторов $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots \ldots, \eta_n)$ из T_n являются равенства $\zeta_i = \eta_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Нулем θ пространства T_n является вектор $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$. Отсюда следует, что (векторное) уравнение (16) относительно неизвестных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ равносильно системе уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_{11}c_1 + \zeta_{21}c_2 + \ldots + \zeta_{k1}c_k = 0, \\ \zeta_{12}c_1 + \zeta_{22}c_2 + \ldots + \zeta_{k2}c_k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta_{1n}c_1 + \zeta_{2n}c_2 + \ldots + \zeta_{kn}c_k = 0. \end{array}\right\}$$

Таким образом, вопрос о нахождении линейных зависимостей между векторами в T_n сводится к решению однородной системы уравнений. В частности, система векторов (15) будет линейно независимой, если последняя система уравнений имеет только нулевое решение, и зависимой в противном случае. Примером линейно независимой системы векторов пространства T_n может служить совокупность векторов:

$$\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{array}$$

3. В пространстве $C(a, b)$ линейная зависимость векторов

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ \ldots, \ x_k = x_k(t)$$

означает, что соотношение

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_k x_k(t) = \Theta$$

выполняется тождественно относительно t, $a \leqslant t \leqslant b$, при некоторых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не всех равных нулю; здесь θ — функция, равная нулю при любом $t \in [a, b]$. Например, функции $x_1(t) = \sin^2 t$, $x_2(t) = \cos^2 t$, $x_3(t) = 1$ линейно зависимы, так как $x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) = \theta$. Заметим, что $1, t, t^2, \ldots, t^{k-1}$ линейно независимы, так как равенство (при любом фиксированном k)

$$c_0 \cdot 1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{k-1} t^{k-1} = \Theta$$

означает, что слева мы имеем нуль-многочлен, и потому $c_0 = c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$.

Упражнения

1. Система векторов x, y, z линейно независима. Будет ли линейно независимой система $x + y$, $y + z$, $z + x$?

2. Если система векторов a_1, a_2, ..., a_k линейно независима и числа λ_1, λ_2, ..., λ_k отличны от нуля, то и система $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2$, ..., $\lambda_k a_k$ линейно независима. Доказать.

3. Доказать, что если система a_1, a_2, ..., a_k линейно независима и $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$, то указанное представление вектора b единственно.

4. Доказать, что система четырех векторов

$$a_1 = (1,\ 0,\ 0),\quad a_2 = (0,\ 1,\ 0),\quad a_3 = (0,\ 0,\ 1),\quad a_4 = (1,\ 1,\ 1)$$

из T_3 линейно зависима, но любые три из них линейно независимы.

5. [7], № 639—644, 665—669.

6. В пространстве $C(a,\ b)$ взяты четыре вектора:

$$x_1(t) = 1,\quad x_2(t) = t,\quad x_3(t) = t^2,\quad x_4(t) = 1 + t + t^2.$$

Доказать, что система всех этих векторов линейно зависима, а любые три из них линейно независимы.

7. [7][1], № 1824—1828.

§ 4. БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА ОТНОСИТЕЛЬНО БАЗИСА

Определение 4. *Базисом* или *координатной системой* линейного пространства R над числовым полем P называется такая упорядоченная линейно независимая система векторов e_1, e_2, ..., e_n этого пространства, что для всякого вектора $x \in R$ существует линейное представление

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n, \tag{1}$$

где ζ_1, ζ_2, ..., $\zeta_n \in P$.

Таким образом, по определению к базису предъявляются два требования: первое — векторы, входящие в базис, линейно независимы; второе — каждый вектор $x \in R$ линейно выражается через векторы базиса. (Покажите независимость этих требований друг от друга.) Если e_1, e_2, ..., e_n — базис, то коэффициенты ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n представления (1) находятся однозначно. В самом деле, если бы для некоторого вектора x можно было бы написать, кроме (1), другое представление

$$x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

то, произведя почленное вычитание, получили бы равенство

$$(\zeta_1 - \eta_1)e_1 + (\zeta_2 - \eta_2)e_2 + \ldots + (\zeta_n - \eta_n)e_n = \Theta.$$

Так как векторы e_1, e_2, ..., e_n линейно независимы по определению базиса, то отсюда получаем, что $\zeta_1 = \eta_1$, $\zeta_2 = \eta_2$, ..., $\zeta_n = \eta_n$.

[1] В квадратных скобках дан порядковый номер книги в списке использованной литературы, который дан в конце пособия.

Числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ в представлении (1) называют координатами, а набор чисел

$$(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$$

— координатной строкой вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Иногда этот набор чисел мы будем записывать в виде

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

и называть координатным столбцом вектора x.

Примеры. 1. В пространстве V_3 в качестве базиса можно взять любые три вектора, не лежащие в одной плоскости. (Докажите!)

2. В пространстве T_n базис составляют, например, векторы

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),\quad e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\quad \ldots,\quad e_n = (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1).$$

В самом деле, указанные векторы линейно независимы; кроме того, для любого вектора $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ имеет место

$$x = \zeta_1 (1,\ 0,\ \ldots,\ 0) + \zeta_2 (0,\ 1,\ \ldots,\ 0) + \ldots + \zeta_n (0,\ 0,\ \ldots,\ 1) = \\ = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что компоненты $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ вектора $x \in T_n$ являются его координатами в указанном базисе. Этот базис называют иногда стандартным. В пространстве T_n можно указать бесконечное множество базисов. Например, базисом T_n будут векторы:

$$e_1' = (\alpha,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ e_2' = (0,\ \beta,\ \ldots,\ 0),\ \ldots,\ e_n' = (0,\ 0,\ \ldots,\ \gamma),$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — произвольные, отличные от нуля вещественные числа.

3. R — линейное пространство многочленов от t степени $\leqslant n - 1$. Одним из базисов этого пространства является: $e_0 = 1$, $e_1 = t$, $e_2 = t^2, \ldots, e_{n-1} = t^{n-1}$. Линейная независимость этих векторов отмечалась раньше (§ 3); координатами многочлена $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$ в этом базисе будут его коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Другой базис: $e_0' = 1$, $e_1' = t - a$, $e_2' = (t - a)^2, \ldots, e'_{n-1} = (t - a)^{n-1}$, где a — произвольный многочлен нулевой степени, т. е. любое, не равное нулю число. Так как по формуле Тейлора

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + \frac{f''(a)}{2!}(t - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t - a)^{n-1},$$

то в указанном базисе координатами многочлена $f(t)$ будут числа:

$$f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

4. R — линейное пространство вещественных квадратных матриц порядка n. Базис этого пространства составляют n^2 матриц E_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; E_{ij} есть матрица, в которой элемент $a_{ij} = 1$, а остальные элементы нули. Линейная независимость указанных n^2 матриц легко проверяется на основе определения 3. Кроме того, для любой матрицы A порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \ldots + a_{1n}E_{1n} + \ldots + \\ + a_{nn}E_{nn}.$$

5. В пространстве $C(a, b)$ нет базиса в смысле определения 4. В самом деле, для любого натурального n_0 функции $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = t$, $\ldots$, $f_{n_0}(t) = t^{n_0}$ линейно независимы. Отсюда и из теоремы 1 следует, что в $C(a, b)$ нет базиса.

Теорема 2. Если пространство R имеет базис из n векторов, то всякая линейно независимая система из n его векторов также является базисом.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства R и

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

— любая линейно независимая система его векторов. Эта система, будучи линейно независимой, удовлетворяет первому требованию определения базиса. Проверим второе требование. Пусть x — произвольный вектор из R. Система векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, x$$

линейно зависима, так как в противном случае по теореме 1 было бы $n + 1 \leqslant n$. Отсюда по свойству 2 линейной зависимости имеем: вектор x линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Теорема доказана.

Теорема 3. Если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — два базиса некоторого линейного пространства R, то $m = n$, т. е. все базисы линейного пространства R состоят из одинакового числа векторов.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 1. Так как $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — базис, то эта система линейно независима; так как $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — базис, то каждый вектор $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно выражается через векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда по теореме 1 получаем $m \leqslant n$. Вторичное применение теоремы 1 дает $n \leqslant m$. Отсюда $m = n$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства R. Если

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n \text{ и } y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n,$$

то

$$x+y=(\zeta_1+\eta_1)e_1+(\zeta_2+\eta_2)e_2+\ldots+(\zeta_n+\eta_n)e_n,$$
$$\lambda x=(\lambda\zeta_1)e_1+(\lambda\zeta_2)e_2+\ldots+(\lambda\zeta_n)e_n.$$

Таким образом, при фиксированном базисе сложение векторов пространства R и умножение вектора на число λ сводится к соответствующим операциям над координатами, т. е. линейное пространство, имеющее базис, арифметизируется.

Теорема 4. Система векторов

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k \tag{3}$$

пространства R, имеющего базис, линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система координатных столбцов векторов (3) в каком-либо базисе пространства R.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — какой-нибудь базис пространства R. Тогда имеют место линейные представления векторов (3):

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\zeta_{11}e_1+\zeta_{12}e_2+\ldots+\zeta_{1n}e_n,\\a_2&=\zeta_{21}e_1+\zeta_{22}e_2+\ldots+\zeta_{2n}e_n,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_k&=\zeta_{k1}e_1+\zeta_{k2}e_2+\ldots+\zeta_{kn}e_n.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Для решения вопроса о линейной зависимости системы векторов (3) нам нужно решить векторное уравнение:

$$c_1a_1+c_2a_2+\ldots+c_ka_k=\Theta.$$

Подставляя в это равенство вместо a_i их выражения из (4) и пользуясь правом производить операции над координатами вместо соответствующих операций над векторами, получим:

$$(\zeta_{11}c_1+\zeta_{21}c_2+\ldots+\zeta_{k1}c_k)e_1+(\zeta_{12}c_1+\zeta_{22}c_2+\ldots+\zeta_{k2}c_k)e_2+$$
$$+\ldots+(\zeta_{1n}c_1+\zeta_{2n}c_2+\ldots+\zeta_{kn}c_k)e_n=\Theta.$$

Так как система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, будучи базисом, линейно независима, то последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{11}c_1+\zeta_{21}c_2+\ldots+\zeta_{k1}c_k&=0,\\\zeta_{12}c_1+\zeta_{22}c_2+\ldots+\zeta_{k2}c_k&=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\\zeta_{1n}c_1+\zeta_{2n}c_2+\ldots+\zeta_{kn}c_k&=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отсюда и из определения 3 имеем: система векторов (3) линейно зависима тогда и только тогда, когда система уравнений (5) относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_k$ имеет ненулевое решение. Последнее имеет место лишь в том случае, когда ранг матрицы M, составленной из коэффициентов системы (5), меньше числа неизвестных k. А так как ранг матрицы равен числу ее линейно независимых столбцов, а столбцами матрицы M являются координатные столбцы векторов (3), то ранг $M < k$ означает линейную зависимость системы координатных столбцов векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Этим теорема доказана.

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых векторов системы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ пространства R, имеющего базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, равно рангу матрицы M, составленной из координатных столбцов векторов этой системы. (Докажите!)

Следствие 2. Система n векторов пространства R, имеющего базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, линейно независима тогда и только тогда, когда матрица M, составленная из координатных столбцов этих векторов относительно данного базиса, является невырожденной.

Замечание. Значение теоремы 4 заключается в том, что она сводит вопрос о линейной зависимости системы векторов произвольного линейного пространства R, имеющего базис, к вопросу о линейной зависимости системы векторов арифметического пространства T_n.

Пример. Векторы a_1, a_2, a_3, a_4 и x некоторого пространства R имеют в каком-либо базисе координатные строки:

$$\begin{aligned} a_1&: (1, 2, -1, -2),\\ a_2&: (2, 3, 0, -1),\\ a_3&: (1, 2, 1, 4),\\ a_4&: (1, 3, -1, 0),\\ x&: (7, 14, -1, 2). \end{aligned}$$

Показать, что a_1, a_2, a_3, a_4 — базис пространства R, и найти координаты вектора x в этом базисе.

Решение. По числу координат у данных векторов замечаем, что базис пространства R состоит из 4 векторов. По теореме 2 для решения первого вопроса задачи достаточно показать линейную независимость системы векторов a_1, a_2, a_3, a_4, для чего по следствию 2 из теоремы 4 нужно показать, что ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 4. Для ответа на второй вопрос нам понадобится решить уравнение

$$x = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2 + \zeta_3 a_3 + \zeta_4 a_4 \tag{6}$$

относительно неизвестных $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$.

Уравнение (6) равносильно системе:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 &= 7, \\ 2\zeta_1 + 3\zeta_2 + 2\zeta_3 + 3\zeta_4 &= 14, \\ -\zeta_1 + \zeta_3 - \zeta_4 &= -1, \\ -2\zeta_1 - \zeta_2 + 4\zeta_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Решаем эту систему уравнений в матричной форме:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 14 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда видно, что ранг матрицы M равен 4, а потому система векторов a_1, a_2, a_3, a_4 является базисом пространства R. Кроме того, по последней матрице находим:

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 2, \quad \zeta_3 = 1, \quad \zeta_4 = 2.$$

Упражнения

[7], № 1277—1278;
[10], № 881.

§ 5. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определение 5. Линейное пространство R называется n-мерным, если в нем выполнимы аксиомы:

IV. 9°. В пространстве R существует хотя бы одна линейно независимая система n векторов.

10°. Всякая система $n+1$ векторов пространства R линейно зависима.

Число n при этом называется *размерностью* пространства R и обозначается через $\dim R$. Линейное пространство R размерности n будем обозначать R_n. Пространства, в которых можно указать как угодно большое число линейно независимых векторов, называются *бесконечномерными*. Примером такого пространства может служить пространство $C(a, b)$.

Теорема 5. Линейное пространство R является n-мерным тогда и только тогда, когда в нем существует базис из n векторов.

Доказательство. Пусть R — линейное пространство, размерности n. По определению 5 в R_n существует система e_1, e_2, ...

..., e_n из n линейно независимых векторов. Если x — некоторый произвольный вектор из R_n, то система $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ из $n+1$ векторов по определению 5 линейно зависима. По свойству 2 линейной зависимости векторов получаем, что вектор x линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, которые в соответствии с определением 4 образуют базис пространства R_n.

Обратно, пусть пространство R имеет базис из n векторов $e_1, e_2, \ldots$ ..., e_n. Следовательно, условие 9° определения 5 выполнено. Покажем, что выполняется также и условие 10°. Допустим, что в R существует линейно независимая система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Так как каждый вектор a_i выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (по определению базиса), то по теореме 1 мы приходим к абсурду $n+1 \leqslant n$. Этим теорема доказана.

Исходя из определения 5 или используя теорему 5, легко установить, что пространство V_3 трехмерно, V_2 двумерно, V_1 одномерно, T_n имеет размерность n. Пространство многочленов степени $\leqslant n$ является $n+1$-мерным, пространство квадратных матриц порядка n имеет размерность n^2.

Упражнения

1. Каким должно быть число ζ, чтобы система векторов $(0, 1, \zeta)$, $(\zeta, 0, 1)$, $(\zeta, 1, \zeta)$ была базисом в T_3?

2. Доказать, что совокупность симметрических вещественных матриц порядка n образует линейное пространство над полем D, если за операции взять сложение матриц и умножение матрицы на действительное число. Найти базис и размерность этого пространства.

3. Те же вопросы для совокупности кососимметрических матриц порядка n (т. е. матриц (a_{ij}), у которых $a_{ik} = -a_{ki}$).

4. Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства, состоящего из всех векторов пространства T_n, компоненты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

5. Рассмотрим множество всех тех векторов из T_n, каждая компонента которых равна 0 либо 1. Сколько различных базисов пространства T_n содержится в этом множестве?

§ 6. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 6. Два линейных пространства R и R' над полем P называются *изоморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие

$$x \leftrightarrow x', \quad (x \in R, \quad x' \in R'),$$

так что

$$(x+y)' = x' + y', \quad (\lambda x)' = \lambda x' \tag{1}$$

для любых векторов $x, y \in R$ и любого $\lambda \in P$.

Если указанное соответствие обозначить буквой Φ, то вместо x' можно будет писать $\Phi(x)$ и условия (1) запишутся в виде

$$\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y), \quad \Phi(\lambda x)=\lambda\Phi(x).$$

Отметим некоторые свойства изоморфизма пространств.

Свойство 1. При изоморфном соответствии двух пространств R и R' произвольной линейной комбинации векторов пространства R соответствует такая же линейная комбинация векторов пространства R'.

В самом деле, пусть при изоморфизме Φ векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ пространства R переходят соответственно в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ пространства R', т. е. $\Phi(a_i)=b_i$, $i=1, 2, \ldots, m$. Тогда из определения 6 индукцией по m получаем:

$$\Phi(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m)=\Phi(\lambda_1 a_1)+\Phi(\lambda_2 a_2)+\ldots+\Phi(\lambda_m a_m)=$$
$$=\lambda_1\Phi(a_1)+\lambda_2\Phi(a_2)+\ldots+\lambda_m\Phi(a_m)=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_m b_m.$$

Отсюда, в частности, следует (при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$)

Свойство 2. При изоморфном соответствии двух пространств нулевому вектору соответствует нулевой вектор.

Свойство 3. При изоморфизме линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему векторов.

Пусть векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ пространства R линейно независимы и при изоморфизме Φ переходят соответственно в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_m \in R'$, так что $\Phi(a_i)=b_i$, $i=1, 2, \ldots, m$. Пусть между векторами $b_1, b_2, \ldots, b_m$ имеет место линейное соотношение $\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_m b_m=\theta'$, где θ' — нуль пространства R'. Тогда по свойствам 1 и 2 для векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ будет выполняться соотношение $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m=\theta$, где θ — нуль пространства R. Но система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно независима, значит, $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$.

Из свойств 2 и 3, в частности, следует, что при изоморфизме двух пространств всякий базис одного пространства переходит в базис другого.

Теорема 6. *Любые два n-мерных линейных пространства R_n и R'_n изоморфны над одним полем* P.

Доказательство. Зафиксируем какие-нибудь базисы пространств R_n и R'_n: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Взаимно однозначное соответствие между пространствами R_n и R'_n установим следующим способом. Пусть x — произвольный вектор пространства R_n, причем

$$x=\zeta_1 e_1+\zeta_2 e_2+\ldots+\zeta_n e_n.$$

Вектору $x\in R_n$ поставим в соответствие вектор $x'\in R'_n$:

$$x'=\zeta_1 e'_1+\zeta_2 e'_2+\ldots+\zeta_n e'_n.$$

Таким образом, вектор x' в базисе $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ имеет те же координаты, что и вектор x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ясно, что установленное по этому правилу соответствие $\Phi(x) = x'$ векторов пространств R_n и R_n' будет взаимно однозначным. Осталось проверить, что соответствие Φ подчиняется условиям изоморфизма (1).

Пусть

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n$$

— произвольные векторы пространства R_n и

$$z = x + y = (\zeta_1 + \eta_1) e_1 + (\zeta_2 + \eta_2) e_2 + \ldots + (\zeta_n + \eta_n) e_n.$$

Обозначим через x', y', z' векторы пространства R_n', соответствующие векторам x, y, z, т. е.

$$x' = \Phi(x) = \zeta_1 e_1' + \zeta_2 e_2' + \ldots + \zeta_n e_n',$$

$$y' = \Phi(y) = \eta_1 e_1' + \eta_2 e_2' + \ldots + \eta_n e_n',$$

$$z' = \Phi(z) = (\zeta_1 + \eta_1) e_1' + (\zeta_2 + \eta_2) e_2' + \ldots + (\zeta_n + \eta_n) e_n'.$$

Замечаем, что

$$\Phi(x + y) = \Phi(z) = z' = x' + y' = \Phi(x) + \Phi(y),$$

т. е. 1-е условие (1) определения 6 выполнено. Кроме того,

$$\Phi(\lambda x) = \lambda\zeta_1 e_1' + \lambda\zeta_2 e_2' + \ldots + \lambda\zeta_n e_n' = \lambda\Phi(x),$$

т. е. выполнено и 2-е условие (1). Этим теорема доказана.

Пусть R_n — некоторое n-мерное линейное пространство над полем D вещественных чисел, T_n — арифметическое пространство. Тогда из теоремы 6 имеем

Следствие. Всякое n-мерное линейное пространство над полем D изоморфно пространству T_n.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ БАЗИСА

Пусть R_n — линейное пространство над полем P и $e_1, e_2, \ldots, e_n$; $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ — два его базиса. Условимся первый из этих базисов называть «старым», второй — «новым» и обозначать соответственно через $\{e\}$ и $\{e'\}$. Так как $\{e\}$ и $\{e'\}$ — базисы, то имеют место однозначные представления:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n = \zeta_1' e_1' + \zeta_2' e_2' + \ldots + \zeta_n' e_n', \tag{1}$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ — координаты вектора x в базисе $\{e\}$, а $\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n'$ — его координаты в базисе $\{e'\}$. Задача состоит в вычислении координат вектора x в одном базисе по известным его координатам в другом базисе.

Как и все векторы пространства R_n, векторы базиса $\{e'\}$ однозначно выражаются через векторы базиса $\{e\}$, так что можно записать:

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \ldots + \tau_{n1}e_n, \\ e_2' &= \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \ldots + \tau_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n' &= \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \ldots + \tau_{nn}e_n, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где τ_{ij} — числа основного поля P.

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11}\tau_{12}\ldots\tau_{1n} \\ \tau_{21}\tau_{22}\ldots\tau_{2n} \\ \ldots\ldots \\ \tau_{n1}\tau_{n2}\ldots\tau_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$. Заметим, что столбцами матрицы T являются координаты векторов e_1', ..., e_n' в базисе $\{e\}$. Например, если для векторов базиса e_1', e_2', e_3' будет:

$$\begin{aligned} e_1' &= 5e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' &= 2e_1 - 3e_2 - 10e_3, \\ e_3' &= -2e_1 + e_2 - e_3, \end{aligned}$$

то матрицей перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$ будет:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выразим координаты ζ_1', ζ_2', ..., ζ_n' через координаты ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n. Подставив в (1) вместо e_1', e_2', ..., e_n' их выражения через e_1, e_2, ..., e_n из (2), получим:

$$\begin{aligned} x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n = \zeta_1'(\tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \ldots + \tau_{n1}e_n) + \\ + \zeta_2'(\tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \ldots + \tau_{n2}e_n) + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \zeta_n'(\tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \ldots + \tau_{nn}e_n). \end{aligned}$$

Так как представление вектора x в базисе $\{e\}$ единственно, то коэффициенты ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n при e_1, e_2, ..., e_n в левой части этого равенства равны соответствующим коэффициентам при $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_n$ в правой части, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \tau_{11}\zeta_1' + \tau_{12}\zeta_2' + \ldots + \tau_{1n}\zeta_n', \\ \zeta_2 &= \tau_{21}\zeta_1' + \tau_{22}\zeta_2' + \ldots + \tau_{2n}\zeta_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_n &= \tau_{n1}\zeta_1' + \tau_{n2}\zeta_2' + \ldots + \tau_{nn}\zeta_n'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Равенства (3) можно записать в матричной форме так:

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \zeta_1' \\ \zeta_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_n' \end{pmatrix}, \tag{4}$$

или если обозначить через X столбец координат вектора x в базисе $\{e\}$, а через X_1 — столбец координат того же вектора в базисе $\{e'\}$, то

$$X = TX_1. \tag{5}$$

Таким образом, столбец координат вектора x в базисе $\{e\}$ равен столбцу координат этого вектора в базисе $\{e'\}$, умноженному слева на матрицу T перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$.

Из равенства (5) легко получить также выражение вектора X_1 через X. В самом деле, по следствию 2 из теоремы 4 матрица T невырожденная, а потому имеет обратную. Умножая обе части равенства (5) на матрицу T^{-1}, получим:

$$X_1 = T^{-1}X.$$

Пример. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3' пространства T_3, если

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 2, 1), \qquad & e_1' &= (3, 1, 4), \\ e_2 &= (2, 3, 3), & e_2' &= (5, 2, 1), \\ e_3 &= (3, 7, 1), & e_3' &= (1, 1, -6). \end{aligned}$$

Решение. Найдем линейные выражения векторов e_1', e_2', e_3' через векторы e_1, e_2, e_3. Так как по условию векторы $\{e\}$ образуют базис пространства T_3, то эти линейные представления существуют и единственны. Уравнения

$$\begin{aligned} e_1' &= \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \tau_{31}e_3, \\ e_2' &= \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \tau_{32}e_3, \\ e_3' &= \tau_{13}e_1 + \tau_{23}e_2 + \tau_{33}e_3 \end{aligned}$$

равносильны соответственно системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{11}+2\tau_{21}+3\tau_{31}&=3,\\ 2\tau_{11}+3\tau_{21}+7\tau_{31}&=1,\\ \tau_{11}+3\tau_{21}+\tau_{31}&=4,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{12}+2\tau_{22}+3\tau_{32}&=5,\\ 2\tau_{12}+3\tau_{22}+7\tau_{32}&=2,\\ \tau_{12}+3\tau_{22}+\tau_{32}&=1,\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{13}+2\tau_{23}+3\tau_{33}&=1,\\ 2\tau_{13}+3\tau_{23}+7\tau_{33}&=1,\\ \tau_{13}+3\tau_{23}+\tau_{33}&=-6.\end{aligned}\right\}$$

Левые части этих систем отличаются лишь обозначениями неизвестных, а правые части различны. Поэтому процесс отыскания решений методом Гаусса можно записать одновременно для всех систем в матричной схеме. Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41\\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8\end{array}\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e_1' &= -27e_1+9e_2+4e_3,\\ e_2' &= -71e_1+20e_2+12e_3,\\ e_3' &= -41e_1+9e_2+8e_3.\end{aligned}\qquad T=\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}.$$

Упражнения

[7], № 1281, 1283, 1284;
[10], № 882.

§ 8. ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Определение 7. Подмножество L данного линейного пространства R над полем P называется линейным подпространством или просто подпространством пространства R, если оно само является линейным пространством над полем P относительно определенных в R операций сложения векторов и умножения вектора на числа из P.

Теорема 7. Для того чтобы непустое подмножество L линейного пространства R над полем P было его подпространством, достаточно выполнения следующих двух требований:

а) если $x, y \in L$, то $x+y \in L$;
б) если $x \in L$, $\lambda \in P$, то $\lambda x \in L$.

Доказательство. Пусть условия а) и б) выполнены. Согласно определению 1 надо доказать выполнимость аксиом 1°—8°. Пусть $x \in L$, тогда по условию б) L содержит вектор $0 \cdot x = \theta$ — аксиома 3° выполнена. Кроме того, L содержит вместе с вектором x вектор $(-1)x = -x$, т. е. вектор, противоположный вектору x, — аксиома 4° выполнена. Все остальные аксиомы из 1°—8° выполняются в R, а потому они выполняются и в L.

Примеры. 1. Нуль-вектор θ и само пространство R — тривиальные подпространства пространства R.

2. Все векторы пространства V_3, расположенные в некоторой плоскости (или на некоторой прямой), проходящей через O, составляют подпространство V_2 (соответственно V_1) пространства V_3.

3. Совокупность L решений однородной линейной системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

т. е. совокупность L всех тех векторов $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ пространства T_n, компоненты которых удовлетворяют уравнениям системы (1), будет, очевидно, подпространством пространства T_n. (О размерности этого подпространства см. § 10.)

4. Пересечение двух подпространств L_1, L_2 пространства R есть снова подпространство пространства R.

а) Пусть $L = L_1 \cap L_2$, тогда если $x \in L$, то $x \in L_1$, $x \in L_2$.

Аналогично если $y \in L$, то $y \in L_1$, $y \in L_2$.

Так как L_1 и L_2 — подпространства, то $x + y \in L_1$ и $x + y \in L_2$, т. е. $x + y \in L$.

б) Пусть $x \in L$. Тогда $x \in L_1$, $x \in L_2$; $\lambda x \in L_1$, $\lambda x \in L_2$. Значит, $\lambda x \in L$ и по теореме 7 L есть подпространство пространства R.

5. Множество L векторов вида $x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и L_1, L_2 — подпространства из R, есть подпространство пространства R.

а) Пусть $x \in L$. Тогда $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.

Пусть $y \in L$. Тогда $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$.

Так как L_1 и L_2 — подпространства, то $x_1 + y_1 \in L_1$, $x_2 + y_2 \in L_2$, и тогда $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in L$.

б) Если $x \in L$, то $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, а так как L_1, L_2 — пространства, то $\lambda x_1 \in L_1$, $\lambda x_2 \in L_2$. Следовательно, $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in L$ и L — подпространство в R.

Определение 8. Построенное выше подпространство L называется *суммой* пространств L_1, L_2 и обозначается через $L_1 + L_2$. В том случае, когда $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, эта сумма называется прямой суммой.

Пусть L есть нетривиальное подпространство пространства R_n. Так как не все векторы из R_n входят в L, то не из всякого базиса пространства R_n можно выбрать базис пространства L. Больше того, в R_n могут существовать базисы, целиком содержащиеся в $R_n \setminus L$ ($R_n \setminus L$ есть множества векторов из R_n, не содержащихся в L).

Теорема 8. Если L — подпространство в R_n размерности $k < n$ и $e_1, \ldots, e_k$ — его базис, то в R_n всегда можно выбрать векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ так, чтобы система векторов $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots \ldots, e_n$ была базисом пространства R_n. Иначе говоря, любой базис подпространства L можно дополнить до базиса всего пространства R_n.

Доказательство. Если бы каждый вектор $x \in R_n$ линейно выражался через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$, то последние составляли бы базис пространства R_n, что невозможно, ибо $\dim R_n = n > k$. Значит, в R_n существует вектор e_{k+1}, не выражающийся через $e_1, \ldots, e_k$. Система векторов $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ линейно независима (§ 3, свойство 2). Если $k+1 < n$, то аналогичным образом в R_n найдется вектор e_{k+2}, такой, что система $e_1, \ldots, e_{k+1}, e_{k+2}$ линейно независима. Продолжая эти рассуждения, мы через $n-k$ шагов придем к базису пространства R_n.

Теорема 9. Если пространство R_n есть прямая сумма подпространств L_1, L_2, то

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim R_n = n. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — базисы соответственно подпространств L_1 и L_2. Покажем сначала, что система векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, \quad b_1, b_2, \ldots, b_s \tag{3}$$

линейно независима. В самом деле, если

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ra_r + c_{r+1}b_1 + \ldots + c_{r+s}b_s = \Theta,$$

то

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_ra_r = -c_{r+1}b_1 - \ldots - c_{r+s}b_s.$$

А так как $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, то $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = c_{r+1} = \ldots = c_{r+s} = 0$.

С другой стороны, из $L_1 + L_2 = R_n$ следует, что всякий вектор из R_n является линейной комбинацией векторов системы (3). Таким образом, система (3) является базисом пространства R_n, а потому $r + s = n$, т. е. имеет место (2).

Из доказательства теоремы 9 видно, что при $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ объединение базисов пространств L_1 и L_2 есть базис пространства $L_1 + L_2$. (Верно ли обратное утверждение?)

Отметим еще без доказательства следующее обобщение теоремы 9:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Упражнения

[7], № 1285—1294, 1297—1304, 1308.

§ 9. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА ИЛИ ПОДПРОСТРАНСТВО, НАТЯНУТОЕ НА ДАННУЮ СИСТЕМУ ВЕКТОРОВ

В § 8 были рассмотрены общие положения о подпространствах. Возникает, однако, естественный вопрос конструктивного характера о способах построения подпространств; одним из таких способов является образование так называемой линейной оболочки заданной системы векторов.

Определение 9. Пусть x, y, ..., z — конечная система векторов линейного пространства R над полем P. *Линейной оболочкой* системы x, y, ..., z называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов данной системы, т. е. совокупность векторов вида

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \gamma z \tag{1}$$

с произвольными коэффициентами α, β, ..., γ, взятыми из поля P.

Линейную оболочку векторов x, y, ..., z обозначим через $L(x, y, \ldots, z)$.

Пусть $a \in L(x, y, \ldots, z)$, $b \in L(x, y, \ldots, z)$, т. е.

$$a = \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots + \gamma_1 z,$$

$$b = \alpha_2 x + \beta_2 y + \ldots + \gamma_2 z.$$

Тогда $a + b = (\alpha_1 + \alpha_2) x + (\beta_1 + \beta_2) y + \ldots + (\gamma_1 + \gamma_2) z \in \in L(x, y, \ldots, z)$,

$$\lambda a = \lambda\alpha_1 x + \lambda\beta_1 y + \ldots + \lambda\gamma_1 z \in L(x, y, \ldots, z).$$

По теореме 7 получаем, что $L(x, y, \ldots, z)$ — подпространство пространства R. Значит, образование линейных оболочек действительно является способом конструирования подпространств.

О пространстве $L(x, y, \ldots, z)$ говорят также, что оно порождено векторами x, y, ..., z или натянуто на систему векторов x, y, ..., z.

Очевидно, что $L(x, y, \ldots, z)$ содержит и сами векторы x, y, ... z, так как, например, $x = 1 \cdot x + 0 \cdot y + \ldots + 0 \cdot z$. С другой стороны, всякое подпространство, содержащее векторы x, y, ..., z, содержит, очевидно, и все их линейные комбинации. Значит, линейная оболочка системы векторов x, y, ..., z содержится во всяком подпространстве, содержащем векторы x, y, ..., z, т. е. $L(x, y, \ldots, z)$ есть наименьшее подпространство, содержащее векторы x, y, ..., z. Указанный способ построения подпространств с помощью линейных оболочек является весьма общим. В самом деле, каждый вектор произвольного подпространства $F \subset R_n$ по определению базиса есть линейная комбинация векторов базиса пространства F и, значит, всякое подпространство F линейного пространства R_n является подпространством, натянутым на некоторые векторы из R_n (на векторы базиса F).

Из теоремы 1 следует, что размерность пространства $L(x, y, \ldots, z)$ равна числу векторов в максимальной линейно независимой подсистеме системы порождающих векторов $x, y, \ldots, z$, короче, максимальному числу линейно независимых векторов в системе $x, y, \ldots, z$.

Примеры. 1. Исходное пространство V_3. Порождающая система состоит из одного вектора a, подпространство $L(a)$ состоит из всех векторов, коллинеарных вектору a.

2. Исходное пространство V_3. Порождающая система состоит из двух неколлинеарных векторов a и b. Подпространство $L(a, b)$ есть совокупность векторов вида $\alpha a + \beta b$, $(\alpha, \beta \in D)$, $L(a, b) = \{\alpha a + \beta b\}$, т. е. плоскость, проходящая через векторы a и b.

3. Исходное пространство V_3. Порождающая система векторов — три некомпланарных вектора a, b, c. В этом случае подпространство $L(a, b, c)$ есть V_3.

4. R_n — произвольное линейное пространство; $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — его базис. Тогда $L(e_1, e_2, \ldots, e_n) = R_n$.

5. Исходное пространство $C(a, b)$. Система порождающих векторов — совокупность функций: $1, t, t^2, \ldots, t^k$. Тогда

$$L(1, t, t^2, \ldots, t^k) = \{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k\}, \quad \alpha_i \in D,$$

т. е. линейная оболочка L есть пространство всех многочленов степени $\leqslant k$.

6. Найти размерность и базис подпространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ пространства T_4, если

$$\begin{aligned} a_1 &= (1\ \ 0,\ 0,\ -1), & a_4 &= (1,\ 2,\ 3,\ 4),\\ a_2 &= (2,\ 1,\ 1,\ 0), & a_5 &= (0,\ 1,\ 2,\ 3).\\ a_3 &= (1,\ 1,\ 1,\ 1), \end{aligned}$$

Размерность пространства $L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ совпадает с максимальным числом линейно независимых векторов порождающей системы $a_1, \ldots, a_5$ и потому равна рангу матрицы M, составленной из векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Получаем ранг $M = 3$, а потому $\dim L = 3$. В ходе вычисления ранга матрицы M замечаем, что в качестве базиса L можно взять систему векторов a_1, a_2, a_4.

7. Найти базис и размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на векторы

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,\ 2,\ 1,\ 0), & b_1 &= (2,\ -1,\ 0,\ 1),\\ a_2 &= (-1,\ 1,\ 1,\ 1); & b_2 &= (1,\ -1,\ 3,\ 7). \end{aligned}$$

Решение. Так как

$$L_1 = L(a_1, a_2) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\}, \text{ и}$$
$$L_2 = L(b_1, b_2) = \{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2\},$$

то $L_1 \cap L_2$ состоит из всех таких векторов x, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2.$$

Решив уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$$

относительно неизвестных α_1, α_2, β_1, β_2, получим:

$$\alpha_1 = c, \quad \alpha_2 = -4c, \quad \beta_1 = 3c, \quad \beta_2 = -c,$$

где c — произвольное вещественное число. Итак,

$$L_1 \cap L_2 = \{ca_1 - 4ca_2\} = \{c(5, -2, -3, -4)\}.$$

Пространство $L_1 \cap L_2$ порождено одним вектором (5, —2, —3, —4). Значит, $\dim (L_1 \cap L_2) = 1$ и в качестве базиса пространства $L_1 \cap L_2$ можно взять вектор (5, —2, —3, —4).

Пространство $L_1 + L_2$ состоит из векторов вида $a + b$, где $a \in L_1$, $b \in L_2$, следовательно, произвольный вектор пространства $L_1 + L_2$ имеет вид:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 b_1 + \gamma_4 b_2,$$

т. е. $L_1 + L_2 = L(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Далее, тем же способом, что и в примере 6, получаем $\dim (L_1 + L_2) = 3$ и базисом пространства $L_1 + L_2$ может служить система векторов a_1, a_2, b_1.

Упражнения

[7], № 1311, 1317, 1318, 1320 — 1322;
[10], № 879, 880 в, с.

§ 10. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана однородная система линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

с произвольными вещественными коэффициентами. Мы знаем (§ 1, пример 4), что совокупность всех решений системы (1) образует линейное пространство, являющееся подпространством в T_n. Решим вопрос о размерности этого подпространства L.

Пусть A — матрица коэффициентов системы (1). Предположим, что ранг матрицы A равен r и минор r-го порядка, находящийся в левом верхнем углу матрицы A, отличен от нуля. Тогда система

(1) эквивалентна ее подсистеме из первых r уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Для отыскания решений системы (2), а следовательно, и системы (1) неизвестным $x_{r+1},\ldots, x_n$ системы (2) придаем произвольные значения $c_{r+1}, \ldots, c_n$ и затем (например, по формулам Крамера) находим соответствующие значения $c_1, c_2, \ldots, c_r$ для первых r неизвестных:

$$c_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & -a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & -a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2r} \\ a_{r1} & \ldots & a_{r,i-1} & -a_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n & a_{r,i+1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3)$$

где Δ — определитель системы (2) (т. е. отличный от нуля минор порядка r).

Таким образом, произвольному набору чисел $c_{r+1}, \ldots, c_n$, т. е. вектору пространства T_{n-r} мы сопоставили вектор $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ пространства L решений системы (2) или (1). А так как для любых фиксированных значений неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ система уравнений (2) имеет единственное решение относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_r$, то

$$(c_{r+1}, \ldots, c_n) \longleftrightarrow (c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n) \quad (4)$$

является взаимно однозначным соответствием между пространствами T_{n-r} и L. Это соответствие является изоморфизмом. В самом деле, из формул (3) видно, что если $c_{r+1}, \ldots, c_n$ умножить на λ, то и соответствующие значения $c_1, \ldots, c_r$ умножаются на λ (так как общий множитель элементов столбца определителя можно вынести за знак определителя). Значит, если имеет место (4), то

$$\lambda(c_{r+1}, \ldots, c_n) \to \lambda(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n).$$

Пусть, кроме (4), имеет место также

$$(d_{r+1}, \ldots, d_n) \to (d_1, \ldots, d_r, d_{r+1}, \ldots, d_n).$$

Подставив в (3) вместо $c_{r+1}, \ldots, c_n$ соответственно $c_{r+1} + d_{r+1}, \ldots$ $\ldots, c_n + d_n$ и воспользовавшись свойством определителя (позволяющим разложить его в сумму двух определителей, если в виде суммы представлен каждый элемент одного столбца), получим:

$$(c_{r+1} + d_{r+1}, \ldots, c_n + d_n) \to (c_1 + d_1, \ldots, c_r + d_r, c_{r+1} + d_{r+1}, \ldots$$
$$\ldots, c_n + d_n).$$

Таким образом, произведению вектора из T_{n-r} на число λ отвечает произведение соответствующего вектора из L на λ и сумме векторов из T_{n-r} отвечает сумма соответствующих векторов из L. Это и означает, что рассматриваемое соответствие — изоморфизм. Отсюда следует, что

$$\dim L = \dim T_{n-r} = n - r.$$

Определение 10. Любой базис пространства L, т. е. любая совокупность $n - r$ линейно независимых решений однородной линейной системы (1), называется *фундаментальной системой решений* системы (1).

Так как при изоморфизме двух пространств базис одного переходит в базис другого (§ 6), то для построения фундаментальной системы решений можно воспользоваться любым базисом пространства T_{n-r}. Если в качестве последнего взять стандартный базис

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0),\ \dots,\ e_{n-r} = (0, 0, \dots, 1),$$

то получим фундаментальную систему решений, которая называется нормальной.

Обозначим через $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-r)}$ фундаментальную систему решений системы (1). По определению базиса для любого решения x системы (1) будет иметь место равенство:

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_{n-r} x^{(n-r)}, \tag{5}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ — некоторые числа. Формула (5) содержит $n - r$ произвольных параметров и заключает в себе любое решение системы (1), поэтому можно сказать, что формула (5) дает общее решение системы (1).

Пример. Найти нормальную фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Очевидно, что ранг матрицы A коэффициентов системы меньше 5, а потому система имеет бесконечное множество решений. Произведя необходимые вычисления, получим ранг $A = 2$, фундаментальная система состоит из $n - r = 5 - 2 = 3$ решений. Общее решение системы (6) имеет вид:

$$(x_3 + x_4 + 5x_5,\ -2x_3 - 2x_4 - 6x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5).$$

Отсюда находим нормальную фундаментальную систему решений:

$$x^{(1)} = (1, -2, 1, 0, 0),\ x^{(2)} = (1, -2, 0, 1, 0),\ x^{(3)} = (5, -6, 0, 0, 1).$$

О рассмотренном выше подпространстве L решений однородной системы уравнений (1) говорят, что оно задается системой (1). Оказывается, что такой способ задания подпространств пространства T_n является универсальным, а именно:

Всякое подпространство L пространства T_n может быть задано некоторой системой линейных однородных уравнений.

В самом деле, нулевое подпространство $L = \{\theta\}$, очевидно, задается однородной системой n уравнений с n неизвестными с определителем $\Delta \neq 0$. Все пространство T_n задается, например, уравнением

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0,$$

(которому удовлетворяет любой набор из n чисел).

Пусть теперь L — подпространство в T_n и $\dim L = m$, где $0 < m < n$. Выберем какой-нибудь базис пространства L:

$$\begin{aligned} a_1 &= (\zeta_{11}, \zeta_{12}, \dots, \zeta_{1n}), \\ a_2 &= (\zeta_{21}, \zeta_{22}, \dots, \zeta_{2n}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_m &= (\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \dots, \zeta_{mn}). \end{aligned}$$

Так как система векторов $a_1, \dots, a_m$ линейно независима, то ранг матрицы коэффициентов однородной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{11}x_1 + \zeta_{12}x_2 + \dots + \zeta_{1n}x_n &= 0, \\ \zeta_{21}x_1 + \zeta_{22}x_2 + \dots + \zeta_{2n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta_{m1}x_1 + \zeta_{m2}x_2 + \dots + \zeta_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

равен m, а потому ее фундаментальная система решений состоит из $n - m$ векторов.

Если

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

— фундаментальная система решений системы уравнений (7), то имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{j1}\alpha_{11} + \zeta_{j2}\alpha_{12} + \dots + \zeta_{jn}\alpha_{1n} &= 0, \\ \zeta_{j1}\alpha_{21} + \zeta_{j2}\alpha_{22} + \dots + \zeta_{jn}\alpha_{2n} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta_{j1}\alpha_{n-m,1} + \zeta_{j2}\alpha_{n-m,2} + \dots + \zeta_{jn}\alpha_{n-m,n} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

для всех $j = 1, 2, \dots, m$. Это означает, что каждый из векторов $a_1, a_2, \dots, a_m$ является решением однородной системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n-m,1}x_1 + \alpha_{n-m,2}x_2 + \dots + \alpha_{n-m,n}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

А так как ранг системы уравнений (8) равен $n - m$, то по определению 10 имеем: совокупность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ является фундаментальной системой решений системы уравнений (8), т. е. базисом пространства L_1 всех решений системы (8). Отсюда следует, что $L_1 = L$, т. е. пространство L задается однородной системой уравнений (8).

Пример. Найти однородную систему линейных уравнений, задающую в T_4 подпространство L, порожденное векторами

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ -1), \\ a_2 &= (2,\ 1,\ 1,\ 0), \\ a_3 &= (1,\ 1,\ 1,\ 1), \\ a_4 &= (1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned}$$

Решение. 1. Находим базис подпространства L. Например, базисом является система векторов a_1, a_2, a_4. 2. Находим фундаментальную систему решений системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как ранг этой системы уравнений равен 3, то фундаментальная система ее решений состоит из одного вектора, например (1, —1, —1, 1). Следовательно, искомой системой уравнений может служить (система, состоящая из одного уравнения)

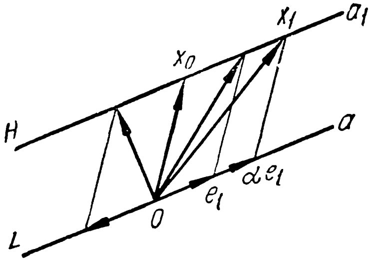
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Упражнения

[7], № 724—732, 741, 742, 1312—1313;
[10], № 453—455, 460—463.

§ 11. ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ. ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Совокупность векторов пространства V_3, исходящих из точки O и расположенных на прямой a, проходящей через точку O, образует подпространство L, состоящее из векторов вида αe_1 при произвольном вещественном α (черт. 1). Пусть вектор x_0 не принадлежит L. При фиксированном x_0 и переменном α совокупность концов векторов вида $x_0 + \alpha e_1$ дает прямую a_1, параллельную прямой a и проходящую через точку x_0. Геометрически ясно, что если x_1 и x_2 — два вектора совокупности H векторов вида $x_0 + \alpha e_1$, то их сумма $x_1 + x_2$ не принадлежит этой совокупности. Таким образом, если векторы, лежащие на прямой a, составляют подпространство, то векторы с концами на прямой a_1, не проходящей через точку O, подпространства не образуют. Вместе



Черт. 1

с тем нежелательно исключать из рассмотрения прямые типа a_1 — им и присваивают наименование линейных многообразий, полученных сдвигом подпространства L.

Определение 11. Пусть дано линейное пространство R и его подпространство L. Линейным многообразием, полученным параллельным сдвигом подпространства L на вектор x_0, называется совокупность H всех векторов $x \in R$ вида

$$x = x_0 + y,$$

где вектор y пробегает все подпространство L. При этом L называют *определяющим пространством* многообразия H, x_0 — его *вектором сдвига* и пишут:

$$H = x_0 + L.$$

Рассмотрим совместную неоднородную систему линейных уравнений над полем D:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right\} \qquad (1)$$

и соответствующую ей однородную систему:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}y_1 + a_{s2}y_2 + \ldots + a_{sn}y_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Обозначим через L пространство решений системы (2). Как мы уже знаем, L есть подпространство пространства T_n. Примем обозначения:

$$x_0 = (\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}),\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),\ x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n),$$

где x_0 есть некоторое фиксированное решение системы (1), y — произвольное решение системы (2), x — произвольное решение системы (1). Известно, что все решения системы (1) могут быть получены также прибавлением всех решений системы (2) к одному и тому же частному решению системы (1). Значит, множество H векторов x исчерпывается векторами вида $x_0 + y$, когда y пробегает все пространство L, так что $H = x_0 + L$.

Таким образом, совокупность решений произвольной совместной системы линейных уравнений (1) есть линейное многообразие, полученное параллельным сдвигом пространства решений соответствующей однородной системы. Вектором сдвига является некоторое частное решение системы (1). Говорят, что это линейное многообразие задано системой линейных уравнений (1).

Если r — ранг основной матрицы системы (1), а совокупность векторов $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n-r)}$ составляет фундаментальную систему решений системы (2), то любой вектор x линейного многообразия H можно записать в виде

$$x = x_0 + c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + \dots + c_{n-r}\, y^{(n-r)},$$

где c_1, c_2, ..., c_{n-r} — произвольные числа.

Для примера построим линейное многообразие решений системы:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 5, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Решая обычным путем эту и соответствующую ей однородную системы, находим $r = 2$, $n - r = 1$; частное решение данной системы $x_0 = (3, 0, -1)$; общее решение однородной системы $y = (-11c, -c, 7c) = -c\,(11, 1, -7)$.

Следовательно, общее решение данной системы уравнений будет иметь вид:

$$x = (3, 0, -1) + c(11, 1, -7),$$

где c — любое вещественное число. Другими словами, множество решений данной системы уравнений является многообразием, полученным параллельным сдвигом линейного подпространства L векторов вида $c\,(11, 1, -7)$ на вектор $x_0 = (3, 0, -1)$. (Сделайте к данному примеру чертеж и выполните упр. № 462 из [10].)

Из геометрических соображений видно (см. черт. 1), что многообразие H (прямая H) может быть получено сдвигом подпространства L (прямой L) и на другой вектор $x_1 \neq x_0$. В связи с этим, естественно, возникает вопрос об описании всех определяющих подпространств и векторов сдвига для заданного многообразия H. Этот вопрос решает

Теорема 10. Пусть L_1, L_2 — подпространства линейного пространства R и

$$H_1 = x_1 + L_1, \quad H_2 = x_2 + L_2. \tag{3}$$

Линейные многообразия H_1 и H_2 совпадают тогда и только тогда, когда совпадают L_1, L_2 и $x_1 - x_2 \in L_1$.

Доказательство. 1. Докажем сначала, что если $H_1 = H_2 = H$, то $L_1 = L_2$ и $x_1 - x_2 \in L_1$. Из (3) следует, что всякий вектор $x \in H$ представим в виде

$$x = x_1 + y' \quad \text{и} \quad x = x_2 + y'',$$

где $y' \in L_1$, $y' \in L_2$. Из равенства $x_1 + y' = x_2 + y''$ получаем:

$$y'' = (x_1 - x_2) + y' . \tag{4}$$

Если вектор x пробегает H, то y'' пробегает все подпространство L_2. Значит, для каждого $y'' \in L_2$ найдется $y' \in L_1$, такое, что имеет место (4). В частности, если $y'' = \theta$, то $y' = -(x_1 - x_2)$. Отсюда видно, что $x_1 - x_2 \in L_1$. Но тогда из (4) следует, что $L_2 \subseteq L_1$. Аналогичные рассуждения приводят к включению $L_1 \subseteq L_2$. Таким образом, $L_1 = L_2$ и $x_1 - x_2 \in L_1$.

2. Пусть теперь $L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L$, т. е.

$$H_1 = x_1 + L, \quad H_2 = x_2 + L, \quad x_1 - x_2 \in L.$$

Произвольный вектор $x \in H_1$ можно представить в виде $x = x_1 + y$, где $y \in L$. Отсюда

$$x = (x_1 - x_2) + (x_2 + y) = x_2 + [(x_1 - x_2) + y].$$

А так как $x_1 - x_2 \in L$ и $y \in L$, то, поскольку L — пространство, $(x_1 - x_2) + y \in L$. Следовательно, $x \in H_2$, т. е. $H_1 \subseteq H_2$. Аналогично доказывается, что $H_2 \subseteq H_1$. Итак, $H_1 = H_2$.

Первая часть теоремы 10 показывает, что линейное подпространство, параллельным сдвигом которого получается данное многообразие, определено однозначно. Это положение обосновывает корректность следующего определения.

Определение 12. *Размерностью линейного многообразия* называется размерность того линейного подпространства, параллельным сдвигом которого оно получено.

Одномерные линейные многообразия называются прямыми, двумерные — плоскостями. Линейное многообразие размерности $n - 1$ пространства R_n называют гиперплоскостью.

Упражнения

[7], № 1342—1344;
[10], № 888, 890.

Глава II

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 12. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЕЙ

Если каждому элементу x некоторого множества M поставлен в соответствие вполне определенный элемент y множества N, то говорят, что задано отображение f множества M в множество N и пишут:

$$f: M \to N \quad \text{и} \quad y = f(x) \quad \text{или} \quad y = fx.$$

Отображение множества M в себя называется преобразованием множества M. Два преобразования f_1 и f_2 множества M называются равными, если $f_1(x) = f_2(x)$ для любого $x \in M$.

В дальнейшем мы будем рассматривать преобразования линейных пространств. Наличие операций в линейном пространстве R позволяет из множества всех преобразований выделить класс наиболее важных и поддающихся изучению так называемых линейных преобразований.

Определение 13. *Линейным преобразованием* (или *линейным оператором*) линейного пространства R над полем P называется такое его преобразование φ, которое удовлетворяет условиям:

$$1^\circ.\quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2,$$
$$2^\circ.\quad \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi x$$

для любых x_1, x_2, $x \in R$ и $\lambda \in P$.

Вектор φx называется образом вектора x, вектор x — прообразом вектора φx.

Отметим два следствия из определения 13.

1. Всякое линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой вектор.

В самом деле, полагая $\lambda = 0$ в условии 2° и учитывая, что $0x = \theta$, где $x \in R$, получаем:

$$\varphi(\Theta) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = \Theta.$$

2. Условия 1° и 2° эквивалентны одному условию:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1\varphi x_1 + \lambda_2\varphi x_2. \tag{1}$$

В самом деле, полагая в (1) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$, получаем 2°. Полагая же в (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, получаем условие 1°. И обратно, из условий 1° и 2° следует:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \varphi(\lambda_1 x_1) + \varphi(\lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi x_1 + \lambda_2 \varphi x_2.$$

В случае, когда линейное пространство R n-мерно, имеет место следующее важное утверждение.

Теорема 11. Для фиксированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства R_n и произвольного набора его векторов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ существует и притом только одно линейное преобразование пространства R_n, которое переводит векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Доказательство. Для произвольного вектора x существует однозначное представление в базисе $\{e\}$:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n.$$

Поставим вектору x в соответствие вектор

$$\varphi x = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots + \zeta_n b_n. \tag{2}$$

Вектор φx, построенный по формуле (2), будет вполне определенным вектором пространства R_n, так что соответствие φ будет преобразованием пространства R_n. Если в качестве вектора x взять $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n$, то в силу (2) будет $\varphi e_1 = b_1$. Аналогично $\varphi e_2 = b_2, \ldots, \varphi e_n = b_n$. Таким образом, преобразование φ переводит векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$, как того и требует теорема.

Покажем теперь, что преобразование φ линейно. Для вектора

$$\lambda x = \lambda\zeta_1 e_1 + \lambda\zeta_2 e_2 + \ldots + \lambda\zeta_n e_n$$

по формуле (2) находим:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\zeta_1 b_1 + \lambda\zeta_2 b_2 + \ldots + \lambda\zeta_n b_n = \lambda(\zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots + \zeta_n b_n) = \lambda\varphi x,$$

и условие 2° линейности выполнено.

Пусть y — второй вектор из R_n:

$$y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Тогда по формуле (2) для вектора

$$x + y = (\zeta_1 + \eta_1)e_1 + (\zeta_2 + \eta_2)e_2 + \ldots + (\zeta_n + \eta_n)e_n$$

получаем:

$$\varphi(x + y) = (\zeta_1 + \eta_1)b_1 + (\zeta_2 + \eta_2)b_2 + \ldots + (\zeta_n + \eta_n)b_n = (\zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots + \zeta_n b_n) + (\eta_1 b_1 + \eta_2 b_2 + \ldots + \eta_n b_n) = \varphi x + \varphi y,$$

и условие 1° линейности выполнено.

Таким образом, искомое линейное преобразование построено. Осталось показать единственность такого преобразования. Пусть

ψ — второе линейное преобразование, такое, что $\psi e_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как преобразование ψ линейно, то для любого вектора $x = \zeta_1 e_1 + \ldots + \zeta_n e_n$ имеем:

$$\psi(x) = \psi(\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n) = \zeta_1 \psi e_1 + \zeta_2 \psi e_2 + \ldots + \zeta_n \psi e_n = \\ = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \ldots + \zeta_n b_n = \varphi x, \text{ т. е. } \varphi = \psi.$$

Теорема 11 означает, что линейное преобразование φ пространства R_n вполне определяется заданием лишь образов $\varphi e_1, \ldots, \varphi e_n$ векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ какого-либо базиса. Этот факт дает возможность указать удобное для практического обращения с линейными преобразованиями описание их с помощью матриц.

Пусть R_n — линейное пространство с фиксированным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Векторы $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ в базисе $\{e\}$ задаются своими координатами:

$$\left.\begin{aligned} \varphi e_1 &= a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \ldots + a_{n1} e_n, \\ \varphi e_2 &= a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \ldots + a_{n2} e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi e_n &= a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \ldots + a_{nn} e_n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного преобразования φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Таким образом, при фиксированном базисе всякому линейному преобразованию φ пространства R_n соответствует единственная матрица A с элементами из основного поля P.

Обратно, пусть дана квадратная матрица A порядка n с элементами из поля P. Пользуясь матрицей A, при фиксированном базисе $\{e\}$ по формулам (3) найдем векторы $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$. Однако по теореме 11 выбором этих векторов вполне определяется линейное преобразование φ пространства R_n. Очевидно, что матрицей этого преобразования в базисе $\{e\}$ является матрица A.

В итоге при фиксированном базисе пространства R_n имеем взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями в R_n и квадратными матрицами порядка n с элементами из основного поля P. Этот факт и позволяет говорить, что линейное преобразование задается матрицей A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Заметим, что полученное взаимно однозначное соответствие между множествами линейных преобразований в R_n и матриц существенно зависит от базиса.

Выясним, как выражаются координаты вектора-образа φx через координаты данного вектора x, если преобразование φ задано матрицей A в базисе $\{e\}$.

Если

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n -$$

какой-либо вектор из R_n, то по свойству 2° и формулам (3)

$$\begin{aligned} y = \varphi x &= \zeta_1 \varphi e_1 + \zeta_2 \varphi e_2 + \dots + \zeta_n \varphi e_n = \\ &= \zeta_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + \\ &+ \zeta_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n) + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \zeta_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) = \\ &= (a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \dots + a_{1n}\zeta_n) e_1 + \\ &+ (a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \dots + a_{2n}\zeta_n) e_2 + \\ &+ \dots + (a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \dots + a_{nn}\zeta_n) e_n \end{aligned}$$

Обозначив через $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ координаты вектора $y = \varphi x$ в базисе $\{e\}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \dots + a_{1n}\zeta_n, \\ \eta_2 &= a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \dots + a_{2n}\zeta_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n &= a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \dots + a_{nn}\zeta_n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Вводя матричные обозначения

$$X = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

для столбцов координат данного вектора x и его образа φx, получаем матричную запись системы равенств (4):

$$Y = AX. \tag{5}$$

Таким образом, при фиксированном базисе столбец координат преобразованного вектора получается умножением матрицы A линейного преобразования φ на столбец координат данного вектора.

Примеры и упражнения

1. Пусть в некотором базисе e_1, e_2, e_3 пространства T_3 линейное преобразование задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно (5) векторы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

преобразуются в векторы:

$$Y_1 = AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, Y_2 = AX_2 = \begin{pmatrix} -23 \\ -45 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть в некотором базисе пространства T_3 заданы системы векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, 0, 1), & b_1 &= (2, 3, 5), \\ a_2 &= (0, 1, 1), & b_2 &= (1, 0, 0), \\ a_3 &= (1, 1, 1), & b_3 &= (0, 1, -1). \end{aligned}$$

Найти в базисе a_1, a_2, a_3 матрицу линейного преобразования φ, переводящего векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3.

Легко видеть, что векторы a_1, a_2, a_3 составляют базис T_3. По теореме 11 искомое преобразование φ существует и единственно. Из формул (4) замечаем, что для отыскания матрицы A преобразования φ в базисе a_1, a_2, a_3 нужно найти линейные выражения векторов-образов b_1, b_2, b_3 через векторы базиса a_1, a_2, a_3. Производя необходимые вычисления, находим, что

$$\begin{aligned} \varphi a_1 &= b_1 = 2a_1 + a_2 + 2a_3, \\ \varphi a_2 &= b_2 = \quad\; - a_2 + a_3, \\ \varphi a_3 &= b_3 = -2a_1 + a_2, \end{aligned}$$

откуда и получаем искомую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить ту же задачу для векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 3, 5), & b_1 &= (1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, 1, 2), & b_2 &= (1, 1, -1), \\ a_3 &= (1, 0, 0), & b_3 &= (2, 1, 2). \end{aligned}$$

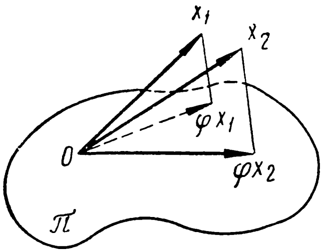
Ответ (в базисе a_1, a_2, a_3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

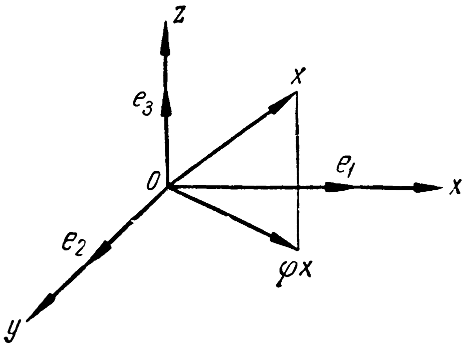
1. Исходное пространство — пространство векторов, исходящих из фиксированной точки O. Преобразование φ в нем — ортогональное проектирование векторов на некоторую плоскость π, проходящую через точку O (черт. 2).

Как известно, проекция суммы векторов равна сумме их проекций, следовательно, выполняется условие 1° определения 13:

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2.$$



Черт. 2



Черт. 3

Далее, если вектор x умножить на вещественное число λ, то его проекция также умножится на λ, т. е. $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi x$, — условие 2° тоже выполняется. Операция ортогонального проектирования будет линейным преобразованием φ пространства V_3.

Найдем матрицу преобразования φ, взяв за базис единичные попарно перпендикулярные векторы e_1, e_2, e_3 по осям координат OX, OY, OZ.

Тогда имеем (см. черт. 3):

$$\begin{aligned}\varphi e_1 &= e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,\\ \varphi e_2 &= e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,\\ \varphi e_3 &= \Theta = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.\end{aligned}$$

Таким образом, матрицей преобразования является

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Возьмем за базис векторы $e_1' = e_1$, $e_2' = e_2$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$.

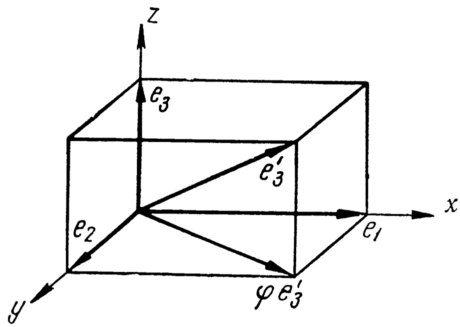
Тогда (см. черт. 4)

$$\begin{aligned}
\varphi e_1' &= e_1' &&= 1\cdot e_1' + 0\cdot e_2' + 0\cdot e_3',\\
\varphi e_2' &= e_2' &&= 0\cdot e_1' + 1\cdot e_2' + 0\cdot e_3',\\
\varphi e_3' &= e_1' + e_2' &&= 1\cdot e_1' + 1\cdot e_2' + 0\cdot e_3'.
\end{aligned}$$

Матрицей того преобразования в новом базисе является

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что изменение базиса вызвало изменение матрицы преобразования.



Черт. 4

2. Исходное пространство R есть n-мерное пространство многочленов $f(t)$ степени $\leqslant n-1$ с вещественными коэффициентами. Оператор φ в пространстве R — дифференцирование:

$$\varphi f(t) = f'(t),$$

где $f'(t)$ — производная многочлена $f(t)$.

Преобразование φ линейно, так как

$$[\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)]' = \lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t).$$

Найдем матрицу преобразования φ в базисе:

$$e_1 = 1,\quad e_2 = t,\quad e_3 = \frac{t^2}{2!},\quad e_4 = \frac{t^3}{3!}, \ldots,\ e_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
\varphi e_1 &= e_1' = 0 = && 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n,\\
\varphi e_2 &= e_2' = 1 = e_1 = && 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n,\\
\varphi e_3 &= e_3' = t = e_2 = && 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi e_n &= e_n' = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} = e_{n-1} = && 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 1\cdot e_{n-1} + 0\cdot e_n.
\end{aligned}$$

Значит, матрицей преобразования φ в указанном базисе будет:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ . & . & . & \ldots & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Исходное пространство $C(a, b)$. Функции $f(t) \in C(a, b)$ поставим в соответствие функцию

$$\varphi f(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau.$$

На основании теоремы о существовании определенного интеграла от непрерывной функции и теоремы о непрерывности функции

$$h(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau$$

(определенного интеграла от непрерывной функции при переменном верхнем пределе) получаем, что $\varphi f(t) \in C(a, b)$. Линейность этого преобразования следует из свойств определенного интеграла.

Заметим, что оператор дифференцирования не будет линейным преобразованием в пространстве $C(a, b)$ (почему?).

4. Преобразование φ, переводящее вектор $x = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ в вектор $\varphi(x) = (\zeta_1 + 4, \zeta_2, \zeta_3)$, не является линейным, поскольку

$$\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda\zeta_1, \lambda\zeta_2, \lambda\zeta_3) = (\lambda\zeta_1 + 4, \lambda\zeta_2, \lambda\zeta_3) \neq \lambda\varphi(x).$$

Упражнения

[7], № 1434—1438, 1441—1444, 1449—1452.

§ 14. СВЯЗЬ МЕЖДУ МАТРИЦАМИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСАХ

В § 12 было показано, что при фиксированном базисе всякое линейное преобразование пространства R_n задается матрицей. Интересно, как изменяется матрица линейного преобразования при переходе от одного базиса к другому. На этот вопрос отвечает

Теорема 12. Если A, A_1 — матрицы линейного преобразования φ пространства R_n соответственно в базисах $\{e\}$, $\{e'\}$ и T— матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, то

$$A_1 = T^{-1}AT.$$

Доказательство. Рассмотрим векторы x и $y = \varphi x$. Их координатные столбцы X и Y в базисе $\{e\}$ связаны равенством

$$Y = AX.$$

Аналогично для их координатных столбцов X_1, Y_1 в базисе $\{e'\}$ имеем:

$$Y_1 = A_1 X_1. \tag{1}$$

С другой стороны, как следует из § 7,

$$Y = TY_1, \quad X = TX_1.$$

Отсюда

$$Y_1 = T^{-1}Y = T^{-1}(AX) = T^{-1}(A(TX_1)) = (T^{-1}AT)\,X_1,$$

т. е.

$$Y_1 = (T^{-1}AT)\,X_1. \tag{2}$$

Так как равенства (1) и (2) верны для любых векторов X_1, то матрицы A_1 и $T^{-1}AT$ задают одно и то же линейное преобразование в базисе $\{e'\}$. Следовательно, $A_1 = T^{-1}AT$.

Определение 14. Матрица A_1 называется *подобной* матрице A, если существует такая невырожденная матрица T, что выполняется равенство:

$$A_1 = T^{-1}AT.$$

В этом случае говорят также, что матрица A_1 получается трансформированием матрицы A с помощью матрицы T.

Лемма. Если A и B — квадратные матрицы порядка n, то ранг $AB \leqslant$ ранг A и ранг $AB \leqslant$ ранг B.

Доказательство. Непосредственно перемножая матрицы A и B, замечаем, что столбцы матрицы AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Отсюда следует, что подпространство L_1 пространства T_n, натянутое на векторы-столбцы матрицы AB, содержится в подпространстве L_2, натянутом на векторы-столбцы матрицы A. Следовательно, $\dim L_1 \leqslant \dim L_2$, т. е. ранг $AB \leqslant$ ранг A. Аналогично, замечая, что строки матрицы AB являются линейными комбинациями строк матрицы B, получаем ранг $AB \leqslant$ ранг B.

Следствие 1. Если A и B — квадратные матрицы порядка n и матрица B невырожденная, то

$$\text{ранг}\, AB = \text{ранг}\, BA = \text{ранг}\, A$$

(т. е. при умножении матрицы A справа или слева на невырожденную матрицу B ранг матрицы не изменяется).

В самом деле, по лемме ранг $AB \leqslant$ ранг A. По той же причине ранг $(AB)\,B^{-1} \leqslant$ ранг AB, т. е. ранг $A \leqslant$ ранг AB. Отсюда ранг $AB =$ ранг A. Аналогично ранг $BA =$ ранг A.

Следствие 2. Ранг матрицы линейного преобразования φ пространства R_n не изменяется при переходе от одного базиса к другому.

Справедливость следствия 2 вытекает непосредственно из теоремы 12 и следствия 1.

Пример. Линейное преобразование φ пространства T_3 имеет в базисе

$$e_1 = (8, -6, 7), \quad e_2 = (-16, 7, -13), \quad e_3 = (9, -3, 7)$$

матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A_1 того же преобразования в базисе:

$$e_1' = (1, -2, 1), \quad e_2' = (3, -1, 2), \quad e_3' = (2, 1, 2).$$

Решение. Сначала находим матрицу перехода T от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$. Получаем:

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2 + e_3, \\ e_2' &= e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ e_3' &= -3e_1 - 5e_2 - 6e_3. \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица

$$A_1 = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис, φ — линейное преобразование пространства R_n. Доказать, что система векторов $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots$ $\ldots, \varphi e_n$ является базисом пространства R_n тогда и только тогда, когда матрица преобразования φ невырожденна.
2. [7], № 1445, 1446, 1453.

§ 15. ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ И МАТРИЦАМИ. КОЛЬЦО ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И КОЛЬЦО МАТРИЦ

В приложениях приходится иметь дело с несколькими преобразованиями, которые используются в различных комбинациях друг с другом. Чаще всего используют либо последовательное применение двух преобразований, либо так называемую сумму преобразований.

Пусть даны линейные преобразования φ и ψ, действующие в линейном пространстве R_n. Напомним, что два преобразования φ_1 и φ_2 считаются равными, если для любого вектора $x \in R_n$ будет $\varphi_1 x = \varphi_2 x$.

Определение 15. *Суммой* линейных преобразований φ и ψ называется преобразование $\varphi + \psi$, которое ставит в соответствие вектору x вектор $\varphi x + \psi x$, т. е.

$$(\varphi + \psi) x = \varphi x + \psi x.$$

Так как φx и ψx суть вполне определенные векторы (образы вектора x в преобразованиях φ и ψ), то и $\varphi x + \psi x$ будет вполне определенным вектором. Значит, $\varphi + \psi$ является преобразованием пространства R_n. Покажем, что преобразование $\varphi + \psi$ будет линейным. По определению 15 и по линейности преобразований φ и ψ имеем, что

$$(\varphi + \psi)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \psi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) =$$
$$= \lambda_1 \varphi x_1 + \lambda_2 \varphi x_2 + \lambda_1 \psi x_1 + \lambda_2 \psi x_2 = \lambda_1(\varphi x_1 + \psi x_1) +$$
$$+ \lambda_2(\varphi x_2 + \psi x_2) = \lambda_1(\varphi + \psi) x_1 + \lambda_2(\varphi + \psi) x_2.$$

Определение 16. *Произведением линейного преобразования φ на число $\lambda \in P$* называется преобразование $\lambda\varphi$, определяемое равенством

$$(\lambda\varphi) x = \lambda(\varphi x).$$

Преобразование $\lambda\varphi$ линейно, так как

$$(\lambda\varphi)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda[\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] = \lambda[\lambda_1(\varphi x_1) + \lambda_2(\varphi x_2)] =$$
$$= (\lambda\lambda_1)\varphi x_1 + (\lambda\lambda_2)\varphi x_2 = \lambda_1[\lambda(\varphi x_1)] + \lambda_2[\lambda(\varphi x_2)] =$$
$$= \lambda_1[(\lambda\varphi)x_1] + \lambda_2[(\lambda\varphi)x_2].$$

Определение 17. *Произведением линейных преобразований* φ и ψ называется преобразование (обозначаемое через $\varphi\psi$), состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования ψ, а затем преобразования φ.

По этому определению

$$(\varphi\psi) x = \varphi(\psi x),$$

т. е. сначала на вектор x действуют преобразованием ψ, а затем на полученный вектор ψx действуют преобразованием φ.

Преобразование $\varphi\psi$ линейно, так как

$$(\varphi\psi)[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] = \varphi[\psi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] = \varphi[\lambda_1(\psi x_1) + \lambda_2(\psi x_2)] =$$
$$= \lambda_1 \varphi(\psi x_1) + \lambda_2 \varphi(\psi x_2) = \lambda_1(\varphi\psi) x_1 + \lambda_2(\varphi\psi) x_2.$$

Вообще говоря, $\varphi\psi \neq \psi\varphi$.

Выясним, как описываются операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Иначе, пусть преобразования φ и ψ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ заданы матрицами A и B. Вопрос состоит в том, чтобы узнать, каковы будут матрицы преобразований $\varphi + \psi$, $\varphi\psi$, $\lambda\varphi$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \varphi e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, & \psi e_1 &= b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + \ldots + b_{n1}e_n,\\ \varphi e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, & \psi e_2 &= b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + \ldots + b_{n2}e_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi e_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. & \psi e_n &= b_{1n}e_1 + b_{2n}e_2 + \ldots + b_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Чтобы найти матрицу преобразования $\varphi + \psi$, надо найти разложения векторов $(\varphi + \psi)e_1, \ldots, (\varphi + \psi)e_n$ в базисе $\{e\}$. По определению 15 имеем:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)e_1 &= \varphi e_1 + \psi e_1 = (a_{11} + b_{11})e_1 + (a_{21} + b_{21})e_2 + \ldots + (a_{n1} + b_{n1})e_n,\\ (\varphi + \psi)e_2 &= \varphi e_2 + \psi e_2 = (a_{12} + b_{12})e_1 + (a_{22} + b_{22})e_2 + \ldots + (a_{n2} + b_{n2})e_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\varphi + \psi)e_n &= \varphi e_n + \psi e_n = (a_{1n} + b_{1n})e_1 + (a_{2n} + b_{2n})e_2 + \ldots + (a_{nn} + b_{nn})e_n. \end{aligned}$$

Как видим, матрицей преобразования $\varphi + \psi$ в том же базисе $\{e\}$ является матрица $A + B$, т. е. сумме преобразований соответствует сумма их матриц.

Для получения матрицы преобразования $\varphi\psi$ находим разложения векторов $(\varphi\psi)e_1, (\varphi\psi)e_2, \ldots, (\varphi\psi)e_n$ в базисе $\{e\}$:

$$\begin{gathered} (\varphi\psi)e_1 = \varphi(\psi e_1) = \varphi(b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + \ldots + b_{n1}e_n) = b_{11}\varphi e_1 + b_{21}\varphi e_2 +\\ + \ldots + b_{n1}\varphi e_n = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1})e_1 + (a_{21}b_{11} +\\ + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1})e_2 + \ldots + (a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nn}b_{n1})e_n,\\ (\varphi\psi)e_2 = \varphi(\psi e_2) = \varphi(b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + \ldots + b_{n2}e_n) = b_{12}\varphi e_1 + b_{22}\varphi e_2 +\\ + \ldots + b_{n2}\varphi e_n = (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2})e_1 + (a_{21}b_{12} +\\ + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2})e_2 + \ldots + (a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \ldots + a_{nn}b_{n2})e_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ (\varphi\psi)e_n = (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \ldots + a_{1n}b_{nn})e_1 + (a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \ldots +\\ + a_{2n}b_{nn})e_2 + \ldots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn})e_n. \end{gathered}$$

Отсюда замечаем, что элемент c_{ij} матрицы преобразования $\varphi\psi$ построен по закону:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Значит, матрица преобразования $\varphi\psi$ равна произведению матрицы A на матрицу B, т. е. произведению преобразований соответствует произведение их матриц.

Таким образом, множество линейных преобразований пространства R_n над полем P относительно операций сложения и умножения изоморфно множеству квадратных матриц порядка n с элементами из поля P. А так как указанное множество матриц образует кольцо, то это же самое можно сказать и о множестве линейных преобразований. Следовательно, доказана

Теорема 13. Множество линейных преобразований пространства R_n над полем P образует кольцо, изоморфное кольцу квадратных матриц порядка n с элементами из поля P.

Отсюда, в частности, следует, что сложение и умножение линейных преобразований пространства R_n обладают свойствами:

$$\begin{aligned}
&1^\circ.\ \varphi + \psi = \psi + \varphi.\\
&2^\circ.\ (\varphi + \psi) + \omega = \varphi + (\psi + \omega).\\
&3^\circ.\ (\varphi\psi)\,\omega = \varphi\,(\psi\omega).\\
&4^\circ.\ (\varphi + \psi)\,\omega = \varphi\omega + \psi\omega.\\
&\quad\ \ \omega\,(\varphi + \psi) = \omega\varphi + \omega\psi.
\end{aligned}$$

Таким образом, установленный изоморфизм позволил нам перенести свойства матриц на линейные преобразования. Однако на основании того же изоморфизма можно свойства линейных преобразований переносить на матрицы. При этом в ряде случаев мы получаем значительные упрощения в доказательствах. Например, свойство 3° для матриц доказывается громоздко: нужно найти и сравнить элементы, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца матриц $(AB)C$ и $A(BC)$. В то же время свойство 3° для линейных преобразований доказывается весьма просто. В самом деле, по определению 16

$$[(\varphi\psi)\,\omega]\,x = (\varphi\psi)\,(\omega x) = \varphi\,[\psi\,(\omega x)].$$

С другой стороны,

$$[\varphi\,(\psi\omega)]\,x = \varphi[(\psi\omega)\,x] = \varphi\,[\psi\,(\omega x)].$$

Отсюда и следует 3°. Аналогичное замечание можно сделать относительно свойства 4°. (Докажите его на языке линейных преобразований.)

Во множестве линейных преобразований пространства R_n можно выделить нуль-преобразование 0, которое каждому вектору $x \in R_n$ ставит в соответствие нуль-вектор θ этого пространства. Матрицей этого преобразования в любом базисе будет нулевая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через ε так называемое тождественное линейное преобразование, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in R_n$ этот же вектор x: $\varepsilon x = x$ для любого $x \in R_n$. Матрицей этого преобразования в любом базисе будет единичная матрица E.

Для нулевого и единичного преобразований 0 и ε и для любого преобразования φ имеют место следующие очевидные равенства:

$$\varphi + 0 = \varphi, \quad \varepsilon\varphi = \varphi\varepsilon = \varphi.$$

Примеры. 1. Пусть линейное преобразование φ пространства R_n переводит линейно независимые векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ в векторы $b_1, b_2, \dots, b_n$ соответственно. Доказать, что матрица A_e этого преобразования в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ равна $B \cdot A^{-1}$, где столбцы матриц A и B состоят из координат векторов $a_1, \dots, a_n$ и соответственно $b_1, \dots, b_n$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Решение. Обозначим (для $i = 1, 2, \dots, n$):

X_i — столбец координат вектора a_i в базисе $\{e\}$,

Y_i — столбец координат вектора b_i в базисе $\{e\}$.

Так как по условию $b_i = \varphi a_i$, то по формуле (5) § 12 получаем:

$$Y_1 = A_e X_1, \ Y_2 = A_e X_2, \ \dots, \ Y_n = A_e X_n.$$

Отсюда следует, что матрица, составленная из столбцов $Y_1, Y_2, \dots$ $\dots, Y_n$, равна произведению A_e на матрицу, составленную из столбцов $X_1, X_2, \dots, X_n$, т. е. $B = A_e A$. А так как система векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ по условию линейно независима, то по следствию 2 из теоремы 4 матрица A невырожденная и имеет обратную. Следовательно,

$$A_e = B \cdot A^{-1}.$$

2. Преобразование φ в базисе $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (1, 1)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Преобразование ψ в базисе $b_1 = (5, 2)$, $b_2 = (1, 0)$ имеет матрицу

$$B_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & 3{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2.

Найдем сначала матрицу A_b преобразования φ в базисе b_1, b_2. По теореме 12 (§ 14) имеем:

$$A_b = T^{-1} A_a T,$$

где T — матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2. А так как

$$b_1 = 3a_1 - a_2,$$
$$b_2 = a_1 - a_2,$$

то

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & -1{,}5 \\ -6{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}, \qquad A_b + B_b = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

[7], № 1457, 1458.

§ 16. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. ВЫРОЖДЕННЫЕ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. РАНГ И ЯДРО ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Среди всех линейных преобразований пространства R_n особое место занимают взаимно однозначные преобразования (при которых каждый вектор пространства является образом ровно одного вектора).

Теорема 14. Линейное преобразование φ пространства R_n взаимно однозначно тогда и только тогда, когда его матрица в каком-нибудь базисе невырожденна.

Доказательство. Пусть в некотором базисе преобразование φ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда координаты вектора $\varphi x = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ следующим образом выражаются через координаты вектора $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \dots + a_{1n}\zeta_n, \\ \eta_2 &= a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \dots + a_{2n}\zeta_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n &= a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \dots + a_{nn}\zeta_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Взаимная однозначность преобразования φ означает, что для любого набора чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ найдется ровно один набор чисел $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, удовлетворяющих системе уравнений (1). Но система уравнений (1) имеет единственное решение относительно неизвестных $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля, т. е. матрица A невырожденна. Этим теорема доказана.

Определение 18. Линейное преобразование φ пространства R_n называется *обратимым* (или *невырожденным*), если существует такое линейное преобразование ψ, что

$$\psi\varphi = \varphi\psi = \varepsilon, \tag{2}$$

где ε — тождественное преобразование.

Очевидно, что если какое-либо преобразование ψ удовлетворяет равенствам (2), то оно единственно, линейно и невырожденно. Это преобразование называется обратным для φ и обозначается через φ^{-1}, так что

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \varepsilon. \tag{3}$$

Ясно также, что φ обратимо тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно. При этом, поскольку кольцо линейных преобразований изоморфно кольцу матриц, то равенствам (3) будут соответствовать матричные равенства

$$BA = AB = E,$$

где B — матрица линейного преобразования φ^{-1} в том же базисе, что и A для φ. Отсюда видно, что $B = A^{-1}$.

Таким образом, доказана

Теорема 15. *Линейное преобразование φ пространства R_n обратимо тогда и только тогда, когда оно в каком-либо базисе задается невырожденной матрицей A. При этом обратное преобразование (когда оно существует) определяется матрицей A^{-1}.*

Обозначим буквой S множество всех невырожденных линейных преобразований пространства R_n над полем P.

Легко видеть, что:

1) если $\varphi_1, \varphi_2 \in S$, то $\varphi_1\varphi_2 \in S$ (поскольку произведению преобразований отвечает произведение соответствующих матриц);

2) тождественное преобразование $\varepsilon \in S$;

3) если $\varphi \in S$, то $\varphi^{-1} \in S$.

Отсюда, учитывая ассоциативность умножения преобразований, получаем: множество всех невырожденных линейных преобразований пространства R_n образует группу относительно операции умножения.

Определение 19. Пусть φ — линейное преобразование пространства R_n. Совокупность векторов $y = \varphi x$ для всех $x \in R_n$ называется *областью значений* преобразования φ и обозначается φR_n.

φR_n есть подпространство линейного пространства R_n. В самом деле, если $y_1 = \varphi x_1$ и $y_2 = \varphi x_2$, то в силу линейности φ имеем: $y_1 + y_2 = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \varphi(x_1 + x_2)$ и для любого $\lambda \in P$ $\lambda y_1 = \lambda\varphi x_1 = \varphi(\lambda x_1)$. Теперь наше утверждение следует из теоремы 7.

Ранг матрицы линейного преобразования пространства R_n не зависит от выбора базиса в нем, а зависит только от самого преобразования. Этот факт делает обоснованным следующее

Определение 20. *Рангом линейного преобразования* φ пространства R_n называется ранг его матрицы.

Теорема 16. Размерность подпространства φR_n (области значений линейного преобразования φ) равна рангу преобразования φ, т. е.

$$\dim\varphi R_n = \text{ранг } \varphi.$$

Доказательство. Пусть $\{e\}$ — базис пространства R_n. Для любого $x \in R_n$ имеется представление $x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n$, где $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ — координаты вектора x. Тогда

$$\varphi x = \varphi(\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n) = \zeta_1\varphi e_1 + \zeta_2\varphi e_2 + \dots + \zeta_n\varphi e_n.$$

Так как $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ могут принимать любые значения, то область значений преобразования φ есть линейная оболочка системы векторов $\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n$, т. е.

$$\varphi R_n = L(\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n).$$

Следовательно, размерность пространства φR_n равна максимальному числу линейно независимых векторов системы $\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n$ (§ 9). Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица преобразования φ, то

$$\left.\begin{array}{l} \varphi e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ \varphi e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi e_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{array}\right\}$$

Отсюда по следствию 1 из теоремы 4 получаем, что максимальное число линейно независимых векторов системы $\varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_n$ равно рангу системы столбцов матрицы A, т. е. рангу матрицы A. Теорема доказана.

Из теорем 15—16 заключаем следующее. Для невырожденных преобразований φ ранг $\varphi = n$, область значений φR_n имеет размерность n и совпадает с пространством R_n.

Если преобразование вырожденное, то ранг $\varphi < n$, в этом случае преобразование φ переводит пространство R_n в его правильную часть φR_n размерности $\leqslant n - 1$. Наряду с областью значений важной характеристикой линейного преобразования является так называемое ядро линейного преобразования.

Определение 21. *Ядром линейного преобразования* φ пространства R_n называется множество всех векторов, отображаемых преобразованием φ в нулевой вектор.

Ядро преобразования φ обозначается через Ker φ. Легко видеть, что оно является подпространством пространства R_n. (Докажите.)

Теорема 17. Размерность ядра преобразования φ пространства R_n равна разности $n - r$, где $r =$ ранг φ.

Доказательство. Пусть φ — линейное преобразование пространства R_n, заданное в некотором базисе матрицей A. Если $x \in R_n$ и

$$X = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

— координатный столбец вектора x, то $x \in \operatorname{Ker} \varphi$ тогда и только тогда, когда

$$AX = \Theta,$$

или

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n = 0, \\ a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Следовательно, размерность ядра совпадает с размерностью пространства решений системы (4) и потому согласно § 10 равна $n - r$.

Из теорем 15 и 17 получаем

Следствие. Для того чтобы линейное преобразование пространства R_n было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы ядро этого преобразования было нулевым.

Пример. Найти ядро и область значений линейного преобразования φ, заданного в некотором базисе пространства T_4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Решение. Находим, что ранг $A = 2$. Значит, размерность области значений φT_4 равна 2, размерность ядра $\operatorname{Ker} \varphi$ равна $4 - 2 = 2$.

Пространство φT_4 натянуто на векторы φe_1, φe_2, φe_3, φe_4, координатные столбцы которых являются столбцами матрицы A. Базис пространства φT_4 можно составить, например, из векторов φe_1, φe_2. Таким образом,

$$\varphi T_4 = L(\varphi e_1, \varphi e_2) = \{\alpha\varphi e_1 + \beta\varphi e_2\} = \{\alpha + 3\beta,\ 2\alpha + \beta,\ 4\alpha + 7\beta,\ 3\alpha - \beta\},$$

где α и β — произвольные вещественные числа.

Для отыскания ядра решаем однородную систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_1 + 3\zeta_2 + 5\zeta_3 + \zeta_4 = 0, \\ 2\zeta_1 + \zeta_2 + 3\zeta_3 + \zeta_4 = 0. \end{array}\right\}$$

Общее решение этой системы: $(-4\alpha - 2\beta,\ -7\alpha - \beta,\ 5\alpha,\ 5\beta)$. Базис ядра составляют, например, векторы $(-4, -7, 1, 0)$ и $(-2, -1, 0, 1)$.

Упражнение

Те же вопросы решить для преобразований, заданных матрицами

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 17. ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ И ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Определение 22. Пусть φ — линейное преобразование пространства R. Подпространство $L \subset R$ называется *инвариантным* относительно преобразования φ, если из $x \in L$ следует $\varphi x \in L$.

В случае инвариантности подпространства L можно говорить о линейном преобразовании φ_1 с областью определения L. Преобразование φ_1 называется *индуцированным* преобразованием. Если $x \in L$, то $\varphi x = \varphi_1 x$; если же $x \overline{\in} L$, то φx существует, а $\varphi_1 x$ не определено. Различие преобразований φ и φ_1 состоит лишь в различии между их областями применения.

Примеры. 1. Нуль-подпространство, состоящее из одного вектора θ, и само пространство R инвариантны относительно любого преобразования в R.

2. В пространстве V_3 выполняется некоторый поворот φ вокруг оси l, проходящей через точку O. Подпространствами, инвариантными относительно φ, будут:

а) совокупность векторов, лежащих на оси l;

б) совокупность векторов, лежащих в плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной оси l.

3. R_n — пространство многочленов $f(t)$ степени $\leqslant n-1$. Преобразование φ, переводящее любой многочлен в его производную, является линейным. Пусть k — натуральное число, причем $k \leqslant n-1$. Тогда подпространство всех многочленов степени $\leqslant k$ будет инвариантным относительно преобразования φ.

4. Линейное преобразование φ, действующее в пространстве T_3, задано в некотором базисе $\{e\}$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 0, -1)$ и $L = L(a_1, a_2)$. Покажем, что подпространство $L \subset T_3$ инвариантно относительно φ, т. е. что из $x \in L$ следует $\varphi x \in L$. Векторы подпространства L имеют вид:

$x = \alpha a_1 + \beta a_2 = (\alpha + \beta, \alpha, -\beta)$, где α и β — произвольные вещественные числа. Следовательно,

$$\varphi x = AX = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} \in L.$$

Проверьте, что подпространство $L_1 = L(a_3)$, где $a_3 = (2, 2, -1)$, также инвариантно относительно φ. Будет ли инвариантным относительно φ подпространство $L_2 = L(a)$, где $a = (2, 1, 3)$?

5. Пусть подпространство L размерности $k < n$ инвариантно относительно преобразования φ пространства R_n, и пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ составляют базис пространства L. По теореме 8 в R_n можно подобрать векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ так, что система векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ будет базисом пространства R_n. В силу инвариантности L для векторов e_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ будет $\varphi e_i \in L$. Отсюда имеем:

$$\varphi e_1 = a_{11}e_1 + \dots + a_{k1}e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi e_k = a_{1k}e_1 + \dots + a_{kk}e_k + 0 \cdot e_{k+1} + \dots + 0 \cdot e_n,$$

$$\varphi e_{k+1} = a_{1,k+1}e_1 + \dots + a_{k,k+1}e_k + a_{k+1,k+1}e_{k+1} + \dots + a_{n,k+1}e_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi e_n = a_{1n}e_1 + \dots + a_{k,n}e_k + a_{k+1,n}e_{k+1} + \dots + a_{nn}e_n.$$

Таким образом, в базисе $e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ матрица преобразования φ имеет специфический вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

§ 18. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть φ — линейное преобразование пространства R_n над полем P. Простейшей, но весьма важной будет ситуация, при которой вектор x переходит в коллинеарный вектор λx, так что $\varphi x = \lambda x$, где λ — некоторое число из поля P. Понятно, что для данного линейного преобразования φ соотношение $\varphi x = \lambda x$ может выполняться лишь для некоторых векторов x — такие векторы и называются собственными векторами линейного преобразования φ. Условие $\varphi x = \lambda x$ выполняется тривиальным образом для нулевого вектора $x = \theta$, так как всегда $\varphi\theta = \theta = \lambda\theta$. Но этот случай не представляет интереса. Когда говорят о собственных векторах преобразования, то имеют в виду векторы, отличные от нулевого.

О п р е д е л е н и е 23. *Собственным вектором* линейного преобразования φ пространства R_n над полем P называется ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию

$$\varphi x = \lambda x \tag{1}$$

для некоторого $\lambda \in P$. Число λ при этом называется *собственным значением преобразования* φ, соответствующим вектору x.

П р и м е р. Пусть линейное преобразование φ пространства T_3 в некотором базисе задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $x = (2, 1, 1)$ является собственным в этом преобразовании, так как

$$\varphi x = AX = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее собственное значение равно 2. В то же время, например, вектор (3, 2, 7) не является собственным в данном преобразовании, что легко проверить, найдя его образ. Оставляя пока в стороне вопрос о существовании и способе отыскания собственных векторов, укажем некоторые их свойства.

С в о й с т в о 1. Собственные векторы линейного преобразования φ, отвечающие данному собственному значению λ, вместе с нулевым вектором образуют подпространство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $R^{(\lambda)}$ множество всех собственных векторов, отвечающих данному λ, дополненное нулевым вектором θ.

Если $x_1, x_2 \in R^{(\lambda)}$, то $\varphi x_1 = \lambda x_1$ и $\varphi x_2 = \lambda x_2$ и в силу линейности φ

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2).$$

Следовательно, $x_1 + x_2 \in R^{(\lambda)}$. Далее, при любом $\alpha \in P$ имеем:

$$\varphi(\alpha x_1) = \alpha \varphi x_1 = \alpha \lambda x_1 = \lambda(\alpha x_1).$$

Таким образом, из $x_1 \in R^{(\lambda)}$ следует $\alpha x_1 \in R^{(\lambda)}$. По теореме 7 получаем, что $R^{(\lambda)}$— подпространство пространства R. Это подпространство называется принадлежащим собственному значению λ.

С в о й с т в о 2. Собственные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейного преобразования φ, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, линейно независимы.

Доказательство проводится индукцией по числу векторов m. Для $m = 1$ утверждение верно, так как всякий отличный от нулевого вектор линейно независим. Положим, что утверждение верно для $m - 1$ собственных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ при попарном неравенстве собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$. Докажем, что тогда и система собственных векторов $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m$ линейно независима, если попарно различны собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}, \lambda_m$. Допустим противное. Тогда по свойству 2 линейной зависимости (§ 3) вектор x_m линейно выражается через $x_1, \dots, x_{m-1}$, так что при некоторых $c_1, c_2, \dots, c_{m-1} \in P$

$$x_m = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_{m-1}x_{m-1}. \tag{2}$$

Применяя к обеим частям равенства (2) линейное преобразование φ, получим:

$$\lambda_m x_m = c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 + \dots + c_{m-1}\lambda_{m-1}x_{m-1}. \tag{3}$$

Умножая (2) на λ_m и вычитая (3), получим:

$$c_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + c_2(\lambda_m - \lambda_2)x_2 + \dots + c_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1} = \Theta. \tag{4}$$

Так как система $x_1, \dots, x_{m-1}$ линейно независима и разности $\lambda_m - \lambda_1, \lambda_m - \lambda_2, \dots, \lambda_m - \lambda_{m-1}$ по условию не равны нулю, то из (4) следует, что $c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$. Тогда из (2) получаем $x_m = \theta$, что противоречит определению собственного вектора. Наше допущение оказалось неверным. Следовательно, система $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m$ линейно независима.

Следствие. Линейное преобразование φ пространства R_n не может иметь более n собственных векторов с попарно различными собственными значениями.

Свойство 3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — попарно различные собственные значения преобразования φ. Если для каждого из этих значений взять линейно независимую систему собственных векторов, то система, состоящая из всех этих векторов, линейно независима.

Доказательство проводится индукцией по числу m собственных значений. (Докажите в качестве упражнения.)

§ 19. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Определение 24. Пусть A — квадратная матрица порядка n с элементами a_{ij} из поля P. Тогда многочлен

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

называется характеристическим многочленом матрицы A.

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ относительно λ называют *характеристическим* уравнением, а его корни — характеристическими числами матрицы A.

Из определения определителя следует, что $\Delta(\lambda)$ есть многочлен от λ степени n, коэффициент старшего члена равен $(-1)^n$. Например, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -5 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

то характеристический многочлен матрицы A

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3 & -1\\ -3 & 5-\lambda & -1\\ -5 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Пусть φ — линейное преобразование пространства R_n. Выбирая различные базисы пространства R_n, мы будем получать различные матрицы преобразования φ. Естественно возникает вопрос: зависит ли характеристический многочлен матрицы линейного преобразования от выбора базиса? На этот вопрос отвечает

Теорема 18. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ матрицы A линейного преобразования φ есть определитель $|A-\lambda E|$. Как известно, в другом базисе матрица A_1 того же преобразования φ имеет вид:

$$A_1=T^{-1}AT,$$

где T — матрица перехода к новому базису. В новом базисе характеристический многочлен есть определитель матрицы $A_1-\lambda E$. Имеем:

$$|A_1-\lambda E|=|T^{-1}AT-\lambda E|=|T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET|=|T^{-1}(AT-$$
$$-\lambda ET)|=|T^{-1}(A-\lambda E)T|=|T^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|T|=$$
$$=|T^{-1}|\cdot|T|\cdot|A-\lambda E|=|T^{-1}T|\cdot|A-\lambda E|=$$
$$=|E|\cdot|A-\lambda E|=|A-\lambda E|.$$

В процессе преобразований мы использовали теорему: определитель произведения нескольких матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц.

Теорема 18 позволяет характеристический многочлен матрицы линейного преобразования называть характеристическим многочленом преобразования. Множество характеристических чисел матрицы преобразования также не будет зависеть от базиса, поэтому говорят о характеристических числах преобразования.

Теорема 19. Множество собственных значений преобразования φ линейного пространства R_n над числовым полем P совпадает с множеством корней характеристического многочлена преобразования φ, принадлежащих полю P.

Доказательство. Выберем в R_n какой-нибудь базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Линейному преобразованию φ в этом базисе соответствует некоторая матрица A с элементами из поля P:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n$ — произвольный вектор из R и

$$\varphi x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n.$$

Для координат векторов x и φx имеют место известные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \dots + a_{1n}\zeta_n, \\ \eta_2 &= a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \dots + a_{2n}\zeta_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_n &= a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \dots + a_{nn}\zeta_n. \end{aligned}\right\}$$

а) Пусть некоторое число $\lambda_0 \in P$ является собственным значением преобразования φ, соответствующим собственному вектору x. Тогда по определению 23 $x \neq \theta$ и

$$\varphi x = \lambda_0 x, \tag{1}$$

или

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0\zeta_1 \\ \lambda_0\zeta_2 \\ \vdots \\ \lambda_0\zeta_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Отсюда имеем:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \dots + a_{1n}\zeta_n &= \lambda_0\zeta_1, \\ a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \dots + a_{2n}\zeta_n &= \lambda_0\zeta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \dots + a_{nn}\zeta_n &= \lambda_0\zeta_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_0)\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \dots + a_{1n}\zeta_n &= 0, \\ a_{21}\zeta_1 + (a_{22} - \lambda_0)\zeta_2 + \dots + a_{2n}\zeta_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_0)\zeta_n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Мы видим, что набор чисел $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ является ненулевым решением однородной системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_0)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_0)x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda_0)x_n&=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Следовательно,

$$\Delta(\lambda_0)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_0 & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda_0 & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda_0\end{vmatrix}=0.\tag{5}$$

Таким образом, любое собственное значение линейного преобразования φ является корнем его характеристического многочлена, принадлежащим полю P.

б) Обратно, пусть характеристический многочлен $\Delta(\lambda)=|A-\lambda E|$ преобразования φ имеет корень $\lambda_0\in P$, т. е. выполняется равенство (5). Это означает, что определитель системы уравнений (4) равен нулю, а потому она имеет ненулевое решение, например $\zeta_1^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}$. Легко видеть, что оно удовлетворяет соотношениям, полученным из (3) и (2) заменой ζ_i на $\zeta_i^{(0)}$.

В результате имеем: для вектора $x^{(0)}$ с координатами $\zeta_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, \zeta_n^{(0)}$ справедливо соотношение

$$\varphi x^{(0)}=\lambda_0 x^{(0)}.$$

Следовательно, λ_0 является собственным значением преобразования φ, соответствующим собственному вектору $x^{(0)}$. Теорема доказана.

Следствие. Всякое линейное преобразование пространства R_n над полем комплексных чисел имеет хотя бы один собственный вектор.

Справедливость этого следствия вытекает из теоремы 19 и из того, что всякий многочлен имеет хотя бы один комплексный корень.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования пространства T_3, заданного в некотором базисе матрицей

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Находим характеристический многочлен:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3.$$

Собственными значениями будут корни этого многочлена. Следовательно, наше преобразование имеет одно собственное значение $\lambda = 2$ (кратности 3).

Для нахождения соответствующих собственных векторов подставим $\lambda = 2$ в уравнение

$$AX = \lambda X.$$

Получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0, \\ -4x_1 + 2x_2 &= 0, \\ -2x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Общее решение системы: $(\alpha,\ 2\alpha,\ \beta)$. Фундаментальная система решений:

$$x = (1, 2, 0), \quad y = (0, 0, 1).$$

Найденные векторы x и y являются линейно независимыми собственными векторами данного линейного преобразования с собственным значением $\lambda = 2$.

Упражнения

[7], № 1465, 1467 — 1474;
[10], № 925.

§ 20. О ПРИВЕДЕНИИ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Так как операции над линейными преобразованиями сводятся к соответствующим операциям над их матрицами, а матрицы линейных преобразований зависят от базиса, то интересным представляется вопрос о выборе базиса, в котором матрица данного линейного преобразования является наиболее простой.

Теорема 20. Если линейное преобразование φ пространства R_n имеет n линейно независимых собственных векторов, то в базисе, состоящем из этих векторов, матрица преобразования φ имеет диагональную форму.

Обратно, если в некотором базисе матрица преобразования φ диагональна, то все векторы этого базиса являются собственными векторами.

Доказательство. а) Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — линейно независимые собственные векторы преобразования φ. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varphi e_1 &= \lambda_1 e_1, \\ \varphi\ {}_2 &= \qquad \lambda_2 e_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi e_n &= \qquad\qquad \lambda_n e_n. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эти равенства показывают, что если принять векторы e_1, e_2, ..., e_n за базис пространства, то матрица преобразования φ в этом базисе будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ 0 & 0 \dots \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

т. е. будет диагональной матрицей.

б) Пусть в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ матрица преобразования φ диагональна и имеет вид (2). Это значит, что выполняются соотношения (1), следовательно, векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ базиса являются собственными векторами преобразования φ. Теорема доказана.

Учитывая свойство 2 собственных векторов (§ 18), из теоремы 20, в частности, получаем: если характеристический многочлен преобразования φ пространства R_n над полем P имеет n различных корней, принадлежащих полю P, то матрица преобразования приводится к диагональной форме.

Если же некоторые корни характеристического многочлена кратны, то вопрос о приведении матрицы преобразования к диагональной форме может решиться либо положительно, либо отрицательно в зависимости от числа линейно независимых собственных векторов. Если их число равно n, то приведение к диагональной форме возможно, если же оно меньше n, то невозможно. Вообще же вопрос о приведении матрицы линейного преобразования к простейшему виду в случае, когда среди корней характеристического многочлена имеются равные, довольно сложен.

Приведем без доказательства теорему о размерности подпространства $R^{(\lambda)}$.

Теорема 21. Размерность подпространства $R^{(\lambda_0)}$, принадлежащего корню λ_0 характеристического многочлена, не превосходит кратности этого корня.

Позднее выяснится (теорема 32), что в случае, когда основное поле P есть поле всех вещественных чисел, а матрица A, задающая линейное преобразование, симметрична, размерность пространства $R^{(\lambda_0)}$ совпадает с кратностью корня λ_0.

Примеры. 1. Линейное преобразование φ пространства T_3 задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно ли путем перехода к новому базису привести матрицу этого преобразования к диагональному виду? Найти этот базис и соответствующую матрицу.

Решение. Находим, что $\Delta(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

Для $\lambda_1 = 1$ собственный вектор $e_1 = (1, 1, 1)$. Для $\lambda_2 = 2$ находим два линейно независимых собственных вектора: $e_2 = (1, 1, 0)$ и $e_3 = (1, 0, -3)$. Векторы e_1, e_2, e_3 согласно свойству 3 (§ 18) линейно независимы. Приведение к диагональной форме оказалось возможным. Так как $\varphi e_1 = e_1$, $\varphi e_2 = 2e_2$, $\varphi e_3 = 2e_3$ то в базисе e_1, e_2, e_3 матрица преобразования будет:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Для преобразования с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

характеристический многочлен равен $\Delta(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$.

Максимальная линейно независимая система собственных векторов, отвечающих $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$, состоит из двух векторов, например $e_1 = (1, 1, 0)$ и $e_2 = (2, 1, 1)$. Следовательно, по теореме 20 матрица данного линейного преобразования к диагональному виду не приводится.

Упражнения

[7], № 1481—1483.

§ 21. О СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРАХ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С СИММЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

В § 18—20 мы рассмотрели основные предложения о собственных векторах и собственных значениях. Среди линейных преобразований часто встречаются такие, матрицы которых в некотором базисе симметричны. Для таких преобразований справедливы специфические теоремы о собственных значениях и собственных векторах.

Напомним некоторые свойства комплексных чисел. Если $\bar{z}$ есть комплексное число, сопряженное числу z, и $|z|$ — модуль числа z, то

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2. \tag{1}$$

Для произвольной матрицы A с комплексными элементами через $\bar{A}$ обозначают матрицу, получающуюся из A заменой всех ее элементов на сопряженные. Из (1) следует, что для произвольных матриц A и B справедливо:

$$\overline{A}\,\overline{B} = \bar{A} \cdot \bar{B}, \tag{2}$$

$$\overline{\alpha A} = \bar{\alpha} \cdot \bar{A}, \tag{3}$$

где α — комплексное число.

Условие вещественности комплексного числа z и матрицы A запишется так: $z = \bar{z}$, $A = \bar{A}$.

Теорема 22. Все собственные значения линейного преобразования φ с вещественной симметрической матрицей A вещественны.

Доказательство. Пусть R_n есть линейное пространство над полем комплексных чисел и φ — линейное преобразование в R_n. Пусть, далее, в некотором базисе матрица A преобразования φ является симметрической матрицей с вещественными элементами. Рассмотрим любое собственное значение λ преобразования φ (λ — комплексное число) и соответствующий ему собственный вектор x:

$$\varphi x = \lambda x \qquad (x \neq \Theta). \tag{4}$$

Обозначим через

$$X = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \dots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

матрицу-столбец комплексных координат вектора x в рассматриваемом базисе. Тогда равенство (4) запишется в виде

$$AX = \lambda X. \tag{4'}$$

Обозначим через $X' = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ строку координат вектора x. Тогда имеет смысл произведение матриц $X'A\bar{X}$. Это произведение будет матрицей с одним элементом.

Используя симметричность матрицы A и соотношение (4'), получаем:

$$(X'A)\bar{X} = (X'A')\bar{X} = (AX)'\bar{X} = (\lambda X)'\bar{X} = (\lambda X')\bar{X} = \lambda(X'\bar{X}).$$

Используя вещественность матрицы A и соотношения (2), (3), (4'), имеем:

$$X'(A\bar{X}) = X'(\bar{A}\bar{X}) = X'(\overline{AX}) = X'(\overline{\lambda X}) = X'(\bar{\lambda}\bar{X}) = \bar{\lambda}(X'\bar{X}).$$

Но $(X'A)\bar{X} = X'(A\bar{X})$, а потому получаем матричное равенство:

$$\lambda(X'\bar{X}) = \bar{\lambda}(X'\bar{X}), \tag{5}$$

где $X'\bar{X}$ есть матрица из одного числа. Именно:

$$X'\bar{X} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\begin{pmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \\ \dots \\ \bar{\zeta}_n \end{pmatrix} = (\zeta_1\bar{\zeta}_1 + \zeta_2\bar{\zeta}_2 + \dots + \zeta_n\bar{\zeta}_n) =$$

$$= (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 + \dots + |\zeta_n|^2),$$

причем матрица $X'\bar{X}$ не нулевая, поскольку $x \neq \theta$.

Перейдя от матричного равенства (5) к числовому и сократив на число $|\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2$, не равное нулю, получим:

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Значит, λ вещественно.

Теорема 23. Пусть линейное преобразование φ в некотором базисе задается симметрической матрицей A. Если x и y — два собственных вектора преобразования φ, отвечающие различным собственным значениям λ и μ, и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — координаты этих векторов в рассматриваемом базисе, то

$$\zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_n\eta_n = 0. \tag{*}$$

Доказательство. Сохраняем обозначения: X и Y — матрицы-столбцы, X' и Y' — матрицы-строки координат. По условию $\varphi x = \lambda x$, $\varphi y = \mu y$, значит,

$$AX = \lambda X, \quad AY = \mu Y.$$

Произведение $X'AY$ имеет смысл. Используя симметричность матрицы A, имеем:

$$(X'A)Y = (X'A')Y = (AX)'Y = (\lambda X)'Y = (\lambda X')Y = \lambda(X'Y).$$

С другой стороны,

$$X'(AY) = X'(\mu Y) = \mu(X'Y).$$

Но $(X'A)Y = X'(AY)$, а потому

$$\lambda(X'Y) = \mu(X'Y),$$

где $X'Y = (\zeta_1\eta_1 + \ldots + \zeta_n\eta_n)$. Отсюда

$$\lambda(\zeta_1\eta_1 + \ldots + \zeta_n\eta_n) = \mu(\zeta_1\eta_1 + \ldots + \zeta_n\eta_n). \tag{6}$$

Так как $\lambda \neq \mu$, то из (6) следует (*). Теорема доказана.

Векторы x и y, координаты которых удовлетворяют соотношению (*), впредь будем называть *ортогональными*. Тогда теорему 23 можно сформулировать так: собственные векторы линейного преобразования с симметрической матрицей, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Пример. Матрицу A линейного преобразования привести, если это возможно, к диагональному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Замечаем, что матрица A симметрическая. Находим сначала собственные значения, а затем соответствующие им собственные векторы:

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 (\lambda + 2).$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 2$ кратности 3, $\lambda_2 = -2$ кратности 1.

Для $\lambda_1 = 2$ отыскание собственных векторов сводится к решению уравнения

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \tag{7}$$

Система (7) имеет три линейно независимых решения, например:

$$e_1 = (1, 1, 0, 0), \quad e_2 = (1, 0, 1, 0), \quad e_3 = (1, 0, 0, 1).$$

Находим собственный вектор для $\lambda_2 = -2$:

$$e_4 = (-1, 1, 1, 1).$$

Система векторов e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независима (свойство 3, § 18); ее можно принять за базис пространства T_4. Так как

$$\begin{aligned} \varphi e_1 &= 2e_1, \\ \varphi e_2 &= \quad 2e_2, \\ \varphi e_3 &= \qquad 2e_3, \\ \varphi e_4 &= \qquad\quad -2e_4, \end{aligned}$$

то матрица данного линейного преобразования φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 принимает диагональную форму:

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Вектор e_4 ортогонален к векторам e_1, e_2, e_3 (согласно теореме 23). Но векторы e_1, e_2, e_3, вообще говоря, не обязаны получаться попарно ортогональными: они соответствуют одному собственному значению $\lambda_1 = 2$. Однако и для $\lambda_1 = 2$ можно найти попарно ортогональные собственные векторы

$$e_1', \quad e_2', \quad e_3'.$$

Действительно, собственные векторы, соответствующие $\lambda_1 = 2$, находятся из уравнения (7). В качестве первого собственного вектора e_1' возьмем, например,

$$e_1' = e_1 = (1, 1, 0, 0).$$

Второй собственный вектор $e'_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ найдем из условия ортогональности $e'_2 \perp e'_1$. Для этого, кроме (7), должно быть (*), т. е.

$$x_1 + x_2 = 0. \tag{8}$$

Из системы уравнений (7) и (8) находим:

$$e'_2 = (0, 0, 1, -1).$$

Для отыскания третьего собственного вектора $e'_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ добавляем к уравнению (7) условия ортогональности вектора e'_3 к векторам e'_1 и e'_2, т. е. уравнения

$$x_1 + x_2 = 0, \tag{8}$$

$$x_3 - x_4 = 0. \tag{9}$$

Из системы уравнений (7), (8), (9) находим:

$$e'_3 = (1, -1, 1, 1).$$

Таким образом, попарно ортогональными собственными векторами данного преобразования φ являются:

$$e'_1 = (1, 1, 0, 0), \qquad e'_3 = (1, -1, 1, 1),$$
$$e'_2 = (0, 0, 1, -1), \qquad e'_4 = (-1, 1, 1, 1).$$

Упражнения

Выяснить, для каких из следующих матриц преобразований существует диагональная форма, и найти ее (в случае существования):

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Глава III

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 22. ПОНЯТИЕ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ

Определение 25. Евклидовым пространством размерности n называется n-мерное линейное пространство над полем вещественных чисел, в котором каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое через (x, y) и называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены аксиомы:

11°. $(x, y) = (y, x)$.
12°. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.
13°. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, где α — любое вещественное число.
14°. $(x, x) > 0$ для любого вектора $x \neq \theta$.

Евклидово пространство размерности n обозначается через E_n. Из аксиом 11°— 14° следует (докажите):

1. $(\theta, \theta) = 0$.
2. $(x, \theta) = 0$.
3. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k, y) = (x_1, y) + (x_2, y) + \ldots + (x_k, y)$.
4. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, y) = \alpha_1(x_1, y) + \alpha_2(x_2, y) + \ldots + \alpha_k(x_k, y)$.

Примеры. 1. Исходное линейное пространство V_3. Скалярное произведение векторов из V_3 определяется как произведение длин векторов на косинус угла между ними:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\widehat{x, y}).$$

Аксиомы 11°— 14° выполняются, следовательно, имеем евклидово пространство, для которого сохраним прежнее обозначение V_3.

2. Исходное линейное пространство T_n. Скалярное произведение векторов

$$x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \text{ и } y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

определим формулой

$$(x, y) = \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_n\eta_n. \tag{1}$$

Аксиомы 11°— 14° легко проверяются, в частности, аксиома 14° выполняется, так как из (1) следует

$$(x, x) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2 \geqslant 0.$$

В дальнейшем пространство T_n с указанным скалярным произведением будем обозначать через T_n° и называть арифметическим евклидовым пространством.

Этот пример показывает, что n-мерные евклидовы пространства существуют для любого n.

В том же пространстве T_n скалярное произведение векторов x и y можно задавать формулой

$$(x, y) = \zeta_1\eta_1 + 2\zeta_2\eta_2 + \ldots + n\zeta_n\eta_n. \tag{1'}$$

Можно проверить, что аксиомы 11°—14° будут выполнены и при этом определении скалярного произведения. Таким образом, одно и то же линейное пространство R_n можно различными способами превратить в евклидово, по-разному определяя скалярное произведение. Формула

$$(x, y) = \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_{n-1}\eta_{n-1}, \tag{1''}$$

однако, не может быть принята за определение скалярного произведения в T_n, так как нарушается аксиома 14°: для вектора $x = (0, 0, \ldots, 0, 1) \neq \theta$ по формуле (1″) будет $(x, x) = 0$.

3. Этот пример будет более общим, чем предыдущий. Исходное линейное пространство T_n то же, что и в примере 2. Для определения скалярного произведения возьмем некоторую вещественную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выясним, какова должна быть матрица A, чтобы формула

$$\begin{aligned} (x, y) = a_{11}\zeta_1\eta_1 + a_{12}\zeta_1\eta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_1\eta_n + \\ + a_{21}\zeta_2\eta_1 + a_{22}\zeta_2\eta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_2\eta_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}\zeta_n\eta_1 + a_{n2}\zeta_n\eta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n\eta_n \end{aligned} \tag{2}$$

определяла скалярное произведение векторов

$$x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n), \quad y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Аксиомы 12° и 13° выполняются для любой матрицы A, в чем можно легко убедиться. Чтобы выполнялась аксиома 11°, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{3}$$

т. е. чтобы матрица A была симметрической. Аксиома 14° требует, чтобы выражение

$$\begin{aligned}(x, x) = a_{11}\zeta_1^2 + a_{12}\zeta_1\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_1\zeta_n + \\ + a_{21}\zeta_2\zeta_1 + a_{22}\zeta_2^2 + \ldots + a_{2n}\zeta_2\zeta_n + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}\zeta_n\zeta_1 + a_{n2}\zeta_n\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n^2\end{aligned} \tag{4}$$

было положительно для любых значений $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, одновременно не равных нулю, т. е., как говорят, чтобы квадратичная форма (4) с матрицей A была положительно определенной.

Если в качестве матрицы A взять единичную матрицу E, то формула (2) принимает вид (1) и мы получаем евклидово пространство T_n°. Если же

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 2 \ldots & 0 \\ . & . \; . \; . & . \\ 0 & 0 \ldots & n \end{pmatrix},$$

то формула (2) принимает вид (1').

4. Исходное линейное пространство — пространство функций, непрерывных на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ (пространство $C(a, b)$). Скалярное произведение функций $x(t)$ и $y(t)$ определим как интеграл от их произведения:

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Аксиомы 11°— 14° выполнены. (Докажите.) Полученное евклидово пространство бесконечномерно.

5. Исходное пространство — пространство многочленов от t степени $\leqslant n-1$. Скалярное произведение двух многочленов $f(t)$ и $g(t)$ определим так же, как и в примере 4. Получим пример n-мерного евклидова пространства.

Упражнение

Показать, что необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы

$$a_{11}\zeta_1^2 + 2a_{12}\zeta_1\zeta_2 + a_{22}\zeta_2^2$$

являются неравенства

$$a_{11} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Пользуясь этим условием, выясните, какие из следующих матриц пригодны для определения скалярного произведения в T_2 по формулам (2):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 23. ДЛИНА ВЕКТОРА. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ. НЕРАВЕНСТВО КОШИ—БУНЯКОВСКОГО

Аксиомы 11°—14° позволяют ввести в E_n некоторые понятия метрического характера.

Будем исходить из пространства V_3. Для скалярного произведения векторов x, $y \in V_3$, определенного формулой

$$(x,y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(\widehat{x,y}), \tag{1}$$

где $|x|$ и $|y|$ — длины векторов, имеем:

$$(x,x) = |x|^2.$$

Следовательно,

$$|x| = \sqrt{(x,x)}.$$

Этот результат приводит нас к следующему обобщению понятия длины вектора x произвольного евклидова пространства.

Определение 26. *Длиной вектора x* в евклидовом пространстве E_n называется неотрицательное значение квадратного корня из скалярного квадрата этого вектора. Длина вектора x обозначается $|x|$.

Таким образом,

$$|x| = \sqrt{(x,x)},$$

или

$$|x|^2 = (x,x).$$

Число (x, x) — скалярный квадрат вектора x — по аксиоме 14° неотрицательно, и потому каждый вектор имеет вполне определенную неотрицательную длину. Нулевой вектор является единственным вектором, длина которого равна нулю. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* или *нормированным*. Если α — некоторое вещественное число, то по аксиоме 13° и определению длины вектора имеем:

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(x,x)} = |\alpha| \cdot \sqrt{(x,x)} = |\alpha| \cdot |x|,$$

т. е. при умножении вектора на вещественное число его длина умножается на модуль этого числа. Отсюда следует, что каждый ненулевой вектор x можно нормировать, умножив его на $\frac{1}{|x|}$.

Примеры. 1. В пространстве T_n° для вектора $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ получаем выражение его длины:

$$|x| = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2}.$$

В качестве упражнения найдите длину вектора $x = (3, 2, 1, 1)$ и затем нормируйте его.

2. В пространстве $C(a, b)$ длина вектора $x = x(t)$ будет выражаться формулой

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}.$$

Определение 27. *Углом* между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства E_n называется число

$$\varphi = \arccos \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}. \tag{3}$$

Чтобы определение угла было корректным, надо доказать, что

$$-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|} \leqslant 1,$$

т. е. что

$$\frac{|(x,y)|}{|x|\cdot|y|} \leqslant 1,$$

или что для любых векторов $x, y \in E_n$ имеет место неравенство:

$$|(x,y)| \leqslant |x|\cdot|y|. \tag{4}$$

Неравенство (4) называют неравенством Коши—Буняковского Для доказательства неравенства Коши—Буняковского рассмотрим вектор

$$x - \alpha y,$$

где α — произвольное вещественное число.

По аксиоме 14°

$$(x - \alpha y, \quad x - \alpha y) \geqslant 0, \tag{5}$$

откуда в силу аксиом 11°—13° получаем:

$$(y,y)\cdot\alpha^2 - 2(x,y)\cdot\alpha + (x,x) \geqslant 0. \tag{6}$$

Квадратный трехчлен относительно α, стоящий в левой части (6), неотрицателен при всех значениях α, а потому его дискриминант не может быть положительным. Отсюда

$$(x,y)^2 - (x,x)\cdot(y,y) \leqslant 0,$$

или

$$(x,y)^2 \leqslant |x|^2\cdot|y|^2.$$

Следовательно,

$$|(x,y)| \leqslant |x|\cdot|y|. \tag{7}$$

Из справедливости неравенства Коши—Буняковского для любых двух векторов пространства E_n следует, что угол между любыми двумя ненулевыми векторами x и y существует всегда.

Покажем, что знак равенства в (7) имеет место тогда и только тогда, когда система векторов x, y линейно зависима.

а) Если указанная система линейно независима, то $x - \alpha y \neq \theta$ при любом α и согласно аксиоме 14° неравенства (5) и (6) будут строгими, а потому дискриминант квадратного трехчлена $(y, y)\alpha^2 - 2(x, y)\alpha + (x, x)$ будет отрицательным и в соотношении (7) будет знак $<$.

б) Если же x и y линейно зависимы, то для некоторого α будет $x = \alpha y$ и, следовательно,

$$|(x,y)| = |(\alpha y,y)| = |\alpha(y,y)| = |\alpha| \cdot |(y,y)| = |\alpha| \cdot |y|^2 = \\ = |\alpha y| \cdot |y| = |x| \cdot |y|.$$

Из а) следует, что если скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин, то эти векторы линейно зависимы, т. е. коллинеарны.

Примеры. 1. В пространстве V_3 неравенство Коши—Буняковского следует непосредственно из (1).

2. В пространстве T_n° для векторов $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ неравенство Коши—Буняковского принимает вид:

$$|\zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_n\eta_n| \leqslant \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2} \times \\ \times \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_n^2},$$

где знак $=$ будет тогда и только тогда, когда при некотором α

$$(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \alpha(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),$$

т. е. когда наборы координат пропорциональны.

Упражнение

Напишите неравенство Коши—Буняковского для пространства $C(a, b)$.

§ 24. ПОНЯТИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Докажем так называемое неравенство треугольника для любых двух векторов $x, y \in E_n$. Используя аксиомы 11°—14° и неравенство Коши — Буняковского, получаем:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant |x|^2 + \\ + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2, \qquad (1)$$

откуда

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Неравенство (1) называют *неравенством треугольника*. Это название оправдывается тем, что в случае пространства V_2 мы имеем дело с треугольником, длины сторон которого суть $|x|$, $|y|$ и $|x+y|$ (сделайте чертеж).

В пространстве $T_n{}^{\circ}$ неравенство (1) запишется в таком виде:

$$\sqrt{(\zeta_1+\eta_1)^2+(\zeta_2+\eta_2)^2+\ldots+(\zeta_n+\eta_n)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2+\ldots+\zeta_n^2}+\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2}.$$

Выясним, когда в соотношении (1) имеет место знак $=$. Случай, когда хотя бы один из векторов нулевой, очевиден.

а) Пусть оба вектора x и y ненулевые, но

$$|x+y|=|x|+|y|.$$

Тогда

$$|x+y|^2=|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2.$$

С другой стороны,

$$|x+y|^2=(x+y,\ x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=|x|^2+$$
$$+2(x,y)+|y|^2.$$

Следовательно,

$$(x,y)=|x|\cdot|y|,$$

а это, как мы видели ранее (§ 23), означает, что $x=\alpha y$, где α — вещественное число, и $(x,\ y)>0$ (последнее потому, что $|x|>0$ и $|y|>0$, так как оба вектора ненулевые). Значит,

$$(x,y)=(\alpha y,y)=\alpha(y,y)>0,$$

откуда следует, что $\alpha>0$.

б) Обратно, пусть $x=\alpha y$, где $\alpha>0$. Тогда

$$|x+y|=|\alpha y+y|=|(\alpha+1)y|=|\alpha+1|\cdot|y|,$$
$$|x|+|y|=|\alpha y|+|y|=|\alpha|\cdot|y|+|y|=(|\alpha|+1)|y|=$$
$$=|\alpha+1|\cdot|y|,$$

и, значит, при $x=\alpha y$, где $\alpha>0$ в соотношении (1), имеет место знак $=$.

Итак, для ненулевых векторов x и y в соотношении (1) имеет место знак $=$ тогда и только тогда, когда $x=\alpha y$, где $\alpha>0$, т. е. когда векторы x и y коллинеарны и одинаково направлены.

Длина вектора $x\in E_n$ является, таким образом, неотрицательной числовой функцией, определенной на E_n и обладающей свойствами:

1*. $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=\theta$.

2*. $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

3*. $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$.

Произвольное линейное пространство R (не обязательно евклидово), на котором задана числовая функция $\|x\|$, обладающая свойствами 1*—3*, называется *нормированным*, сама же функция $\|x\|$ называется *нормой вектора*.

Таким образом, евклидовы пространства являются нормированными, причем нормой вектора является его длина.

Введем понятие расстояния $\rho(x, y)$ между двумя векторами x и y произвольного нормированного пространства R, положив

$$\rho(x,y) = \| x - y \|. \tag{2}$$

Это определение находится в полном соответствии со свойствами расстояния в обычном трехмерном пространстве. Действительно, если точка A в пространстве является концом вектора $x = \overrightarrow{OA}$, а точка B — концом вектора $y = \overrightarrow{OB}$, то расстояние между точками A и B есть не что иное, как длина вектора $\overrightarrow{AB}$, равного $y - x$.

На основе аксиом нормы (т. е. аксиом 1* — 3*) можно получить, что $\rho(x, y) \geqslant 0$, при этом:

а) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (свойство тождества),

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (свойство симметрии),

в) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (свойство треугольника).

В самом деле, из 1* по определению (2) следует а).

По аксиоме 3* и определению (2) получаем б), так как

$$\rho(x,y) = \| x - y \| = \| (-1)(y - x) \| = | -1 | \cdot \| y - x\| = \\ = \| y - x \| = \rho(y,x).$$

Свойство в) получаем по определению (2), пользуясь аксиомой 2*:

$$\rho(x,y) = \|x - y \| = \| (x - z) + (z - y) \| \leqslant \| x - z \| + \\ + \| z - y \| = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Произвольное множество, в котором определена неотрицательная вещественная функция $\rho(x, y)$, обладающая свойствами а), б), в) (аксиомами метрики), называется *метрическим пространством**. Следовательно, всякое нормированное (в частности, евклидово) пространство является метрическим пространством.

Для евклидова пространства E_n расстояние между векторами x и y определяется формулой

$$\rho(x,y) = | x - y | = \sqrt{(x - y, x - y)}, \tag{3}$$

---

* Рекомендуем брошюру Ю. А. Шрейдер «Что такое расстояние?». М., Физматгиз, 1963.

в частности,

$$\rho(x,\Theta) = \sqrt{(x,x)} = |x|,$$

т. е. длина вектора x есть расстояние от этого вектора x (точки x) до вектора θ (точки θ) — до «начала координат» θ.

§ 25. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ВЕКТОРОВ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС. ОРТОГОНАЛЬНО-ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Определение 28. Векторы x и y евклидова пространства E_n называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(x,y) = 0. \tag{1}$$

Согласно определению 27 угол между ненулевыми ортогональными векторами равен $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, понятие ортогональности является естественным обобщением понятия перпендикулярности. Поэтому для обозначения ортогональности векторов используют знак $\perp$.

Если $x = \theta$, то $(x, y) = (\theta, y) = (0 \cdot z, y) = 0\,(z, y) = 0$, т. е. нулевой вектор оказывается ортогональным к любому вектору.

Из аксиомы 13° следует, что если $x \perp y$, то и $\alpha x \perp y$, т. е. ортогональность двух векторов сохраняется при умножении любого из них на произвольное вещественное число.

Упражнения

1. В пространстве T_n° ортогональность векторов $x=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ записывается условием:

$$\zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_n\eta_n = 0. \tag{2}$$

В частности, попарно ортогональны векторы стандартного базиса:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = \\ = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

В качестве упражнения предлагается добавить к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & 2, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & 1, & -2 \\ 2, & 1, & -1, & 0, & 2 \end{pmatrix}$$

еще две строчки, ортогональные друг другу и строкам матрицы A.

2. Показать, что в пространстве многочленов степени $\leqslant 2$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

векторы $f_0 = 1$, $f_1 = t$, $f_2 = t^2 - \frac{1}{3}$ попарно ортогональны.

3. Покажите, что в пространстве $C(-\pi, \pi)$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)d(t)$$

любые два вектора так называемой тригонометрической системы

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt$$

попарно ортогональны.

Отметим два свойства ортогональности векторов.

Свойство 1. Любая система ненулевых попарно ортогональных векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_k \tag{3}$$

линейно независима.

Допустим, что система (3) линейно зависима. Тогда существуют не равные одновременно нулю числа $c_1, \dots, c_k$ такие, что

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ka_k = \Theta. \tag{4}$$

Не нарушая общности, положим $c_1 \neq 0$. Умножив обе части (4) скалярно на a_1 и учитывая ортогональность вектора a_1 к остальным, получим, что

$$c_1(a_1,a_1) = 0,$$

откуда, в силу $c_1 \neq 0$, следует, что $(a_1, a_1) = 0$. Отсюда по аксиоме, 14° получаем $a_1 = \theta$, что противоречит условию. Следовательно, допущение о линейной зависимости системы (3) неверно.

Свойство 2. Если вектор $b \in E_n$ ортогонален к каждому из векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_k,$$

то он ортогонален к каждому из векторов линейного подпространства L, натянутого на векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$.

В самом деле, пусть $L = L(a_1, a_2, \dots, a_k) = \{\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \dots + \alpha_ka_k\}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — произвольные вещественные числа. Согласно условию и аксиомам 12°—13° имеем:

$$(\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \dots + \alpha_ka_k, b) = \alpha_1(a_1,b) + \alpha_2(a_2,b) + \dots + \alpha_k(a_k,b) = 0.$$

Свойство 2 является обобщением на любое евклидово пространство теоремы о двух перпендикулярах из элементарной геометрии (сделайте чертеж). Говорят, что вектор b ортогонален к подпространству L и пишут $b \perp L$, если $b \perp x$, где x—любой вектор из L.

Упражнение

Векторы a_1 и a_2 ортогональны. Доказать, что $|a_1 + a_2|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2$ (теорема Пифагора). Обобщите на случай нескольких попарно ортогональных векторов.

Из свойства 1 и теоремы 2 следует, что если ненулевые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства E_n попарно ортогональны, то они образуют базис этого пространства.

Определение 29. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, отличные от нулевого, образуют *ортогональный базис* n-мерного евклидова пространства, если они попарно ортогональны.

Определение 30. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства размерности n образуют *ортонормированный базис*, если они попарно ортогональны и каждый имеет длину, равную 1, т. е. если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

Существование ортогональных базисов доказывается конструктивно с помощью так называемого процесса ортогонализации.

Теорема 24. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве E_n существуют ортогональные (а также и ортонормированные) базисы.

Доказательство. По условию в пространстве E_n имеется некоторый базис, состоящий из векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Будем строить новый, ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Положим:

$$e_1 = a_1.$$

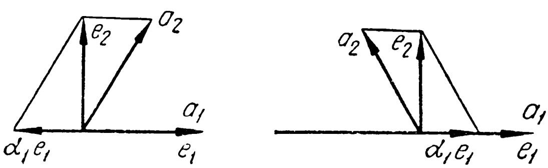
Вектор e_2 будем искать в виде

$$e_2 = a_2 + \alpha_1 e_1.$$

Вещественный множитель α_1 подбираем так, чтобы было $e_2 \perp e_1$. (Из чертежа 5 видно, какими соображениями следует руководствоваться при подборе α_1.)

Алгебраически выбор α_1 производится так. Должно быть $(e_2, e_1) = 0$, т. е.

$$(a_2 + \alpha_1 e_1, e_1) = (a_2, e_1) + \alpha_1 (e_1, e_1) = 0.$$



Черт. 5

Отсюда однозначно находим:

$$\alpha_1 = -\frac{(a_2,e_1)}{(e_1,e_1)}.$$

Заметим, что $e_2 \neq \theta$, иначе было бы $a_2 + \alpha_1 a_1 = \theta$, что означает линейную зависимость системы векторов a_1, a_2.

Если $n = 2$, то процесс окончен. Если $n > 2$, то, построив e_1 и e_2, ищем e_3 в форме

$$e_3 = a_3 + \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2,$$

где α_1' и α_2' находим из условий $e_3 \perp e_1$ и $e_3 \perp e_2$. А именно, из $e_3 \perp e_1$ следует:

$$(a_3 + \alpha_1' e_1 + \alpha_2' e_2, e_1) = (a_3,e_1) + \alpha_1'(e_1,e_1) + \alpha_2'(e_2,e_1) = 0,$$

откуда

$$\alpha_1' = -\frac{(a_3,e_1)}{(e_1,e_1)}.$$

Аналогично из $e_3 \perp e_2$ находим:

$$\alpha_2' = -\frac{(a_3,e_2)}{(e_2,e_2)}.$$

В результате имеем:

$$e_3 = a_3 + \alpha_1' a_1 + \alpha_2'(a_2 + \alpha_1 a_1) = a_3 + \alpha_2' a_2 + (\alpha_1' + \alpha_1\alpha_2')a_1,$$

откуда следует, что $e_3 \neq \theta$.

Если $n = 3$, то процесс окончен, в противном случае продолжаем его. Если уже построены векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$, то вектор e_k ищем в форме

$$e_k = a_k + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{k-1} e_{k-1},$$

где коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ находим из условия $e_k \perp e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_{k-1}$.

Получим:

$$\alpha_1 = -\frac{(a_k,e_1)}{(e_1,e_1)}, \qquad \alpha_2 = -\frac{(a_k,e_2)}{(e_2,e_2)}, \ \ldots, \ \alpha_{k-1} = -\frac{(a_k,e_{k-1})}{(e_{k-1},e_{k-1})}.$$

Этот процесс носит название процесса ортогонализации. Он продолжается до исчерпания векторов базиса $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Полученные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ по построению попарно ортогональны и отличны от нулевого, следовательно, они образуют ортогональный базис.

Для получения ортонормированного базиса остается нормировать векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Из теоремы 8 следует, что любой вектор $a_1 \neq \theta$ можно включить в состав базиса линейного пространства R_n. Заметим, что и в теореме 24 доказано также нечто большее, чем в ней утверждалось, а именно: любой вектор e_1 длины 1 можно дополнить до ортонормированного базиса пространства E_n.

Следующая теорема показывает значение ортонормированных базисов в определении скалярного произведения.

Теорема 25. 1) В ортонормированном базисе евклидова пространства скалярное произведение любых двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(x,y) = \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \dots + \zeta_n\eta_n, \tag{5}$$

где ζ_i и η_i — координаты векторов x и y в указанном базисе.

2) Обратно, если в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ евклидова пространства E_n скалярное произведение любых двух векторов x и y задается формулой (5), то этот базис является ортонормированным.

Доказательство. 1) Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства E_n, так что

$$(e_i,e_k) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

По аксиомам 12°—13° для векторов

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$$

будем иметь выражение скалярного произведения в координатах в общем виде:

$$\begin{aligned}(x,y) &= (\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n, \ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n) = \\ &= \zeta_1\eta_1(e_1,e_1) + \zeta_1\eta_2(e_1,e_2) + \dots + \zeta_1\eta_n(e_1,e_n) + \\ &+ \zeta_2\eta_1(e_2,e_1) + \zeta_2\eta_2(e_2,e_2) + \dots + \zeta_2\eta_n(e_2,e_n) + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \zeta_n\eta_1(e_n,e_1) + \zeta_n\eta_2(e_n,e_2) + \dots + \zeta_n\eta_n(e_n,e_n).\end{aligned}$$

Учитывая условие ортонормированности векторов базиса, получаем наиболее простой вид для выражения скалярного произведения:

$$(x,y) = \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \dots + \zeta_n\eta_n.$$

2) Пусть теперь в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ для произвольных векторов

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n$$

имеет место (5):

$$(x,y) = \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \dots + \zeta_n\eta_n.$$

Применим эту формулу для базисных векторов. Так как

$$e_i = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_i + \dots + 0 \cdot e_n,$$
$$e_k = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_k + \dots + 0 \cdot e_n,$$

то

$$(e_i, e_k) = 1 \text{ при } i = k \text{ и } (e_i, e_k) = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Следовательно, векторы нашего базиса ортонормированы.

Упражнения

[7], № 1357—1363;
[10], № 901—902, 905.

В качестве дополнения к свойству 2 ортогональных векторов докажем теперь, что совокупность L_1 векторов пространства E_n, ортогональных ненулевому вектору $e_1 \in E_n$, есть подпространство размерности $n-1$.

Выберем ортогональный базис пространства E_n, содержащий вектор e_1: $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Значит,

$$e_2, e_3, \ldots, e_n \perp e_1,$$

а потому

$$e_2, e_3, \ldots, e_n \in L_1.$$

Пусть x — произвольный вектор пространства E_n:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n.$$

Потребуем, чтобы $x \in L_1$. Тогда $(x, e_1) = 0$, т. е.

$$(x, e_1) = \zeta_1(e_1, e_1) + \zeta_2(e_2, e_1) + \ldots + \zeta_n(e_n, e_1) = 0.$$

Отсюда $\zeta_1(e_1, e_1) = 0$, а потому $\zeta_1 = 0$.

Таким образом, любой вектор $x \in L_1$ линейно выражается через векторы $e_2, e_3, \ldots, e_n$. А так как последние линейно независимы, то по определению 4 они составляют базис пространства L_1. Следовательно, по теореме 5 $\dim L_1 = n-1$.

Определение 31. *Ортогональным дополнением* подпространства L пространства E_n называется совокупность L^* всех векторов из E_n, ортогональных к L.

Докажем, что L^* является подпространством пространства E_n. Пусть $x^*, y^* \in L^*$. Это означает, что если x— произвольный вектор из L, то $(x^*, x) = (y^*, x) = 0$, и потому

$$(x^* + y^*, x) = (x^*, x) + (y^*, x) = 0.$$

Следовательно, $x^* + y^* \in L^*$. Кроме того, для произвольного вещественного числа α и любого $x^* \in L^*$ имеем:

$$(\alpha x^*, x) = \alpha(x^*, x) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\alpha x^* \in L^*$. По теореме 7 получаем, что L^*— подпространство.

Тот факт, что подпространство L^* названо дополнением подпространства L, объясняется следующей теоремой.

Теорема 26. Пространство E_n есть прямая сумма подпространств L и L^*.

Доказательство. Согласно определению 8 достаточно доказать, что $L + L^* = E_n$ и $L \cap L^* = \{\theta\}$. Пусть $x_1 \in L \cap L^*$, т. е. $x_1 \in L$ и $x_1 \in L^*$. Тогда по определению пространства $L^* x_1 \perp x_1$, т. е. $(x_1, x_1) = 0$. Отсюда по аксиоме 14° $x_1 = \theta$.

Таким образом, $L \cap L^* = \{\theta\}$. Покажем, теперь, что $L + L^* = E_n$. Пусть $\dim L = k$ и $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — ортогональный базис пространства L. Дополним этот базис до базиса всего пространства E_n векторами $a_{k+1}, \ldots, a_n$. После выполнения ортогонализации получим ортогональный базис

$$e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$$

пространства E_n. Тогда при $1 \leqslant i \leqslant k$ и $k + 1 \leqslant j \leqslant n$ будем иметь $(e_i, e_j) = 0$. Следовательно, $e_{k+1}, \ldots, e_n \in L^*$.

Пусть x — любой вектор из E_n и

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Так как $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k \in L$, а $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in L^*$, то

$$E_n = L + L^*.$$

Упражнения

[7], № 1366, 1367.

Пусть L — линейное подпространство пространства E_n. Докажем, что любой вектор x из E_n однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \perp L$. Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство L, а z — ортогональной составляющей вектора x относительно L.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — некоторый базис подпространства L. Будем искать вектор y, требуемый задачей в виде

$$y = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k, \tag{6}$$

где числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ найдем из условия ортогональности вектора $x - y$ к L.

Из $x - y \perp L$ следует, что $(x - y, e_i) = 0$, а отсюда

$$(x, e_i) = (y, e_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, получаем систему для отыскания чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$:

$$\left.\begin{array}{l}
(e_1, e_1) c_1 + (e_2, e_1) c_2 + \ldots + (e_k, e_1) c_k = (x, e_1), \\
(e_1, e_2) c_1 + (e_2, e_2) c_2 + \ldots + (e_k, e_2) c_k = (x, e_2), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(e_1, e_k) c_1 + (e_2, e_k) c_2 + \ldots + (e_k, e_k) c_k = (x, e_k).
\end{array}\right\} \tag{7}$$

Если базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ортонормален, то система (7) обращается в систему

$$c_i = (x, e_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{8}$$

откуда находятся и притом однозначно коэффициенты $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_k$. Так как базис всегда можно ортонормировать, а исходное условие $x - y \perp L$ не зависит от базиса, то тем самым доказано существование и единственность вектора y, такого, что $x - y \perp L$.

Отсюда следует, что при произвольном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_k$ определитель системы (7)

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \ldots & (e_k, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_k, e_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (e_1, e_k) & (e_2, e_k) & \ldots & (e_k, e_k) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (так называемый определитель Грама векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$).

Таким образом, числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ находим из системы (7), а затем по формуле (6) и сам вектор y. Найдя вектор y, полагаем $z = x - y$.

Пример. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора $x = (5, 2, -2, 2)$ на линейное пространство L, натянутое на векторы

$$e_1 = (2, 1, 1, -1), \quad e_2 = (1, 1, 3, 0).$$

Решение. Система векторов e_1, e_2 — базис L. Пусть

$$y = c_1e_1 + c_2e_2.$$

Так как

$$(e_1, e_1) = 7, \quad (e_2, e_1) = 6, \quad (x, e_1) = 8,$$
$$(e_1, e_2) = 6, \quad (e_2, e_2) = 11, \quad (x, e_2) = 1,$$

то система (7) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} 7c_1 + 6c_2 &= 8 \\ 6c_1 + 11c_2 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

отсюда получаем: $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

$$y = 2e_1 - e_2 = (3, 1, -1, -2) \in L.$$
$$z = x - y = (2, 1, -1, 4) \perp L.$$

Упражнения

[7], № 1370—1372;
[10], № 906.

Расстоянием от вектора x до линейного многообразия $H = L + x_0$ называется минимум расстояний от данного вектора до векторов многообразия, т. е. минимум длин векторов $x - u$, где u — вектор из H.

Докажем, что указанное расстояние равно длине ортогональной составляющей z векторов $x - x_0$ относительно линейного подпространства L.

Пусть $x - x_0 = y + z$, где y — ортогональная проекция вектора $x - x_0$ на L, z — его ортогональная составляющая относительно L, так что $x - x_0 - y \perp L$.

Имеем:

$$x - u = (x - x_0) - (u - x_0) = [(x - x_0) - y] + [y - (u - x_0)].$$

Здесь $(x - x_0) - y \perp L$, $y - (u - x_0) \in L$, а потому

$$|x - u|^2 = (x - u,\ x - u) = |(x - x_0) - y|^2 + |y - (u - x_0)|^2.$$

Так как первое слагаемое не зависит от u, то $\min |x - u|$ достигается при $\min |y - (u - x_0)|$, который равен нулю (при $u = y + x_0 \in H$). Следовательно,

$$\min |x - u| = |(x - x_0) - y| = |z|,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение

[7], № 1374.

Теперь докажем, что из всех векторов линейного подпространства L наименьший угол с данным вектором $x \in E_n$ образует ортогональная проекция y вектора x на L.

Пусть $x = y + z$, где y и z имеют тот же смысл, что и выше. Тогда

$$(x, y) = (y + z, y) = (y, y) + (z, y) = (y, y) = |y|^2,$$

а поэтому

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{|y|^2}{|x| \cdot |y|} = \frac{|y|}{|x|}.$$

Пусть теперь y' — произвольный вектор из L. Учитывая, что

$$(x, y') = (y + z, y') = (y, y') + (z, y') = (y, y')$$

получаем:

$$\cos(x, y') = \frac{(x, y')}{|x| \cdot |y'|} = \frac{(y, y')}{|x| \cdot |y'|} = \frac{|y| \cdot |y'|}{|x| \cdot |y'|} \cdot \cos(y, y') \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|y|}{|x|} = \cos(x, y),$$

что и доказывает утверждение.

Угол между вектором x и его ортогональной проекцией на подпространство L называется углом между x и L.

Упражнения

[7], № 1402, 1403;
[10], № 909.

§ 26. ИЗОМОРФИЗМ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 32. Два евклидовых пространства E_n и E'_n называются *изоморфными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие Φ, такое, что:

$$\begin{aligned}&1.\ \Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y),\\ &2.\ \Phi(\lambda x)=\lambda\Phi(x),\\ &3.\ (x, y)=(\Phi(x),\ \Phi(y)),\end{aligned}$$

где λ — произвольное вещественное число.

Первые два условия означают, что E_n и E'_n изоморфны как линейные пространства, третье условие означает, что при изоморфизме Φ сохраняется скалярное произведение.

Теорема 27. Любые два евклидовых пространства E_n и E'_n размерности n изоморфны.

Доказательство. Выберем в E_n и E'_n некоторые ортонормированные базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1', e_2', \ldots, e'_n$ соответственно. Далее, каждому вектору

$$x=\zeta_1e_1+\zeta_2e_2+\ \ldots\ +\zeta_n e_n$$

из E_n поставим в соответствие вектор $\Phi(x)$ из E'_n, равный

$$\Phi(x)=\zeta_1e'_1+\zeta_2e'_2+\ \ldots\ +\zeta_ne'_n.$$

Таким образом, x и $\Phi(x)$ имеют в соответствующих базисах одинаковые координаты. Очевидно, условия 1 и 2 определения 32 будут выполнены. Условие 3 также выполняется, ибо если

$$y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\ \ldots\ +\eta_n e_n,\quad \Phi(y)=\eta_1e'_1+\eta_2e'_2+\ \ldots\ +\eta_n e'_n,$$

то, учитывая ортонормированность базисов $\{e\}$ и $\{e'\}$, получим:

$$\begin{aligned}(x, y)=\zeta_1\eta_1+\zeta_2\eta_2+\ \ldots\ +\zeta_n\eta_n \text{ и } (\Phi(x),\ \Phi(y))=\\ =\zeta_1\eta_1+\zeta_2\eta_2+\ \ldots\ +\zeta_n\eta_n,\end{aligned}$$

т. е.

$$(x, y)=(\Phi(x),\ \Phi(y)).$$

Как следствие, получаем, что каждое евклидово пространство E_n изоморфно арифметическому евклидову пространству T_n^0.

§ 27. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Пусть $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ и $e'_1,\ e'_2,\ \ldots,\ e'_n$ — два базиса евклидова пространства E_n и

$$Q=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} e'_1 = q_{11}e_1 + q_{21}e_2 + \ldots + q_{n1}e_n, \\ e'_2 = q_{12}e_1 + q_{22}e_2 + \ldots + q_{n2}e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e'_n = q_{1n}e_1 + q_{2n}e_2 + \ldots + q_{nn}e_n. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Как мы видели в § 7, матрицей перехода от одного базиса к другому может служить любая невырожденная матрица. В евклидовых пространствах особую роль играют ортонормированные базисы, поэтому естественно поставить вопрос: какими свойствами обладает матрица Q в случае, когда базисы $\{e\}$ и $\{e'\}$ ортонормированы? В этом случае для векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ по теореме 25 имеем (для $i, k = 1, 2, \ldots, n$):

$$(e'_i, e'_k) = q_{1i}q_{1k} + q_{2i}q_{2k} + \ldots + q_{ni}q_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \tag{2}$$

Равенства (2) означают, что каждый столбец матрицы Q нормирован, и любые два столбца ортогональны.

Определение 33. Матрица, у которой каждый столбец нормирован, а любые два различных столбца ортогональны, называется ортогональной.

Итак, матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональна.

Примеры ортогональных матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Если матрица Q ортогональна, а Q' — транспонированная к ней матрица, то

$$Q' \cdot Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \ldots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \ldots & q_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1n} & q_{2n} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, если матрица Q ортогональна, то

$$Q' \cdot Q = E. \tag{3}$$

Отсюда следует, что матрица Q невырожденная и что

$$Q' = Q^{-1}. \tag{4}$$

Следовательно, вместе с (3) имеет место также соотношение

$$Q \cdot Q' = E, \tag{5}$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \dots & q_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1n} & q_{2n} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5')$$

Из равенства (5′) видно, что и строки матрицы Q также ортонормированы.

Таким образом, если столбцы матрицы ортонормированы, то ортонормированы и ее строки.

Так как $|Q| = |Q'|$, то из (5) получаем, что $|Q|^2 = 1$, откуда $|Q| = \pm 1$, т. е. определитель ортогональной матрицы равен 1 или —1 (обратное, вообще говоря, не будет верно. Приведите пример).

Пусть теперь Q — произвольная ортогональная матрица и $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис пространства E_n. Тогда векторы $e_1', e_2', \dots, e_n'$, определяемые равенствами (1), будут ортогональны и нормированы — это следует из равенств (2). Таким образом, всякая ортогональная матрица есть матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису.

Примеры. 1. Показать, что при $n = 2$ всякая ортогональная матрица с определителем, равным $+1$, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

т. е. является матрицей преобразования поворота на угол α.

Решение. Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

— ортогональная матрица с определителем $|Q| = 1$. Тогда из условий $Q^{-1} = Q'$ и $|Q| = 1$ имеем:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $a = d$, $b = -c$. Матрица Q, таким образом, имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix},$$

где по условию $|Q| = a^2 + c^2 = 1$. Полагая $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$, получаем:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Ясно, что целочисленная матрица является ортогональной тогда и только тогда, когда в каждой строке и в каждом столбце

имеется только один отличный от нуля элемент, равный $+1$ или -1.

Доказать, что всего имеется $2^n \cdot n!$ целочисленных ортогональных матриц порядка n.

Р е ш е н и е. Очевидно, первую строку искомой матрицы можно выбрать $2n$ способами. С каждым выбором числа $+1$ или -1 в первой строке согласуется любой из $2 \cdot (n-1)$ выборов числа $+1$ или -1 во второй строке. Всего получаем $2n \cdot 2(n-1)$ выборов числа ± 1 в первых двух строках. С каждым из них согласуется любой из $2(n-2)$ выборов числа $+1$ или -1 в третьей строке и т. д. Всего получаем, таким образом,

$$2n \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = 2^n \cdot n!$$

искомых матриц.

Можно выделить целочисленные ортогональные матрицы, в которых в качестве ненулевого элемента будет только $+1$. Общее число таких матриц порядка n равно $n!$ Эти матрицы называют иногда подстановочными. Такое название объясняется тем, что каждая из них осуществляет некоторую подстановку. Например,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x_4, x_1, x_2, x_3),$$

т. е. взятая нами матрица осуществляет подстановку

$$\begin{pmatrix} x_1x_2x_3x_4 \\ x_4x_1x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Показать, что множество всех ортогональных матриц порядка n образует группу относительно операции умножения матриц.

Р е ш е н и е. Пусть матрицы Q_1 и Q_2 ортогональны. Значит, $Q_1' = Q_1^{-1}$ и $Q_2' = Q_2^{-1}$. Тогда $(Q_1Q_2)' = Q_2'Q_1' = Q_2^{-1}Q_1^{-1} = (Q_1Q_2)^{-1}$. Следовательно, произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.

Кроме того, $(Q_1^{-1})' = (Q_1')' = Q_1 = (Q_1^{-1})^{-1}$, т. е. матрица Q_1^{-1}, обратная ортогональной матрице Q_1, также ортогональна.

Упражнения

1. Показать, что из условия (4) следует, что Q — ортогональная матрица в смысле определения 33.

2. Показать, что при $n = 2$ ортогональная матрица с определителем, равным -1, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Определение 34. Линейное преобразование φ евклидова пространства E_n называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. если

$$(\varphi x, \varphi y) = (x, y) \tag{1}$$

для всех $x, y \in E_n$.

Полагая в (1) $x = y$, получаем:

$$(\varphi x, \varphi x) = (x, x),$$

т. е. для любого $x \in E_n$

$$|\varphi x|^2 = |x|^2. \tag{2}$$

Следовательно,

$$|\varphi x| = |x|, \tag{3}$$

т. е. ортогональное преобразование сохраняет длины векторов. В связи с этим говорят, что ортогональное преобразование не меняет метрики пространства E_n.

Переход (1) $\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$ (3) обратим. В самом деле, пусть (3) верно для любого вектора из E_n. Тогда

$$|\varphi(x + y)| = |x + y|.$$

Следовательно, $(\varphi(x + y), \varphi(x + y)) = (x + y, x + y)$ и по линейности φ имеем:

$$(\varphi x + \varphi y, \varphi x + \varphi y) = (x + y, x + y).$$

Отсюда

$$(\varphi x, \varphi x) + 2(\varphi x, \varphi y) + (\varphi y, \varphi y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y). \tag{4}$$

По условию $(\varphi x, \varphi x) = (x, x)$, $(\varphi y, \varphi y) = (y, y)$, значит, из (4) следует (1).

Таким образом, можно дать второе определение ортогонального преобразования, эквивалентное определению 34.

Определение 34′. Ортогональным преобразованием φ евклидова пространства E_n называется такое линейное преобразование, которое сохраняет скалярный квадрат каждого вектора:

$$(\varphi x, \varphi x) = (x, x),$$

или, другими словами, сохраняет длину каждого вектора из E_n.

Так как

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

и числитель и знаменатель в этом выражении не меняются при ортогональном преобразовании, то ортогональное преобразование сохраняет углы между векторами.

Теорема 28. 1) Если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n ортогонально, то образы всех векторов ортонормированного базиса сами составляют ортонормированный базис.

2) Обратно, если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n переводит хотя бы один ортонормированный базис снова в ортонормированный базис, то это преобразование φ ортогонально.

Доказательство. 1) По условию для векторов базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеем:

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Так как преобразование φ ортогонально, то

$$(\varphi e_i, \varphi e_k) = (e_i, e_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

т. е. векторы $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ попарно ортогональны и нормированы. Будучи ненулевыми и линейно независимыми, они составляют ортонормированный базис пространства E_n.

2) Дано, что $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ — ортонормированные базисы, причем через $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ обозначены образы векторов $e_1, \ldots, e_n$ для некоторого линейного преобразования φ евклидова пространства E_n. Надо доказать, что при этих условиях преобразование φ ортогонально.

Пусть x — произвольный вектор из E_n и

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n.$$

В силу линейности φ имеем:

$$\varphi x = \zeta_1 \varphi e_1 + \zeta_2 \varphi e_2 + \ldots + \zeta_n \varphi e_n.$$

Так как базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормирован, то по теореме 25

$$(x, \lambda) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2.$$

Так как базис $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ по условию также ортонормирован, то

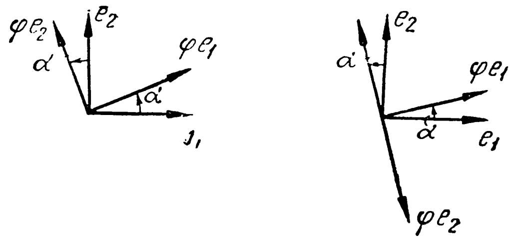
$$(\varphi x, \varphi x) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \ldots + \zeta_n^2.$$

Мы получили, что для любого вектора $x \in E_n$ $(\varphi x, \varphi x) = (x, x)$. Это означает, что преобразование φ ортогонально.

Теорема 28 может быть принята в качестве нового определения ортогонального преобразования как преобразования, которое переводит ортонормированный базис снова в ортонормированный.

На чертеже 6 показано ортогональное преобразование пространства V_2.

Левый чертеж показывает, что преобразование φ есть вращение плоскости на угол α вокруг точки O; правый чертеж иллюстрирует



Черт. 6

другой случай, когда φ есть вращение на угол α с последующим отражением.

Смысл теоремы 28 состоит, следовательно, в том, что понятие ортогонального преобразования пространства E_n есть обобщение на евклидово пространство E_n вращения обычного пространства при неподвижном начале координат или вращения, соединенного с отражением относительно какой-либо плоскости, проходящей через начало координат.

Следующая теорема дает матричное описание ортогонального преобразования.

Теорема 29. 1) Если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n ортогонально, то его матрица в любом ортонормированном базисе ортогональна.

2) Обратно, если линейное преобразование φ евклидова пространства E_n хотя бы в одном ортонормированном базисе имеет ортогональную матрицу, то это преобразование φ ортогонально.

Доказательство. 1) Пусть линейное преобразование φ ортогонально и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис E_n. Положим:

$$\left.\begin{aligned} \varphi e_1 &= q_{11}e_1 + q_{21}e_2 + \ldots + q_{n1}e_n, \\ \varphi e_2 &= q_{12}e_1 + q_{22}e_2 + \ldots + q_{n2}e_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi e_n &= q_{1n}e_1 + q_{2n}e_2 + \ldots + q_{nn}e_n. \end{aligned}\right\}$$

Тогда матрицей преобразования φ является

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как по условию φ ортогонально, то векторы-образы φe_1, $\varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ составляют ортонормированный базис (теорема 28).

Таким образом, матрица Q является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ к другому ортонормированному базису $\varphi e_1, \ldots, \varphi e_n$. Согласно § 27 матрица Q ортогональна.

2) Пусть линейное преобразование φ в ортонормированном базисе $\{e\}$ задано ортогональной матрицей Q. Так как по условию базис $\{e\}$ ортонормирован, то, пользуясь соотношениями (5) и учитывая ортогональность матрицы Q, находим, что

$$(\varphi e_i, \varphi e_i) = q_{1i}^2 + q_{2i}^2 + \ldots + q_{ni}^2 = 1,$$

$$(\varphi e_i, \varphi e_k) = q_{1i}q_{1k} + q_{2i}q_{2k} + \ldots + q_{ni}q_{nk} = 0, \quad i \neq k.$$

Следовательно, векторы-образы $\varphi e_1, \varphi e_2, \ldots, \varphi e_n$ ортонормированы. Ортогональность преобразования φ следует тогда из второй части теоремы 28.

Из теоремы 29 следует, что произведение ортогональных преобразований есть снова ортогональное преобразование. А так как тождественное преобразование ортогонально и преобразование, обратное ортогональному, тоже ортогонально (см. пример 3, § 27), то ортогональные преобразования образуют группу. Она является подгруппой группы всех невырожденных преобразований пространства E_n.

§29. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Мы рассмотрели ортогональные преобразования евклидова пространства. Другой важный класс преобразований евклидовых пространств образуют так называемые симметрические преобразования.

Определение 35. Линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n называется симметрическим, если для любых двух векторов x и y из E_n имеет место равенство скалярных произведений:

$$(\psi x, y) = (x, \psi y). \tag{1}$$

Следующая теорема аналогична теореме 29, она дает матричную характеристику симметрических преобразований.

Теорема 30. 1) Если линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n является симметрическим, то его матрица в любом ортонормированном базисе есть матрица симметрическая.

2) Если линейное преобразование ψ евклидова пространства E_n хотя бы в одном ортонормированном базисе имеет симметрическую матрицу, то это преобразование симметрическое.

Доказательство. 1) Пусть ψ есть симметрическое преобразование пространства E_n, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис этого пространства и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

является матрицей преобразования ψ, так что

$$\left.\begin{aligned} \psi e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ \psi e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi e_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как по условию $\{e\}$— ортонормированный базис, то

$$(\psi e_i, e_k) = (a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ki}e_k + \dots + a_{ni}e_n, e_k) = a_{ki},$$

$$(e_i, \psi e_k) = (e_i, a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \dots + a_{ik}e_i + \dots + a_{nk}e_n) = a_{ik}.$$

Но по определению $(\psi e_i, e_k) = (e_i, \psi e_k)$, следовательно, $a_{ki} = a_{ik}$, т. е. матрица A симметрическая.

2) Пусть линейное преобразование ψ в ортонормированном базисе $\{e\}$ задано симметрической матрицей A, так что имеют место соотношения (2), где $a_{ki} = a_{ik}$. Надо доказать, что для любых векторов x, y, $\in E_n$ будет $(\psi x, y) = (x, \psi y)$.

Пусть x и y — произвольные векторы из E_n:

$$\begin{aligned} x &= \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \dots + \zeta_n e_n, \\ y &= \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \dots + \eta_n e_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi x = \zeta_1\psi e_1 + \zeta_2\psi e_2 + \dots + \zeta_n \psi e_n = {} & (\zeta_1 a_{11} + \zeta_2 a_{12} + \dots + \zeta_n a_{1n})e_1 + \\ & + (\zeta_1 a_{21} + \zeta_2 a_{22} + \dots + \zeta_n a_{2n})e_2 + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (\zeta_1 a_{n1} + \zeta_2 a_{n2} + \dots + \zeta_n a_{nn})e_n. \\ \psi y = \eta_1\psi e_1 + \eta_2\psi e_2 + \dots + \eta_n \psi e_n = {} & (\eta_1 a_{11} + \eta_2 a_{12} + \dots + \eta_n a_{1n})e_1 + \\ & + (\eta_1 a_{21} + \eta_2 a_{22} + \dots + \eta_n a_{2n})e_2 + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (\eta_1 a_{n1} + \eta_2 a_{n2} + \dots + \eta_n a_{nn})e_n. \end{aligned}$$

Отсюда, используя ортонормированность базиса $\{e\}$ и учитывая, что $a_{ki} = a_{ik}$, получаем $(\psi x, y) = (x, \psi y)$.

Теорема 30 позволяет дать новое определение симметрического преобразования, эквивалентное определению 35: симметрическим преобразованием называется такое линейное преобразование, матрица которого хотя бы в одном ортонормированном базисе является симметрической.

Теорема 31. Симметрическое преобразование евклидова пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

В самом деле, пусть ψ — симметрическое преобразование пространства E_n. Тогда по теореме 30 в любом ортонормированном базисе оно задается симметрической матрицей A и, следовательно, по теореме 22 все собственные значения преобразования ψ вещественны. Пусть λ_0 — одно из собственных значений преобразования ψ. Тогда $\Delta(\lambda_0) = |A - \lambda_0 E| = 0$, а потому однородная система уравнений $(A - \lambda_0 E)X = \theta$ имеет хотя бы одно ненулевое решение, которое и является координатным столбцом собственного вектора преобразования ψ.

Для вещественной симметрической матрицы A, соответствующей симметрическому преобразованию ψ пространства E_n, уравнение $|A - \lambda E| = 0$ n-й степени относительно λ имеет, как известно, только вещественные корни. Если бы все эти корни были различны, то по свойству 2 собственных векторов (§ 18) преобразование ψ имело бы n собственных векторов, составляющих базис пространства E_n. Однако в случае наличия кратных корней уравнения $|A - \lambda E| = 0$ вопрос о числе линейно независимых собственных векторов преобразования ψ требует специального рассмотрения.

Теорема 32. 1) Для любого симметрического преобразования ψ евклидова пространства E_n можно указать n собственных векторов, составляющих ортонормированный базис пространства E_n.

2) Обратно, если линейное преобразование ψ пространства E_n имеет n собственных векторов, составляющих ортонормированный базис пространства E_n, то преобразование ψ симметрическое.

Доказательство. 1) Применим индукцию по размерности пространства E_n. При $n = 1$ утверждение верно в силу теоремы 31. Предположим, что теорема верна для пространства размерности $n - 1$.

По теореме 31 симметрическое преобразование ψ пространства E_n имеет хотя бы один собственный вектор, который, не теряя общности, можно считать нормированным. Обозначим его через e_n. Совокупность E_{n-1} всех векторов пространства E_n, ортогональных вектору e_n, есть подпространство размерности $n - 1$ (см. § 25). Пусть x — произвольный вектор из E_{n-1}, так что

$$(x, e_n) = 0.$$

Тогда в силу симметричности преобразования ψ имеем:

$$(\psi x, e_n) = (x, \psi e_n) = (x, \lambda_n e_n) = \lambda_n (x, e_n) = \lambda_n \cdot 0 = 0.$$

Значит, из $x \in E_{n-1}$ следует, что $\psi x \in E_{n-1}$, т. е. подпространство E_{n-1} инвариантно относительно преобразования ψ.

Если действовать преобразованием ψ только на векторы из E_n, то получим новое преобразование ψ_1, определенное на E_{n-1}. Оно линейно, так как линейно преобразование ψ на E_n, и симметрично, так как равенство (1) выполняется для всех векторов из E_n, в том числе и для векторов, принадлежащих E_{n-1}.

По индуктивному предположению симметрическое преобразование ψ_1 пространства E_{n-1} имеет $n-1$ собственных векторов e_1, $e_2, \ldots, e_{n-1}$, составляющих ортонормированный базис пространства E_{n-1}. Так как $e_n \perp E_{n-1}$, то собственные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n$ попарно ортогональны и потому составляют ортонормированный базис пространства E_n.

2) Пусть ортонормированный базис пространства E_n состоит из собственных векторов e_1, e_2, ..., e_n преобразования ψ, так что

$$\begin{aligned} \psi e_1 &= \lambda_1 e_1, \\ \psi e_2 &= \quad \lambda_2 e_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \psi e_n &= \qquad \lambda_n e_n. \end{aligned}$$

Тогда матрица преобразования ψ

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

очевидно, симметрична; по теореме 30 (часть 2) преобразование ψ будет симметрическим.

Следствие. Пусть ψ — линейное преобразование пространства E_n с вещественной симметрической матрицей A. Тогда каждому корню λ кратности m характеристического многочлена преобразования ψ соответствует ровно m линейно независимых собственных векторов (т. е. размерность пространства $R^{(\lambda)}$ собственных векторов, отвечающих значению λ, равна m).

В самом деле, пусть λ_1, λ_2, ..., λ_k — попарно различные корни характеристического многочлена и m_1, m_2, ..., m_k — соответственно кратности этих корней, так что

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

По теореме 21

$$\dim R^{(\lambda_1)} \leqslant m_1, \quad \dim R^{(\lambda_2)} \leqslant m_2, \; \ldots, \; \dim R^{(\lambda_k)} \leqslant m_k. \qquad (3)$$

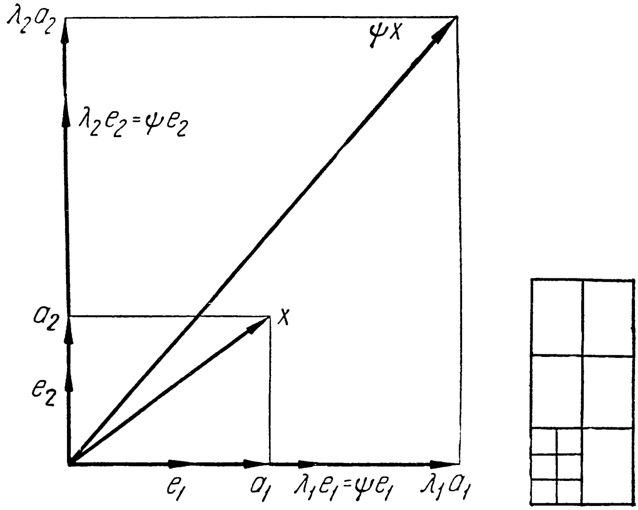
Кроме того, по теореме 32

$$\dim R^{(\lambda_1)} + \dim R^{(\lambda_2)} + \ldots + \dim R^{(\lambda_k)} = n. \qquad (4)$$

Если хотя бы в одном из соотношений (3) имел место знак $<$, то было бы:

$$\dim R^{(\lambda_1)} + \dim R^{(\lambda_2)} + \ldots + \dim R^{(\lambda_k)} < m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n,$$

что противоречит соотношению (4). Значит, $\dim R^{(\lambda_i)} = m_i$, и теорема доказана.



Черт. 7

Геометрическая иллюстрация содержания теоремы 32 дается на чертеже 7, где рассматриваемое пространство есть пространство V_2 векторов плоскости, исходящих из некоторой точки O. Так как $\dim V_2 = 2$, то любое симметрическое преобразование ψ пространства V_2 по теореме 32 имеет ровно два взаимно перпендикулярных нормированных собственных вектора e_1 и e_2:

$$\psi e_1 = \lambda_1 e_1, \quad \psi e_2 = \lambda_2 e_2.$$

Собственные значения λ_1 и λ_2 могут быть равными или различными (мы взяли $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$). Найдем образ ψx произвольного вектора $x \in V_2$. Пусть

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 = a_1 + a_2,$$

где через a_1 и a_2 обозначены составляющие вектора x по e_1 и e_2. Тогда

$$\psi x = \zeta_1 \psi e_1 + \zeta_2 \psi e_2 = \zeta_1 \lambda_1 e_1 + \zeta_2 \lambda_2 e_2 = \lambda_1 (\zeta_1 e_1) + \lambda_2 (\zeta_2 e_2) =$$
$$= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2.$$

Таким образом, первая составляющая вектора x умножается на λ_1, вторая умножается на λ_2 (левый чертеж).

Значит, симметрическое преобразование сводится к растяжению или сжатию плоскости в двух взаимно перпендикулярных направлениях e_1 и e_2 — в направлениях собственных векторов. Собственные значения λ_1 и λ_2 при этом являются коэффициентами соответствующих растяжений (при отрицательном λ растяжение сопровождается еще изменением направления на противоположное). Квадратная сетка перейдет в прямоугольную сетку (чертеж справа).

Аналогично симметрическое преобразование пространства V_3 сводится к растяжению пространства в трех взаимно перпендикулярных направлениях e_1, e_2, e_3 с возможным изменением каких-либо из этих направлений на противоположные.

§ 30. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА СИММЕТРИЧЕСКОЕ

В предыдущих параграфах были подробно рассмотрены ортогональные и симметрические преобразования евклидова пространства. Интерес, который представляет изучение этих преобразований, обусловлен не только их самостоятельной ценностью, но и той важной ролью, которую они играют в исследовании линейных преобразований самого общего вида.

Введем понятие преобразования ω^*, сопряженного данному линейному преобразованию ω пространства E_n; по определению если в некотором ортонормированном базисе $\{e\}$ преобразование ω задано матрицей A, то преобразование ω^* задается в том же базисе $\{e\}$ транспонированной матрицей A'. Указанная связь между матрицами преобразований ω и ω^* сохранится и после перехода к новому ортонормированному базису $\{e'\}$, так как матрица A перейдет при этом в матрицу $Q^{-1}AQ = Q'AQ$, а матрица A' — в матрицу $Q^{-1}A'Q = Q'A'Q = (Q'AQ)'$. (Здесь Q — матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, являющаяся, как известно из § 27, ортогональной матрицей, так что $Q^{-1} = Q'$.)

Пусть

$$\begin{aligned}
\omega e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n,\\
\omega e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega e_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n,\\
\omega^* e_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n,\\
\omega^* e_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega^* e_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n,
\end{aligned}$$

так что матрицей преобразования ω является

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два произвольных вектора x и y из E_n:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n, \quad y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n.$$

Непосредственные вычисления (выполнение которых предлагаем в качестве упражнения) показывают, что для преобразований ω и ω^* будет иметь место следующее равенство скалярных произведений:

$$(\omega x,\ y) = (x, \omega^* y), \tag{1}$$

где x и y — произвольные векторы из E_n.

Из теоремы 30 следует, что симметрическое преобразование совпадает со своим сопряженным (поэтому симметрические преобразования называют самосопряженными). Из определения 34 и теоремы 29 следует, что преобразование φ будет ортогональным тогда и только тогда, когда его обратное преобразование φ^{-1} совпадает с сопряженным, т. е. когда $\varphi^*\varphi = \varepsilon$ (докажите это в качестве упражнения).

Пусть ω — произвольное невырожденное линейное преобразование пространства E_n, A — матрица этого преобразования в некотором ортонормированном базисе $\{e\}$. Рассмотрим сопряженное преобразование ω^*. Его матрицей в том же базисе является A'. Преобразованию $\psi_0 = \omega^*\omega$ соответствует в том же базисе согласно § 15 матрица $A'A$. Так как $(A'A)' = A'A'' = A'A$, то получаем, что преобразование $\psi_0 = \omega^*\omega$ является симметрическим. Если e_0 — нормированный собственный вектор преобразования ψ_0 с собственным значением λ_0, то $\psi_0 e_0 = \lambda_0 e_0$ и

$$(e_0,\ \psi_0 e_0) = (e_0,\ \lambda_0 e_0) = \lambda_0 (e_0,\ e_0) = \lambda_0.$$

С другой стороны, в силу (1) имеем:

$$(e_0,\ \psi_0 e_0) = (e_0,\ \omega^*(\omega e_0)) = (\omega e_0,\ \omega e_0) \geqslant 0.$$

Мы получили, что $\lambda_0 \geqslant 0$, т. е. собственные значения симметрического преобразования $\psi_0 = \omega^*\omega$ неотрицательны (такие симметрические преобразования называются положительно определенными). По теореме 32 преобразование ψ_0 имеет n попарно ортогональных собственных векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ и в базисе, составленном из этих векторов, его матрицей будет

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ неотрицательны. Рассмотрим наряду с B вещественную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование ψ с матрицей C в базисе $\{e'\}$ будет симметрическим, причем $\psi^2 = \psi_0$, так как в матрицах $C^2 = B$. Заметим, что преобразование $\psi_0 = \omega^*\omega$ является невырожденным, так как $|A'A| = |A'| \cdot |A|$, причем $|A'| = |A| \neq 0$ ввиду невырожденности ω. Из $\psi^2 = \psi_0$ следует невырожденность преобразования ψ и существование преобразования ψ^{-1}, обратного для ψ. Отсюда

$$\omega = \omega\varepsilon = \omega(\psi^{-1}\psi) = (\omega\psi^{-1})\,\psi = \varphi \cdot \psi. \tag{2}$$

Преобразование $\varphi = \omega\psi^{-1}$ ортогонально. В самом деле, $(\omega_1\omega_2)^* = \omega_2^*\omega_1^*$, ибо для соответствующих матриц, как известно, $(A_1A_2)' = A_2'A_1'$. Преобразование ψ симметрическое, а потому $(\psi^{-1})^* = \psi^{-1}$. Тогда ортогональность преобразования φ следует из того, что

$$\varphi^*\varphi = (\omega\psi^{-1})^*\omega\psi^{-1} = (\psi^{-1})^*\omega^*\omega\psi^{-1} = \psi^{-1}\omega^*\omega\psi^{-1} = \psi^{-1}\psi^2\psi^{-1} = \varepsilon.$$

Полученное представление (2) доказывает следующую теорему.

Теорема 33. Всякое невырожденное линейное преобразование пространства E_n можно представить в виде произведения ортогонального преобразования на симметрическое.

Теорема 33 на языке матриц формулируется так: всякую невырожденную вещественную матрицу можно представить в виде произведения ортогональной матрицы на симметрическую.

Для примера рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Преобразование $\psi_0 = \omega^*\omega$ имеет матрицу

$$A_0 = A'A = \begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A_0 - \lambda E| = (\lambda - 2)(\lambda - 32)$, то $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 32$.

Преобразование ψ имеет матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{32} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ отсюда } C^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование φ имеет матрицу

$$Q = A \cdot C^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомое представление:

$$A = Q \cdot C.$$

Упражнения

[7], № 1598—1600.

§ 31. ТЕОРЕМА О ТРАНСФОРМИРОВАНИИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ В ДИАГОНАЛЬНУЮ МАТРИЦУ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНОЙ

Теорема 34. Для всякой вещественной симметрической матрицы A можно найти такую ортогональную матрицу Q, что матрица $Q^{-1}AQ$ будет диагональной.

Другими словами, любую вещественную симметрическую матрицу A можно трансформировать в диагональную с помощью некоторой ортогональной матрицы Q.

Доказательство. Пусть A — симметрическая вещественная матрица порядка n. По теореме 30 (часть 2) в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства E_n матрица A задает линейное симметрическое преобразование ψ. По теореме 32 в пространстве E_n существует ортонормированный базис e'_1, $e'_2, \ldots, e'_n$, составленный из собственных векторов преобразования ψ, так что

$$\begin{aligned} \psi e'_1 &= \lambda_1 e'_1, \\ \psi e'_2 &= \lambda_2 e'_2, \\ &\ldots\ldots \\ \psi e'_n &= \lambda_n e'_n, \end{aligned}$$

где λ_i — вещественные числа. В базисе $\{e'\}$ преобразование ψ задается диагональной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 12 (§ 14)

$$B = Q^{-1}AQ,$$

где Q — матрица перехода от одного ортонормированного базиса $\{e\}$ к другому $\{e'\}$, а потому согласно § 27 она является ортогональной. Теорема доказана.

Пример. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти ортогональную матрицу Q, трансформирующую A в диагональную матрицу.

Решение. Собственные значения преобразования ψ, заданного в некотором ортонормированном базисе $\overset{\circ}{e}_1, \overset{\circ}{e}_2, \overset{\circ}{e}_3, \overset{\circ}{e}_4$ данной симметрической матрицей A, были найдены ранее (в § 21):

$\lambda_1 = 2$ кратности 3 и $\lambda_2 = -2$ кратности 1. Там же были найдены попарно ортогональные собственные векторы симметрического преобразования ψ:

$$\begin{array}{llrrrr}
\text{для } \lambda_1 = 2, & e_1 = (& 1, & 1, & 0, & 0), \\
 & e_2 = (& 0, & 0, & 1, & -1), \\
 & e_3 = (& 1, & -1, & 1, & 1), \\
\text{для } \lambda_2 = -2, & e_4 = (& -1, & 1, & 1, & 1).
\end{array}$$

Нормируя эти векторы, получаем ортонормированный базис пространства $\overset{\circ}{T}_4$ из собственных векторов преобразования ψ:

$$\left.\begin{aligned}
e_1' &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0, \quad 0\right), \\
e_2' &= \left(0, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\
e_3' &= \left(\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right), \\
e_4' &= \left(-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Тогда $\psi e_1' = 2e_1'$, $\psi e_2' = 2e_2'$, $\psi e_3' = 2e_3'$, $\psi e_4' = -2e_4'$,

и, значит, в базисе $\{e'\}$ линейное преобразование ψ будет иметь матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как (1) есть координатная запись векторов e_1', e_2', e_3', e_4' в базисе $\overset{\circ}{e}_1$, $\overset{\circ}{e}_2$, $\overset{\circ}{e}_3$, $\overset{\circ}{e}_4$, то матрицей перехода от базиса $\{e^\circ\}$ к базису $\{e'\}$ является

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 12 $B = Q^{-1}AQ$, поэтому матрицы B и Q искомые.

Упражнение

Решите задачу, аналогичную рассмотренной выше, для матриц, приведенных в конце § 21.

Глава IV

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 32. ПОНЯТИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Определение 36. Вещественной *квадратичной формой* от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется однородный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ второй степени с вещественными коэффициентами* от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ есть квадратичная форма от переменных x_1, x_2, x_3.

Согласно определению каждый член квадратичной формы содержит или квадрат одного из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или произведение двух разных переменных.

Для квадратичных форм используется специальная запись. Пусть в квадратичной форме $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уже выполнено приведение подобных членов. Тогда коэффициент при x_i^2 обозначают через a_{ii}, а коэффициент при x_ix_j, где $i \neq j$, — через $2a_{ij}$ и пишут

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i,$$

так что

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{1}$$

С учетом этого соглашения квадратичная форма запишется в общем виде следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, что всякая квадратичная форма от n переменных может быть единственным образом приведена к такому виду. Квадратичной форме, записанной в виде (2), соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

* Некоторые выводы этой главы будут справедливы и для квадратичных форм с коэффициентами из других числовых полей. Однако мы будем рассматривать только вещественные квадратичные формы.

которая называется *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_n)$. Согласно условию (1) матрица квадратичной формы f есть матрица симметрическая, так что $A' = A$. Очевидно, что каждой симметрической матрице A n-го порядка соответствует вполне определенная квадратичная форма f от n переменных.

Пример. Для квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

запись (2) будет иметь вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_1 + 3x_2^2 - \frac{3}{2}x_2x_3 + 2x_3x_1 - \\ - \frac{3}{2}x_3x_2 + 4x_3^2.$$

Матрицей данной квадратичной формы является

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A квадратичной формы f называется *рангом самой квадратичной формы* f. Если ранг $A = n$, то матрица A невырожденная; квадратичная форма с такой матрицей называется также *невырожденной*.

Пользуясь правилом умножения матриц, квадратичную форму (2) можно записать в матричном виде:

$$f = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \\ + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) =$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \left[\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \right] = X'AX.$$

Итак,
$$f = X'AX, \tag{3}$$
где
$$X' = (x_1, x_2, \dots, x_n), \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Упражнения

Записать в форме (2) и найти матрицы квадратичных форм № 1180—1186 из [7].

§ 33. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Пусть в пространстве E_n задано линейное преобразование φ, матрица которого в некотором фиксированном базисе есть

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \cdots q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} \cdots q_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} \cdots q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Под действием преобразования φ каждый вектор y с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в данном базисе переходит в другой вектор x с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом согласно § 12 имеем:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1n}y_n, \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \ldots + q_{2n}y_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \ldots + q_{nn}y_n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

или, в матричной записи,

$$X = QY,$$

где X и Y — матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Имея в виду формулы (1), говорят, что преобразование φ осуществляет линейное преобразование переменных с матрицей Q (переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ преобразуются в переменные $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$ по формулам (1)).

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма. Если в выражении для f заменить переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их выражениями через $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам (1), то получим некоторую квадратичную форму $\tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Выясним, как связаны матрицы квадратичных форм f и $\tilde{f}$, другими словами, как изменяется матрица квадратичной формы f, если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подвергаются линейному преобразованию (1).

Теорема 35. Если в квадратичной форме f с матрицей A выполнено линейное преобразование переменных с матрицей Q, то полученная квадратичная форма $\tilde{f}$ будет иметь матрицу $Q'AQ$, где матрица Q' получается транспонированием Q.

Доказательство. Пусть

$$f = X'AX \quad \text{и} \quad X = QY.$$

Тогда

$$\tilde{f} = (QY)'A(QY) = Y'Q'AQY = Y'(Q'AQ)Y = Y'BY,$$

где матрица

$$B = Q'AQ$$

симметрическая, так как

$$B' = (Q'AQ)' = Q'A'Q'' = Q'AQ = B.$$

Итак, в новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ получили квадратичную форму

$$\tilde{f} = Y'BY$$

с матрицей $B = Q'AQ$.

Пример. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Выполним преобразование переменных

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - 9y_3, \\ x_2 &= \phantom{y_1 +{}} 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 &= \phantom{y_1 + 2y_2 +{}} 10y_3, \end{aligned}\right\}$$

матрицей которого является

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тогда новая квадратичная форма будет иметь матрицу

$$B = Q'AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 190 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате замены переменных получаем квадратичную форму

$$\tilde{f}(y_1, y_2, y_3) = Y'BY = 2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2.$$

Если для переменных $x_1, \ldots, x_n$ выполнить другое линейное преобразование, например,

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + 2z_2 + 2z_3, \\ x_2 &= \phantom{z_1 + {}} 4z_2 + 2z_3, \\ x_3 &= \phantom{z_1 + 2z_2 + {}} 6z_3, \end{aligned}$$

то получим квадратичную форму

$$2z_1^2 + 40z_2^2 + 168z_3^2 + 28z_1z_3 + 16z_2z_3.$$

Теорема 36. Ранг квадратичной формы не меняется в результате выполнения невырожденного линейного преобразования переменных.

Доказательство. Согласно теореме 35

$$B = Q'AQ,$$

где A — матрица данной квадратичной формы f, Q — матрица линейного преобразования переменных, B — матрица полученной квадратичной формы $\tilde{f}$. По условию матрица Q невырожденная. Как известно, в результате умножения произвольной матрицы A справа или слева на невырожденную матрицу Q получается матрица, ранг которой равен рангу матрицы A. Отсюда получаем, что

$$\text{ранг } B = \text{ранг } A \quad \text{или} \quad \text{ранг } f = \text{ранг } \tilde{f}.$$

Определение 37. Квадратичная форма вида

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_ny_n^2,$$

не содержащая членов с произведениями различных переменных (т. е. имеющая диагональную матрицу), называется *квадратичной формой канонического* (или диагонального) *вида.*

Теорема 37. Число отличных от нуля коэффициентов в каноническом виде

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_ny_n^2$$

квадратичной формы f равно ее рангу.

В самом деле, пусть квадратичная форма f от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с матрицей A невырожденным линейным преобразованием уже приведена к каноническому виду

$$b_1y_1^2 + b_2y_2 + \ldots + b_ny_n^2,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — новые переменные. Матрицей B квадратичной формы канонического вида является

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_2 \ldots 0 \\ . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 \ldots b_n \end{pmatrix}.$$

По теореме 36 ранг f = ранг A = ранг B. А так как матрица B диагональна, то ее ранг равен числу ее отличных от нуля диагональных элементов. Теорема доказана.

Если ранг $B = r$ и отличные от нуля r элементов матрицы B окажутся первыми, то канонический вид квадратичной формы f будет таким:

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_ry_r^2 .$$

§ 34. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Существует довольно простой метод (метод Лагранжа) приведения квадратичной формы к каноническому виду. Этот метод, однако, во многих задачах не дает нужного результата. Например, в задачах аналитической геометрии часто требуется привести общее уравнение кривой или поверхности второго порядка к каноническому виду, причем такое приведение требуется осуществить с помощью весьма специального преобразования переменных (а именно ортогонального); метод Лагранжа не всегда обеспечивает это условие. В связи с этим мы укажем способ, основанный на отыскании собственных значений матрицы квадратичной формы.

Теорема 38. Всякая квадратичная форма с матрицей A может быть приведена к каноническому виду

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

при помощи преобразования переменных с ортогональной матрицей. При этом коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ канонического вида являются корнями характеристического многочлена матрицы A, каждый из которых взят столько раз, какова его кратность.

Доказательство. Пусть дана вещественная квадратичная форма f с матрицей A. По теореме 35 квадратичная форма после выполнения линейного преобразования переменных с матрицей Q будет иметь матрицу

$$Q'AQ.$$

Отсюда следует, что задача приведения квадратичной формы к каноническому виду равносильна задаче приведения симметрической матрицы A к диагональному виду путем умножения ее слева и справа соответственно на взаимно транспонированные матрицы Q' и Q.

Воспользуемся теоремой 34, утверждающей, что для всякой симметрической матрицы A существует ортогональная матрица Q, такая, что матрица

$$B = Q^{-1} AQ$$

диагональна. Легко видеть, что матрица Q решает поставленную задачу, так как вследствие ее ортогональности имеем $Q^{-1} = Q'$ и потому

$$B = Q'AQ.$$

Заметим попутно, что (как видно из доказательства теоремы 34) диагональные элементы матрицы B суть корни характеристического многочлена матрицы A, каждый из которых взят столько раз, какова его кратность. Теорема доказана.

Канонический вид формы f можно найти, таким образом, и не находя самого ортогонального преобразования переменных, а зная лишь собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, определяемые матрицей A.

Это положение подтверждает важность понятия собственного значения.

Пример. Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма

$$f = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования.

Решение. Находим корни характеристического многочлена матрицы A данной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda - 4)^2 (\lambda + 2),$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = -2.$$

Искомый канонический вид:

$$4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 .$$

Упражнения

[7], № 1244—1246.

§ 35. НАХОЖДЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРИВОДЯЩЕГО ВЕЩЕСТВЕННУЮ КВАДРАТИЧНУЮ ФОРМУ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Исходя из доказательства теоремы 38, можно указать практическую схему для отыскания ортогонального преобразования переменных, в результате которого квадратичная форма принимает канонический вид, или, что то же, ее матрица заменяется на диагональную.

1-й шаг. Для данной квадратичной формы строим ее симметрическую матрицу A.

2-й шаг. Составляем характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = |A - \lambda E|$ и находим его корни. (В силу теоремы 22 все n корней этого многочлена вещественны, но не обязательно различны.) Обозначим корни характеристического многочлена через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

3-й шаг. Зная корни характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$, можно написать канонический вид данной квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 .$$

4-й шаг. Для каждого корня λ_i кратности m_i составляем однородную систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_i)\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n = 0, \\ a_{21}\zeta_1 + (a_{22} - \lambda_i)\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)\zeta_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где a_{jl} — элементы матрицы A.

5-й шаг. Для каждого λ_i кратности m_i находим какую-нибудь одну ортонормированную систему из m_i векторов, являющихся решениями системы (1). Индекс i меняется от 1 до k, где k есть число различных корней характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$. Согласно теореме 32 получим n попарно ортогональных нормированных векторов:

$$\begin{array}{l} e_1' = (q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{n1}), \\ e_2' = (q_{12}, q_{22}, \ldots, q_{n2}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' = (q_{1n}, q_{2n}, \ldots, q_{nn}). \end{array}$$

(Порядок следования векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ соответствует порядку λ_i в каноническом виде.)

6-й шаг. Составляем матрицу Q, столбцами которой являются координаты векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \cdots q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} \cdots q_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} \cdots q_{nn} \end{pmatrix}.$$

7-й шаг. Записываем искомое ортогональное преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + \ldots + q_{1n}y_n, \\ x_2 &= q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + \ldots + q_{2n}y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + \ldots + q_{nn}y_n, \end{aligned}\right\}$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}.$$

8-й шаг. Если требуется выразить новые переменные $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$ через старые $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то, учитывая, что $Q^{-1} = Q'$, получаем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = Q' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Замечание. В случае правильности полученного результата должно быть $B = Q'AQ$, где B — диагональная матрица, отвечающая форме $\tilde{f}$. Отметим еще, что в связи с неоднозначностью отыскания фундаментальной системы решений однородной линейной системы (5-й шаг) ортогональное преобразование переменных будет находиться также неоднозначно.

Пример. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$f = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

к каноническому виду.

Решение.

1-й шаг.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

2-й шаг.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & -1 \\ 4 & -7-\lambda & 4 \\ -1 & 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-9)^2(\lambda+9).$$

$$\lambda_1 = 9, \quad m_1 = 2; \quad \lambda_2 = -9, \quad m_2 = 1.$$

3-й шаг.

$$\tilde{f} = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2.$$

4-й шаг. Система (1) для $\lambda_1 = 9$:

$$\left.\begin{aligned} -\zeta_1 + 4\zeta_2 - \zeta_3 &= 0, \\ 4\zeta_1 - 16\zeta_2 + 4\zeta_3 &= 0, \\ -\zeta_1 + 4\zeta_2 - \zeta_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Система (1) для $\lambda_2 = -9$

$$\left.\begin{aligned} 17\zeta_1 + 4\zeta_2 - \zeta_3 &= 0, \\ 4\zeta_1 + 2\zeta_2 + 4\zeta_3 &= 0, \\ -\zeta_1 + 4\zeta_2 + 17\zeta_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

5-й шаг. Для $\lambda_1 = 9$ система (1) сводится к уравнению

$$-\zeta_1 + 4\zeta_2 - \zeta_3 = 0.$$

Отсюда $e_1 = (-1, 0, 1)$. Для отыскания $e_2 = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ добавляем условие $e_2 \perp e_1$, т. е. $(e_2, e_1) = 0$. В итоге получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} -\zeta_1 + 4\zeta_2 - \zeta_3 &= 0, \\ -\zeta_1 \qquad + \zeta_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $e_2 = (2, 1, 2)$.

Для $\lambda_2 = -9$ находим $e_3 = (1, -4, 1)$.

Нормируя систему векторов e_1, e_2, e_3, получим:

$$e_1' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$e_2' = \left(\frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}\right),$$

$$e_3' = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \quad -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \frac{\sqrt{2}}{6}\right).$$

6-й шаг.

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

7-й шаг.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3, \\ x_2 &= \phantom{-\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 +{}} \frac{1}{3}y_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}y_3, \\ x_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_3. \end{aligned}\right\}$$

Упражнения

[7] , № 1248—1262;
[10], № 951.

§ 36. МЕТОД ЛАГРАНЖА ПРИВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Элементарным способом приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод Лагранжа. Рассмотрим его сначала на примерах.

Примеры. 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Решение. Объединяя в одну группу все члены, содержащие x_1, и дополняя сумму $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$ до полного квадрата, получаем:

$$f = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_2x_3 +$$
$$+ 2x_2x_3 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - x_2x_3.$$

Далее объединяем в одну группу все члены, содержащие x_2:

$$f = 2y_1^2 + \frac{5}{2}\left(x_2^2 - \frac{2}{5}x_2x_3\right) + 2x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}\left(x_2 - \frac{1}{5}x_3\right)^2 +$$
$$+ 2x_3^2 - \frac{1}{10}x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{19}{10}x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 + \frac{19}{10}y_3^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3, \\ y_2 &= \phantom{x_1 - {}} x_2 - \frac{1}{5}x_3, \\ y_3 &= \phantom{x_1 - \frac{1}{2}x_2 + {}} x_3. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \frac{1}{2} y_2 - \frac{9}{10} y_3, \\ x_2 &= \qquad\ \ y_2 + \frac{1}{5} y_3, \\ x_3 &= \qquad\qquad\quad\ y_3. \end{aligned}\right\}$$

Можно было бы потребовать, чтобы искомая каноническая форма была с целыми коэффициентами. Тогда

$$\begin{aligned} f &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2} x_2 + x_3\right)^2 + 10\left(\frac{1}{4} x_2^2 - \frac{1}{10} x_2 x_3\right) + 2x_3^2 = \\ &= 2y_1^2 + 10\left(\frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{10} x_3\right)^2 + 2x_3^2 - \frac{1}{10} x_3^2 = \\ &= 2y_1^2 + 10y_2^2 - \frac{19}{10} x_3^2 = \\ &= 2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2, \end{aligned}$$

где

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \frac{1}{2} x_2 + x_3, \\ y_2 &= \quad\ \ \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{10} x_3, \\ y_3 &= \qquad\qquad\ \ \frac{1}{10} x_3, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - 9y_3, \\ x_2 &= \quad\ 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 &= \qquad\quad\ \ 10y_3. \end{aligned}\right\}$$

2. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_4^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 - 2x_2 x_3 + 2x_2 x_4.$$

Отличие этого примера от первого состоит в том, что здесь коэффициент a_{11} при x_1^2 равен нулю, однако $a_{44} = 2 \neq 0$. Этот случай можно свести к случаю, рассмотренному в примере 1, изменив нумерацию переменных следующим образом: x_4 меняем на y_1, x_1 — на y_4, остальные номера без изменения, т. е. x_2 и x_3 меняем на y_2 и y_3. В итоге мы применили линейное преобразование:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \qquad\quad y_4, \\ x_2 &= \ \ y_2, \\ x_3 &= \quad\ y_3, \\ x_4 &= y_1 \end{aligned}\right\}$$

и получили форму:

$$\tilde{f} = 2y_1^2 + y_2 y_4 + y_3 y_4 - 2y_2 y_3 + 2y_1 y_2.$$

Дальше поступаем так же, как в примере 1.

3. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Этот пример отличается от первых двух тем, что здесь все $a_{ii} = 0$.

Сначала делаем вспомогательное преобразование переменных для того, чтобы получить квадрат какого-нибудь переменного с ненулевым коэффициентом. У нас $a_{12} \neq 0$. Тогда все x_k, кроме x_2, меняем на y_k и полагаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_1 + y_2, \\ x_3 &= \qquad\quad y_3. \end{aligned}\right\}$$

Получаем:

$$\tilde{f} = y_1(y_1 + y_2) + y_1y_3 + (y_1 + y_2)\,y_3 = y_1^2 + y_1y_2 + 2y_1y_3 + y_2y_3.$$

Далее поступаем так же, как в примере 1.

Рассмотрим метод Лагранжа в общем виде.

Теорема 39 (Лагранжа). Всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Доказательство. Сначала покажем, что если форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно не равна нулю, то с помощью невырожденного линейного преобразования $X = QY$ переменных можно сделать так, чтобы полученная форма имела коэффициент при y_1^2 (при первой переменной), отличный от нуля.

Пусть f — исходная квадратичная форма:

$$\begin{aligned} f = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2\,. \end{aligned} \tag{1}$$

1-й случай: $a_{11} \neq 0$. Сама данная форма обладает нужным свойством. Никакого преобразования делать не нужно. Можно, разве, сделать тождественное преобразование $X = EY$.

2-й случай: $a_{11} = 0$, но какой-либо из диагональных коэффициентов $a_{ii} \neq 0$, $i \geqslant 2$. Тогда нужное преобразование сводится лишь к изменению нумерации переменных: x_i заменим на y_1, x_1 заменим на y_i, а остальные x_k $(k \neq i,\ k \neq 1)$ заменяем на y_k:

$$\begin{aligned} x_1 &= \quad y_i, \\ x_i &= y_1, \\ x_k &= \qquad y_k\ (k \neq 1,\ k \neq i). \end{aligned} \tag{2'}$$

Вместо x_i^2 будем иметь y_1^2, точнее, вместо $a_{ii}x_i^2$ будет $a_{ii}y_1^2$ — и цель достигнута: получили условия первого случая. Выполненное преобразование невырожденное, так как для него легко строится обратное: равенства (2′) однозначно разрешимы относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

3-й случай: все диагональные коэффициенты равны нулю, т. е.

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0.$$

Так как форма ненулевая, то найдется коэффициент, отличный от нуля. Пусть $a_{ij} \neq 0$, где $i \neq j$. Выполним какое-нибудь неособенное преобразование, порождающее квадрат одной переменной с ненулевым коэффициентом. Положим, например,

$$x_j = y_i + y_j,$$
$$x_k = y_k, \text{ если } k \neq j,$$

т. е. x_j заменяем на $y_i + y_j$, а все остальные x_k $(k \neq j)$ заменяем на y_k. Это преобразование невырожденное, так как обратным для него будет преобразование:

$$y_k = x_k \text{ при } k \neq j,$$
$$y_j = x_j - x_i.$$

Тогда

$$f = \ldots + 2a_{ij}x_ix_j + \ldots = \ldots + 2a_{ij}y_i(y_i + y_j) + \ldots = \ldots + 2a_{ij}y_i^2 + \\ + 2a_{ij}y_iy_j + \ldots$$

Слагаемое $2a_{ij}y_i^2$ единственное с y_i^2, а потому оно не уничтожится в результате приведения подобных членов. В итоге мы пришли к условию второго случая, который сводится к первому.

Таким образом, без нарушения общности можно полагать далее, что $a_{11} \neq 0$. Вторая часть доказательства теоремы Лагранжа выполняется индукцией по числу переменных.

Для $n = 1$ утверждение теоремы тривиально: всякая квадратичная форма от одной переменной имеет вид ax_1^2.

Допустим, что теорема верна в случае $n - 1$ переменных. Докажем, что теорема верна и для квадратичных форм от n переменных.

В квадратичной форме (1) выделим члены, содержащие x_1:

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + g(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма от $n - 1$ переменных $x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$. Форму f запишем теперь так, чтобы выделенные члены, содержащие x_1, вошли в квадрат линейного выражения $(a_{11} \neq 0)$:

$$f = a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)\right] + g(x_2, \ldots, x_n) = \\ = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g_1(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g_1(x_2, \ldots, x_n)$ — форма от $n-1$ переменных $x_2, \ldots, x_n$.

Сделаем следующую замену переменных:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ y_i &= x_i, \qquad i \geqslant 2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Очевидно, преобразование (2) невырожденное: определитель его матрицы равен 1 Из (2) находим выражения старых переменных через новые:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n, \\ x_i &= y_i, \qquad i \geqslant 2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

В результате преобразования (3) — обозначим его матрицу через M — форма f принимает вид:

$$\tilde{f} = a_{11} y_1^2 + g_1(y_2, \ldots, y_n).$$

К форме g_1 применимо индуктивное допущение: форма g_1 невырожденным линейным преобразованием

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= b_{22} z_2 + \ldots + b_{2n} z_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= b_{n2} z_2 + \ldots + b_{nn} z_n \end{aligned}\right\}$$

приводится к каноническому виду

$$\tilde{g}_1 = \alpha_2 z_2^2 + \ldots + \alpha_n z_n^2.$$

Если в форме f после преобразования (3) выполнить преобразование

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \quad b_{22} z_2 + \ldots + b_{2n} z_n, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \quad b_{n2} z_2 + \ldots + b_{nn} z_n \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

с матрицей B, то форма f принимает требуемый вид:

$$\alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \ldots + \alpha_n z_n^2.$$

Результирующее линейное преобразование — произведение преобразований (3) и (4) — невырожденно, так как определитель его матрицы $M \cdot B$ не равен нулю.

Доказательство теоремы Лагранжа закончено. Оно дает прием фактического приведения квадратичной формы к каноническому виду, что иллюстрируется приведенными выше примерами.

Упражнения

[7], № 1187—1189;
[10], № 939.

§ 37. ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Применяя преобразования переменных

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_1 - \frac{1}{2}t_2 - 4t_3, \\ x_2 &= t_1 + \frac{1}{2}t_2 - 2t_3, \\ x_3 &= t_3, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= u_1 - u_2 - 2u_3, \\ x_2 &= u_1 + u_2 - u_3, \\ x_3 &= \frac{1}{2}u_3 \end{aligned}\right\}$$

для квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

получим два канонических вида:

$$t_1^2 - \frac{1}{4}t_2^2 - 8t_3^2 \quad \text{и} \quad u_1^2 - u_2^2 - 2u_3^2.$$

Таким образом, канонический вид данной квадратичной формы не однозначен. Мы получили два различных канонических вида, но можно заметить, что в каждом из них один положительный коэффициент и два отрицательных. Оказывается, что имеет место общее положение: число положительных и число отрицательных коэффициентов канонического вида данной вещественной квадратичной формы будет одно и то же независимо от преобразования переменных, приводящего к каноническому виду. В этом и состоит *закон инерции вещественных квадратичных форм.*

Предварительно сделаем замечание. Выполнив подходящее невырожденное линейное преобразование переменных, можно согласно теореме Лагранжа каждую вещественную квадратичную форму привести к каноническому виду

$$\tilde{f} = \alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_2^2 + \ldots + \alpha_ry_r^2, \tag{1}$$

где все коэффициенты вещественны и отличны от нуля. Число этих коэффициентов согласно теореме 37 равно рангу квадратичной формы f. После надлежащего линейного преобразования, состоящего в изменении нумерации переменных, канонический вид (1) можно записать так:

$$\tilde{f} = \alpha_1y_1^2 + \alpha_2y_2^2 + \ldots + \alpha_ky_k^2 - \alpha_{k+1}y_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_ry_r^2, \tag{1'}$$

где все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_r$ положительны и $0 < k \leqslant r$. Применив к форме (1′) невырожденное линейное преобразование

$$\left.\begin{gathered} y_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}z_1, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}z_2, \ldots, \quad y_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}}z_k, \ldots \\ \ldots, y_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}}z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \ldots, y_n = z_n \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

с вещественными коэффициентами, получим форму:

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_r^2, \tag{3}$$

которая называется нормальным видом квадратичной формы f. Принимая во внимание теорему Лагранжа, мы получили утверждение: всякая вещественная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием переменных с вещественными коэффициентами приводится к нормальному виду (3) с коэффициентами $+1$ и -1 при квадратах переменных.

Теорема 40. (Закон инерции.) Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится данная вещественная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием переменных с вещественными коэффициентами, не зависит от выбора этого преобразования.

Доказательство. Так как при переходе от формы (1) к форме (3) число положительных (а также и отрицательных) квадратов не меняется, то при доказательстве теоремы можно ограничиться лишь нормальным видом формы (вместо любого канонического).

Пусть вещественная квадратичная форма f ранга r от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ двумя невырожденными линейными преобразованиями переменных приведена к нормальному виду:

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \\ - \dots - z_r^2. \tag{4}$$

В силу невырожденности преобразований новые переменные будут линейно выражаться через старые с отличными от нуля определителями:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k = b_{k1}x_1 + \dots + b_{kn}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n, \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \quad = c_{11}x_1 \quad + \dots + c_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{l+1} = c_{l+n1}x_1 + \dots + c_{l+1,n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n \quad = c_{n1}x_1 \quad + \dots + c_{nn}x_n. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Допустим, что $k < l$. Исходя из первых k уравнений в (5) и последних $n - l$ уравнений в (6), составим следующую систему линейных однородных уравнений относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 \quad + \ldots + b_{1n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{k1}x_1 \quad + \ldots + b_{kn}x_n = 0, \\ c_{l+1,1}x_1 + \ldots + c_{l+1,n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1}x_1 \quad + \ldots + c_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Система (7) состоит из $k + n - l$ уравнений, а так как по допущению $k < l$, то $k + n - l < n$, т. е. в системе (7) число уравнений меньше числа неизвестных. Следовательно, однородная система (7) имеет вещественное ненулевое решение:

$$\overset{*}{x}_1, \ \overset{*}{x}_2, \ldots, \ \overset{*}{x}_n.$$

Подставив числа $x_1^*, \ldots, x_n^*$ в равенства (5) и (6), получим соответствующие значения новых переменных:

$$\overset{*}{y}_1 = \overset{*}{y}_2 = \ldots = \overset{*}{y}_k = 0, \ \overset{*}{y}_{k+1}, \ldots, \ \overset{*}{y}_n;$$

$$\overset{*}{z}_1, \ \overset{*}{z}_2, \ldots, \ \overset{*}{z}_l, \ \overset{*}{z}_{l+1} = \ldots = \overset{*}{z}_n = 0.$$

Для этих значений новых переменных из равенства (4) получаем:

$$-\overset{*2}{y}_{k+1} - \ldots - \overset{*2}{y}_r = \overset{*2}{z}_1 + \ldots + \overset{*2}{z}_l. \tag{8}$$

В силу вещественности входящих сюда слагаемых получаем, что $z_l^* = \ldots = z_l^* = 0$, а так как $z_{l+1}^* = \ldots = z_n^* = 0$, то имеем: набор $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ является ненулевым решением однородной системы n уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\}$$

Следовательно, определитель этой системы, а значит, и преобразования (6), равен нулю, что противоречит невырожденности этого преобразования.

Аналогичным образом получим противоречие, допустив, что $k > l$. Отсюда вывод: $k = l$, теорема доказана.

Закон инерции дает основание принять следующее

Определение 38. Число k положительных и число q отрицательных коэффициентов в каноническом виде вещественной квадратичной формы f называется соответственно положительным и отрицательным *индексом инерции*; разность $s = k - q$ называется *сигнатурой* данной квадратичной формы.

Индексы инерции k и q, ранг r и сигнатура s данной квадратичной формы связаны между собой следующим образом:

$$k+q=r, \quad k=\frac{1}{2}(r+s),$$
$$k-q=s, \quad q=\frac{1}{2}(r-s),$$

поэтому r и s однозначно определяют k и q и наоборот.

Закон инерции состоит в том, что индексы инерции и сигнатура данной вещественной квадратичной формы инвариантны относительно невырожденных линейных преобразований переменных.

§ 38. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Определение 39. Две вещественные квадратичные формы f и g называются *эквивалентными*, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования переменных с вещественными коэффициентами.

Это отношение квадратичных форм действительно является отношением эквивалентности, поскольку оно обладает необходимыми для этого свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Отсюда следует разбиение множества всех квадратичных форм на классы эквивалентных.

Каждая квадратичная форма f эквивалентна форме $\tilde{f}$, представляющей канонический вид исходной формы: переход от f к $\tilde{f}$ выполняется невырожденным линейным преобразованием.

Квадратичные формы

$$f=x_1^2-x_2x_3 \text{ и } g=z_1z_2+z_3^2$$

эквивалентны, так как форма f переходит в форму g, если положить

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \qquad\quad z_3, \\ x_2 &= \qquad z_2, \\ x_3 &= -z_1. \end{aligned}\right\}$$

Преобразование переменных, устанавливающее эквивалентность форм f и g, мы усмотрели сейчас непосредственно. В других случаях это может оказаться затруднительным. Задачу установления эквивалентности двух вещественных квадратичных форм можно решить на основе закона инерции.

Теорема 41. Две вещественные квадратичные формы от n переменных эквивалентны тогда и только тогда, когда эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры, т. е. когда при приведении их к каноническому виду получаются канонические формы с одинаковым числом квадратов с положительными, отрицательными и нулевыми коэффициентами.

Доказательство. Пусть квадратичные формы f и g

эквивалентны, так что форма f переводится в форму g невырожденным линейным преобразованием с вещественными коэффициентами. При этом, как известно, ранг формы не изменяется, так что $r_f = r_g$. По закону инерции имеем равенства индексов: $k_f = k_g$, $q_f = q_g$, а поэтому для сигнатур $s_f = s_g$.

Обратно, пусть $r_f = r_g$ и $s_f = s_g$. Так как

$$k = \frac{1}{2}(r + s), q = \frac{1}{2}(r - s),$$

то $k_f = k_g$ и $q_f = q_g$, т. е. число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов нормального вида формы f равно числу соответствующих коэффициентов нормального вида формы g. Значит, обе формы приводятся к одному и тому же нормальному виду и поэтому могут быть переведены друг в друга.

Пример. Выяснить, какие из вещественных форм f_1, f_2, f_3 эквивалентны между собой, если

$$f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3,$$

$$f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3,$$

$$f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3.$$

Решение. Приводим каждую форму к каноническому виду. Соответственно получаем:

$$\tilde{f}_1 = t_1^2 + 4t_2^2 - 4t_3^2,$$

$$\tilde{f}_2 = u_1^2 - 2u_2^2 - 2u_3^2,$$

$$\tilde{f}_3 = 16v_1^2 - 4v_2^2 - 16v_3^2,$$

так что

$$r_1 = 3,\ k_1 = 2,\ q_1 = 1,\ s_1 = 1,$$
$$r_2 = 3,\ k_2 = 1,\ q_2 = 2,\ s_2 = -1,$$
$$r_3 = 3,\ k_3 = 1,\ q_3 = 2,\ s_3 = -1.$$

Согласно теореме 41 формы f_2 и f_3 эквивалентны между собой и не эквивалентны форме f_1.

Упражнения

[7], № 1190—1192.

§ 39. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0. \quad (1)$$

Сумма первых шести (старших) членов левой части уравнения (1) дает квадратичную форму с действительными коэффициентами:

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2. \quad (1а)$$

С помощью некоторого ортогонального преобразования переменных $X = QY$ форму f приведем к каноническому виду:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2, \quad (1б)$$

и уравнение поверхности в результате этого преобразования примет вид:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + 2c_1y_1 + 2c_2y_2 + 2c_3y_3 + c = 0. \quad (2)$$

Если λ_1, λ_2, λ_3 не равны нулю (ранг r квадратичной формы равен 3), то уравнение (2) преобразуется к виду:

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{c_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_2 + \frac{c_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(y_3 + \frac{c_3}{\lambda_3}\right)^2 + c' = 0, \quad (3)$$

где

$$c' = c - \frac{c_1^2}{\lambda_1} - \frac{c_2^2}{\lambda_2} - \frac{c_3^2}{\lambda_3}.$$

В результате имеем уравнение центральной поверхности

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 + c' = 0 \quad (4)$$

полученное из (2) параллельным переносом осей координат:

$$x_i' = y_i + \frac{c_i}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

По уравнению (4) легко определяется тип поверхности.

Если $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ $(r = 2)$, то из уравнения (2) в результате параллельного переноса получаем уравнение нецентральной поверхности:

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 = 2m_1 v_3. \quad (5)$$

Если $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то в уравнении (2) объединим члены

$$\lambda_1 y_1^2 \text{ и } 2c_1y_1, \; 2c_3y_3 \text{ и } c$$

и после параллельного переноса получим уравнение вида:

$$\lambda_1 z_1^2 + 2d_2z_2 + 2d_3z_3 = 0. \quad (6)$$

Выполним поворот координатной плоскости z_2z_3, сохраняя ось z_1, на угол α, определяемый равенствами:

$$\cos\alpha = -\frac{d_3}{m}, \; \sin\alpha = \frac{d_2}{m},$$

где $m = \sqrt{d_2^2 + d_3^2}$, т. е. выполним ортогональное преобразование:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= t_1, \\ z_2 &= -\frac{d_3}{m} t_2 - \frac{d_2}{m} t_3, \\ z_3 &= \frac{d_2}{m} t_2 - \frac{d_3}{m} t_3. \end{aligned}\right\}$$

После этого уравнение (6) поверхности принимает вид:

$$\lambda_1 t_1^2 = 2m t_3. \tag{7}$$

В итоге приходим к следующему выводу о порядке приведения общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду:

1. Сначала находим ортогональное преобразование координат, которое приводит квадратичную форму (1а) старших членов уравнения (1) к каноническому виду (1б). Выполнив замену переменных в уравнении (1), получаем уравнение поверхности в форме (2).

2. После этого выполняем параллельный перенос осей координат. Тогда получим уравнение поверхности в форме (4) или в форме (5). Кроме параллельного переноса, иногда придется выполнить еще одно ортогональное преобразование (поворот одной координатной плоскости внутри себя) — и тогда получим уравнение нецентральной поверхности в форме (7).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревич З. И. Определители и матрицы, изд. 2. М. «Наука», 1970.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре, изд. 3. М., «Наука», 1966.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры, изд. 9. М., «Наука», 1968.
4. Ляпин Е. С. Курс высшей алгебры. М., Учпедгиз, 1955.
5. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры, изд. 2. М., Гостехиздат, 1956.
6. Окунев Л. Я. Высшая алгебра, изд. 2. М., «Просвещение». 1966.
7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре, изд. 3. М., «Наука, 1967.
8. Узков А. И. Векторные пространства и линейные преобразования. В кн.: «Энциклопедия элементарной математики». т. 2. М., Гостехиздат, 1951.
9. Фаддеев Д. К. Линейная алгебра. В кн.: «Математика, ее содержание, методы и значение», т. 3. М., Изд-во АН СССР, 1956.
10. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре, изд. 9. М., «Наука», 1968.
11. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М., Физматгиз, 1963.
12. Шилов Г. Е. Введение в теорию линейных пространств, изд. 2. М., Гостехиздат, 1956.

Одобрено кафедрой математики физико-математического факультета Московского государственного заочного педагогического института

Александр Петрович Громов

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Редактор *Л. М. Котова*. Художественный редактор *А. В. Сафонов*. Технический редактор *В. Ф. Коскина*. Корректор *М. В. Голубева*. Сдано в набор 10/XII 1970 г. Подписано к печати 19/V 1971 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Печ. л 8,0. Уч.-изд. л. 6,9. Тираж 20 тыс. экз. (План 1971 г) А08555. Заказ № 686.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва. 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 19 коп.