МГЗПИ

И. В. Парнасский, О. Е. Парнасская

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МГЗПИ

Московский государственный
заочный педагогический институт

И. В. Парнасский, О. Е. Парнасская

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ

Учебное пособие по геометрии
для студентов-заочников I—II курсов
физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1978

Рекомендовано к печати
Главным управлением высших и средних
педагогических учебных заведений
Министерства просвещения РСФСР

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор *Г. Б. Гуревич*,

доктор физико-математических наук,
профессор *А. С. Солодовников*

Настоящее пособие написано в соответствии с действующей программой по геометрии и предназначено для студентов-заочников физико-математических факультетов пединститутов. Оно содержит теоретический материал, предусмотренный соответствующими разделами программы, и упражнения, способствующие сознательному усвоению курса. В обзорном порядке даны сведения из алгебры, непосредственно связанные с излагаемым материалом. При этом предполагается, что студенты уже знакомы с линейной алгеброй.

Авторы приносят искреннюю благодарность профессорам А. С Солодовникову, Б. И. Аргунову и Г. Б. Гуревичу за ценные советы и замечания.

$П \dfrac{60602 - 825}{103\,(03) - 78}$ заказное

СОДЕРЖАНИЕ

Глава I

АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 1. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1.1. Определение векторного пространства. Читатель уже знаком из алгебры с понятием векторного (линейного) пространства. В данном пособии мы будем рассматривать лишь n-мерное векторное пространство над полем действительных чисел. Перечислим те его свойства, которые будут нужны в дальнейшем.

Пусть имеется некоторое множество элементов, называемых *векторами*, в котором заданы операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число, а именно:

1) любым двум векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$ поставлен в соответствие определенный вектор, называемый их *суммой* и обозначаемый через $\vec{u}+\vec{v}$;

2) любому вектору $\vec{u}$ и любому действительному числу k поставлен в соответствие определенный вектор, называемый *произведением вектора $\vec{u}$ на число k* и обозначаемый через $k\vec{u}$.

Указанное множество называется *n-мерным действительным векторным пространством* и обозначается через V_n, если операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают свойствами, перечисленными в следующих аксиомах:

I. Аксиомы сложения векторов

Аксиома I_1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

Аксиома I_2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Аксиома I_3. Существует *нулевой* вектор $\vec{0}$, удовлетворяющий условию

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$

для любого вектора $\vec{u}$.

Аксиома I_4. Для любого вектора $\vec{u}$ существует *противоположный* ему вектор $-\vec{u}$, обладающий таким свойством, что

$$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}.$$

II. Аксиомы умножения вектора на число

Аксиома II_1. $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

Аксиома II_2. $(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$.

Аксиома II_3. $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$.

Аксиома II_4. $1\vec{u} = \vec{u}$.

Напомним, что система векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $k_1, k_2, \ldots, k_r$, не все равные нулю, что

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_r\vec{u}_r = \vec{0};$$

если же это равенство возможно лишь при $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$, то данная система векторов называется *линейно независимой*, а векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ — *линейно независимыми векторами*.

III. Аксиомы размерности

Аксиома III_1. Существует линейно независимая система, состоящая из n векторов.

Аксиома III_2. Любая система из $n+1$ векторов линейно зависима.

1.2. Координаты вектора. *Базисом* пространства V_n называется любая линейно независимая система, состоящая из n векторов.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — какой-либо из базисов, то всякий вектор $\vec{u}$ может быть однозначно представлен в виде суммы

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \ldots + u_n\vec{e}_n,$$

что сокращенно записывается так:

$$\vec{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n).$$

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ называются *координатами вектора* $\vec{u}$ относительно данного базиса.

При сложении векторов соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число — умножаются на это число:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1; u_2; \ldots; u_n) + (v_1; v_2; \ldots; v_n) = \\ = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; \ldots; u_n + v_n),$$

$$k\vec{u} = k(u_1; u_2; \ldots; u_n) = (ku_1; ku_2; \ldots; ku_n).$$

Введем новый базис, векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ которого выражаются через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ старого базиса по формулам

$$\vec{e}_i' = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_j,$$

т. е.

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}_2' = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n' = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases} \tag{1}$$

При этом матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

является невырожденной (ее определитель не равен нулю). Эта матрица называется *матрицей перехода* от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$.

Координаты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ вектора $\vec{u}$ относительно старого базиса выразятся через его координаты $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ относительно нового базиса по формулам

$$u_i = a_{i1}u_1' + a_{i2}u_2' + \ldots + a_{in}u_n' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j',$$

т. е.

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}u_1' + a_{12}u_2' + \ldots + a_{1n}u_n', \\ u_2 = a_{21}u_1' + a_{22}u_2' + \ldots + a_{2n}u_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = a_{n1}u_1' + a_{n2}u_2' + \ldots + a_{nn}u_n'. \end{cases} \tag{3}$$

Коэффициенты в формулах (3) составляют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

которая, так же как и матрица (2), является невырожденной. Матрица (2) получается из матрицы A с помощью транспонирования.

Операцию транспонирования будем обозначать знаком «T»; следовательно, матрица (2) может быть обозначена через A^T.

1.3. Линейное отображение. Отображение φ одного векторного пространства в другое называется *линейным*, если:

1) образом суммы любых двух векторов является сумма образов этих векторов:

$$\varphi(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$

или

$$(\vec{u}+\vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}',$$

2) образом произведения любого вектора на любое число является произведение образа этого вектора на это число:

$$\varphi(k\vec{u}) = k\varphi(\vec{u})$$

или

$$(k\vec{u})' = k\vec{u}'.$$

Если линейное отображение взаимно однозначно, то оно называется *изоморфным.*

Два векторных пространства называются *изоморфными*, если одно из них можно отобразить на другое с помощью изоморфного отображения.

Для того чтобы два векторных пространства были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были одинаковы.

Рассмотрим частный случай, когда векторное пространство V_n отображается *в себя.* Выберем в V_n некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Пусть некоторое линейное отображение отображает произвольный вектор $\vec{u}$ этого пространства на вектор $\vec{u}'$ этого же пространства. Обозначим через $u_1, u_2, \ldots, u_n$ координаты вектора $\vec{u}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а через $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ (в отличие от 1.2) — координаты вектора $\vec{u}'$ относительно *того же* базиса. Тогда линейное отображение выразится формулами вида

$$\begin{cases} u_1' = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1n}u_n, \\ u_2' = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \ldots + b_{2n}u_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n' = b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \ldots + b_{nn}u_n. \end{cases} \tag{1}$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

составленная из коэффициентов формул (1), называется *матрицей линейного отображения* относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Если линейное отображение векторного пространства в себя является взаимно однозначным, то оно называется линейным *преобразованием* этого пространства и является изоморфным отображением векторного пространства *на себя*. Матрица (2) в этом случае будет невырожденной.

Векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$, на которые соответственно отображаются при линейном преобразовании векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ данного базиса, также образуют некоторый базис. Они выражаются через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ формулами

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = b_{11}\vec{e}_1 + b_{21}\vec{e}_2 + \ldots + b_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}'_2 = b_{12}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 + \ldots + b_{n2}\vec{e}_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{e}'_n = b_{1n}\vec{e}_1 + b_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + b_{nn}\vec{e}_n, \end{cases} \tag{3}$$

коэффициенты которых составляют матрицу, получаемую из матрицы (2) с помощью транспонирования:

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Обратно, для любых двух данных базисов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ существует одно и только одно линейное преобразование (1), отображающее векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ соответственно на векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$.

Линейное отображение векторного пространства в себя иначе называется *линейным оператором.*

1.4. Подпространства векторного пространства. *Подпространством* векторного пространства V_n называется множество векторов этого пространства, само являющееся векторным пространством относительно заданных в V_n операций сложения векторов и умножения вектора на число.

Простейшими примерами подпространств пространства V_n являются множество, состоящее из одного нулевого вектора (размерность этого подпространства считается равной нулю), и само пространство V_n.

Если векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ образуют линейно независимую систему, то множество всех векторов вида

$$\vec{u} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_r$ принимают всевозможные действительные значения, является r-мерным подпространством V_r векторного пространства V_n. Векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ составляют один из базисов этого подпространства, которое называется *натянутым* на эти векторы.

Пересечение двух векторных подпространств также является некоторым векторным подпространством.

§ 2. АКСИОМЫ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

2.1. Определение аффинного пространства. Пусть дано некоторое множество, элементы которого мы будем называть *точками* и обозначать большими латинскими буквами: A, B, ..., M, N, ...

Пусть также дано некоторое действительное n-мерное векторное пространство V_n.

Будем считать, что любым двум точкам M и N, взятым в определенном порядке, поставлен в соответствие один и только один вектор $\vec{u}$ пространства V_n.

Вектор, соответствующий упорядоченной паре точек M и N, обозначается через $\overrightarrow{MN}$; в этом случае говорят, что точка N получается при *откладывании* вектора $\vec{u}$ от точки M.

Один и тот же вектор может соответствовать различным парам точек. Запись

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{PQ} = \vec{u}$$

означает, что $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\vec{u}$ являются одним и тем же вектором пространства V_n.

Непустое множество точек называется *n-мерным действительным аффинным пространством*, если указанное соответствие между упорядоченными парами точек этого множества и векторами пространства V_n удовлетворяет следующим аксиомам.

IV. Аксиомы откладывания вектора

Аксиома IV_1. Для любой точки M и любого вектора $\vec{u}$ существует одна и только одна точка N такая, что $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

Аксиома IV_2. Для любых трех точек M, N и K имеет место соотношение

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MK}.$$

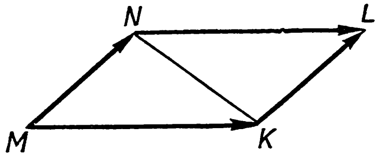


Рис. 1

Будем обозначать n-мерное действительное аффинное пространство через A_n. Пространство V_n, векторы которого сопоставляются парам точек из A_n, назовем *связанным* с пространством A_n.

Точки аффинного пространства и векторы связанного с ним векторного пространства могут иметь самую различную природу. Требуется лишь, чтобы операции сложения векторов, умножения вектора на число и откладывания вектора обладали свойствами, перечисленными в сформулированных выше аксиомах I, II, III, IV групп.

Эта система аксиом была предложена известным немецким математиком *Германом Вейлем* и называется системой аксиом Вейля.

Доказательства свойств аффинного пространства мы будем проводить на основании только этих аксиом. Следствия из аксиом векторного пространства, доказанные в курсе алгебры, будут использоваться нами в готовом виде; наиболее важные из них были приведены в § 1. Кроме точек и векторов, в аксиомах упоминаются еще и действительные числа; их свойства считаются известными из курса средней школы.

Приведем пример доказательства теоремы с помощью перечисленных выше аксиом.

Теорема. Если $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$, то $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{MK}$.

Доказательство. По аксиоме IV_2 $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MK}$. Так как $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$, то $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{MK}$, но по аксиомам I_1 и IV_2 $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NL}$, следовательно, $\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{MK}$ (рис. 1).

2.2. Аффинное пространство и элементарная геометрия. Легко видеть, что все аксиомы Вейля для трехмерного аффинного пространства A_3 выполняются и в элементарной геометрии (но являются там теоремами). В этом случае векторным пространством, связанным с аффинным пространством, является множество всех свободных векторов. Следовательно, пространство, изучаемое в средней школе, обладает всеми свойствами аффинного пространства. Однако оно богаче аффинного пространства по своим свойствам. Например, в аффинном пространстве не определены такие важные понятия элементарной геометрии, как «длина отрезка», «величина угла», «площадь фигуры» и т. д.

Элементарная геометрия называется также евклидовой, по имени замечательного греческого математика Евклида, давшего в III веке до нашей эры первое систематическое изложение этой геометрии.

Одной из наших целей является обобщение понятия евклидовой геометрии путем введения понятия многомерного евклидова пространства и аксиоматическое построение евклидовой геометрии для пространств любой размерности. В качестве первого шага мы начали с построения аффинного пространства, обладающего лишь частью свойств евклидова пространства. В школьном курсе геометрии геометрические образы рассматриваются как множества точек; понятие вектора появляется там позже, чем понятие точки. Так как мы уже знакомы из курса алгебры с понятием векторного пространства и его свойствами, то удобнее избрать иной путь, введя понятие точки после понятия вектора.

Упражнения

С помощью аксиом I, II, III, IV групп докажите следующие теоремы:

1. Вектор $\overrightarrow{MM}$ является нулевым: $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

2. Вектор $\overrightarrow{NM}$ является противоположным вектору $\overrightarrow{MN}$: $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.

3. При откладывании одного и того же вектора от различных точек получаются также различные точки.

4. Если $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$, то $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

5. Если $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}_2$, ..., $\overrightarrow{M_{r-1}M_r} = \vec{u}_r$, то

$$\overrightarrow{M_0M_r} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_r.$$

§ 3. АФФИННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

3.1. Координаты точки. *Репером* в аффинном пространстве A_n называется совокупность некоторой точки этого пространства и какого-нибудь базиса векторного пространства V_n, которое связано с пространством A_n.

Выберем определенный репер O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$, состоящий из точки O и базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$. Назовем его *координатным репером* или *аффинной системой координат*, точку O — *началом координат*, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ — *координатными векторами*. Введем понятие координат относительно этой системы как для точек пространства A_n, так и для векторов пространства V_n.

Координатами произвольного *вектора* называются его координаты относительно базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$. *Координатами* произвольной *точки* M называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, называемого *радиус-вектором* точки M. Таким образом, если точка M имеет координаты x_1, x_2, ..., x_n, то

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

что сокращенно записывается так:

$$M\,(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n).$$

Вследствие единственности разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ (1.2) координаты точки M определяются однозначно

Теорема. Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны разностям соответствующих координат точек N и M.

Доказательство. Пусть $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $N(y_1; y_2; \ldots; y_n)$. По аксиоме IV_2 $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$, откуда следует, что

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; \ldots; y_n - x_n).$$

3.2. Переход к новой системе координат. Рассмотрим две аффинные системы координат: систему $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, которую будем называть старой, и систему $O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$, которую назовем новой.

Новые координатные векторы выражаются через старые формулами (1) из 1.2:

$$\vec{e}_j{}' = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i. \tag{1}$$

Коэффициенты в этих формулах являются координатами новых координатных векторов относительно старой системы координат:

$$\vec{e}_j{}' = (a_{1j}; a_{2j}; \ldots; a_{nj}).$$

Пусть даны и координаты нового начала относительно старой системы координат:

$$O'(a_1; a_2; \ldots; a_n),$$

т. е.

$$\overrightarrow{OO'} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i. \tag{2}$$

Теорема. Если координатные векторы и начало новой аффинной системы координат определяются формулами (1) и (2), то координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольной точки M в старой аффинной системе координат выражаются через ее координаты $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ в новой системе по формулам

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j' + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

т. е.

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n' + a_1, \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n' + a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n' + a_{nn}, \end{cases}$$

при условии

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4)$$

Доказательство. Радиус-векторы точки M в старой и новой системах координат равны соответственно

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \qquad (5)$$

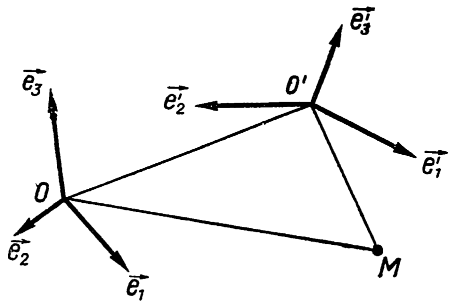


Рис. 2

и

$$\overrightarrow{O'M} = \sum_{j=1}^{n} x_j' \vec{e}_j\,'. \qquad (6)$$

Из (6) и (1) следует, что

$$\overrightarrow{O'M} = \sum_{j=1}^{n} x_j' \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \right) \vec{e}_i. \qquad (7)$$

По аксиоме IV_2 имеем (см. рис. 2)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}.$$

Подставив сюда выражения из (5), (2) и (7), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \right) \vec{e}_i.$$

Вследствие единственности разложения вектора по данному базису коэффициенты при одинаковых векторах в левой и правой частях равны и, следовательно, справедливы формуле (3).

Так как матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

в силу сказанного в 1.2 является невырожденной, то имеет место и условие (4).

Формулы (3) мы будем называть *формулами преобразования координат точки*. Координаты произвольного вектора относительно старой аффинной системы координат выражаются через его новые координаты формулами (3) из 1.2; будем называть их *формулами преобразования координат вектора*.

П р и м е р. Пусть в аффинном пространстве A_4 задана точка

$$O' \, (4; -5; 0; -6),$$

а в связанном с ним векторном пространстве V_4 — векторы

$$\vec{e}_1' = (7; 5; 3; 1),$$
$$\vec{e}_2' = (6; -4; 2; 0),$$
$$\vec{e}_3' = (-1; 1; 0; 0),$$
$$\vec{e}_4' = (3; -2; 0; 0).$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

то данные векторы образуют линейно независимую систему и вместе с точкой O' составляют репер. Примем этот репер за координатный.

Напишем формулы преобразования координат точек. Учитывая, что коэффициентами при x_1' являются координаты вектора $\vec{e}_1'$, коэффициентами при x_2' — координаты вектора $\vec{e}_2'$ и т. д., а свободными членами — координаты точки O' относительно старой системы координат, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 7x_1' + 6x_2' - x_3' + 3x_4' + 4, \\ x_2 = 5x_1' - 4x_2' + x_3' - 2x_4' - 5, \\ x_3 = 3x_1' + 2x_2', \\ x_4 = x_1' - 6. \end{cases}$$

Старые координаты вектора выразятся через новые по формулам

$$\begin{cases} u_1 = 7u_1' + 6u_2' - u_3' + 3u_4', \\ u_2 = 5u_1' - 4u_2' + u_3' - 2u_4', \\ u_3 = 3u_1' + 2u_2', \\ u_4 = u_1'. \end{cases}$$

Упражнения

1. Формулы преобразования координат точки имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + 2, \\ x_2 = x_2' - x_3', \\ x_3 = x_2' + x_3', \\ x_4 = x_4' - 1. \end{cases}$$

а) Проверьте выполнение условия (4).

б) Найдите новые координаты точки, имеющей старые координаты (0; 2; —4; 1).

в) Имеются ли точки, у которых новые координаты одинаковы со старыми?

г) Запишите формулы, выражающие новые координаты произвольной точки через старые.

д) Запишите формулы, выражающие старые координаты произвольного вектора через новые.

2. Запишите формулы преобразования координат точек, если даны координаты нового начала и координаты новых координатных векторов относительно старой системы координат:

а) O' (5; —3; 0),

$$\vec{e}_1' = (-1;\ 1;\ 0), \qquad \vec{e}_2' = (2;\ 0;\ 5), \qquad \vec{e}_3' = (0;\ 4;\ 1);$$

б) O' (4; 0; 0; —1),

$$\vec{e}_1' = (1;\ 0;\ -1;\ 0), \qquad \vec{e}_2' = (0;\ 2;\ 0;\ 0),$$
$$\vec{e}_3' = (1;\ 0;\ 0;\ 0), \qquad \vec{e}_4' = (0;\ 1;\ 0;\ 1).$$

3. Запишите формулы преобразования координат точек и векторов, если:

а) координатные векторы остаются прежними, а новым началом координат является точка O' (2; 0; —2; 0; 1);

б) начало координат остается прежним, а новые координатные векторы выражаются через старые по формулам

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_5, \\ \vec{e}_2' = -\vec{e}_4, \\ \vec{e}_3' = \vec{e}_3, \\ \vec{e}_4' = -\vec{e}_2, \\ \vec{e}_5' = \vec{e}_1 - \vec{e}_5. \end{cases}$$

4. В пространстве A_4 даны пять точек:

C_0 (1; 0; 0; 2), C_1 (0; 1; 2; 0), C_2 (2; 0; 0; 2), C_3 (0; 2; 1; 0), C_4 (2; 0; 0; 1).

Запишите формулы преобразования координат точек, приняв точку C_0 за новое начало координат, а векторы $\overrightarrow{C_0C_1}$, $\overrightarrow{C_0C_2}$, $\overrightarrow{C_0C_3}$, $\overrightarrow{C_0C_4}$ — за новые координатные векторы.

5. Можно ли рассматривать нижеследующие равенства как формулы преобразования координат точек? Если да, то найдите координаты нового начала и новых координатных векторов относительно старой системы координат.

а) $\begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' - x_3' - 1, \\ x_2 = 2x_1' + x_2' + x_3', \\ x_3 = x_1' - 3x_2' + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = x_4' + 3, \\ x_2 = x_3' + x_4', \\ x_3 = x_2' - x_1', \\ x_4 = x_1' - x_2'; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' + x_3', \\ x_2 = x_2' - x_3' - 1, \\ x_3 = x_3' + 2, \\ x_4 = x_4' - x_3' - 1, \\ x_5 = x_5' + x_4' + x_3'. \end{cases}$

§ 4. r-МЕРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

4.1. Определение плоскости. Пусть A — какая-нибудь точка аффинного пространства A_n, а V_r — некоторое подпространство векторного пространства V_n, связанного с A_n.

Множество точек, получаемых при откладывании от точки A всех векторов подпространства V_r, называется *r-мерной плоскостью*, натянутой на точку A и подпространство V_r.

Обозначим эту r-мерную плоскость через P_r. Подпространство V_r называется *направляющим подпространством* для P_r; оно может быть задано каким-нибудь из своих базисов (I.4). Если этот базис состоит из векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$, то будем говорить, что плоскость P_r натянута на точку A и векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$. Эту плоскость можно определить как множество таких точек M, что

$$\overrightarrow{AM} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r, \tag{1}$$

где коэффициенты $t_1, t_2, \ldots, t_r$ принимают независимо друг от друга всевозможные действительные значения.

Если $r = 0$, то V_r состоит только из нулевого вектора, а P_r — только из точки A. Поэтому любую точку можно рассматривать как нуль-мерную плоскость.

Одномерная плоскость называется прямой линией или просто *прямой*, $(n - 1)$-мерная плоскость называется *гиперплоскостью*, n-мерная плоскость совпадает со всем пространством A_n.

П р и м е р. Для $n = 3$, т. е. для пространства A_3, эти понятия уже знакомы из школьного курса геометрии.

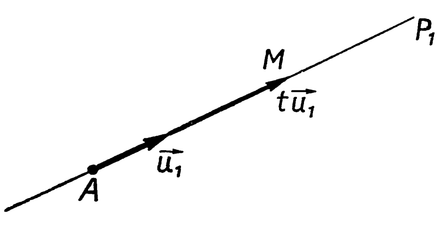


Рис. 3

При $r = 1$ получаем одномерную плоскость P_1, т. е. прямую (рис. 3); уравнение (1) принимает тогда вид

$$\overrightarrow{AM} = t_1\vec{u}_1.$$

При $r = 2$ получаем дву-

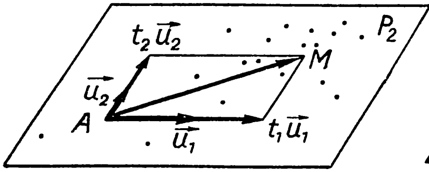


Рис. 4

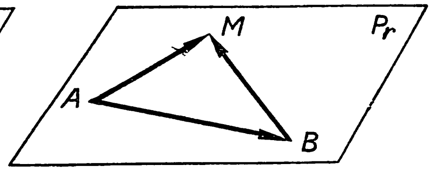


Рис. 5

мерную плоскость P_2, являющуюся гиперплоскостью пространства A_3 (в школе она называется просто плоскостью). В этом случае (рис. 4)

$$\overrightarrow{AM} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2.$$

4.2. Плоскость как аффинное пространство. Докажем, что роль точки A в определении плоскости может играть и любая другая точка этой плоскости.

Теорема 1. Если плоскость P_r натянута на точку A и подпространство V_r, то она является натянутой на это подпространство и любую другую свою точку B.

Доказательство. Обозначим через Q_r плоскость, натянутую на B и V_r. Требуется доказать, что плоскости P_r и Q_r совпадают, т. е. что всякая точка, принадлежащая одной плоскости, принадлежит также и другой.

Пусть $M \in P_r$, тогда $\overrightarrow{AM} \in V_r$. Так как $B \in P_r$, то и $\overrightarrow{AB} \in V_r$. По аксиоме IV_2 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$ (рис. 5), следовательно, также и $\overrightarrow{BM} \in V_r$, т. е. $M \in Q_r$. Верно и обратное. Пусть $M \in Q_r$, тогда $\overrightarrow{BM} \in V_r$. Так как и $\overrightarrow{AB} \in V_r$, то $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \in V_r$, т. е. $M \in P_r$.

Теорема 2. Всякая r-мерная плоскость является r-мерным аффинным пространством.

Доказательство. Пусть P_r — плоскость, натянутая в A_n на точку A и подпространство V_r. Выберем в P_r две произвольные точки M и N. Тогда $\overrightarrow{AM} \in V_r$, $\overrightarrow{AN} \in V_r$ и, следовательно, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \in V_r$.

Таким образом, каждой упорядоченной паре точек M, N плоскости P_r соответствует определенный вектор $\overrightarrow{MN}$ ее направляющего подпространства V_r. Из определения r-мерной плоскости и теоремы 1 следует, что для P_r выполняется аксиома IV_1. Аксиома IV_2, являясь справедливой для любых точек пространства A_n, выполняется, в частности, и для точек плоскости P_r. Следовательно, плоскость P_r — r-мерное аффинное пространство, для которого V_r является связанным с ним векторным пространством.

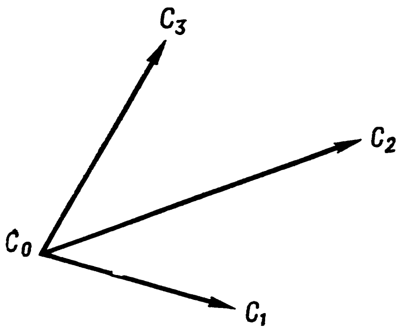


Рис. 6

4.3. Линейно независимые точки. Будем говорить, что $r+1$ точек *линейно независимы* или что они составляют *линейно независимую систему точек*, если эти точки не принадлежат никакой $(r-1)$-мерной плоскости.

Примеры. Три точки, не принадлежащие одной прямой, линейно независимы.

Четыре точки, не принадлежащие одной двумерной плоскости, линейно независимы.

В пространстве A_3 никакие пять точек не могут оказаться линейно независимыми.

Теорема 1. Точки $C_0, C_1, \ldots, C_r$ линейно независимы тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{C_0C_1}, \overrightarrow{C_0C_2}, \ldots, \overrightarrow{C_0C_r}$ линейно независимы.

Доказательство. Если векторы $\overrightarrow{C_0C_1}, \overrightarrow{C_0C_2}, \ldots, \overrightarrow{C_0C_r}$ линейно независимы, то и точки $C_0, C_1, \ldots, C_r$ линейно-независимы (рис. 6). Действительно, если бы эти точки принадлежали какой-нибудь плоскости P_{r-1}, то направляющее подпространство V_{r-1} этой плоскости содержало бы r линейно независимых векторов $\overrightarrow{C_0C_1}, \overrightarrow{C_0C_2}, \ldots, \overrightarrow{C_0C_r}$, что по аксиоме III_2 невозможно.

Верно и обратное: если точки $C_0, C_1, \ldots, C_r$ линейно независимы, то и векторы $\overrightarrow{C_0C_1}, \overrightarrow{C_0C_2}, \ldots, \overrightarrow{C_0C_r}$ линейно независимы. Если бы эти векторы оказались линейно зависимыми, то они принадлежали бы некоторому подпространству V_{r-1}, а точки $C_0, C_1, \ldots, C_r$ лежали бы в $(r-1)$-мерной плоскости, натянутой на C_0 и V_{r-1}, и, следовательно, не могли бы быть линейно независимыми.

Теорема 2. Каковы бы ни были $r+1$ линейно независимых точек $C_0, C_1, \ldots, C_r$, существует одна и только одна r-мерная плоскость, содержащая эти точки.

Доказательство. Векторы $\overrightarrow{C_0C_1}, \overrightarrow{C_0C_2}, \ldots, \overrightarrow{C_0C_r}$ образуют базис некоторого подпространства V_r; плоскость P_r, натянутая на C_0 и V_r, является искомой.

Докажем единственность искомой плоскости. Пусть некоторая плоскость Q_r, натянутая на точку B и r-мерное подпространство, содержит точки $C_0, C_1, \ldots, C_r$. Тогда это подпространство содержит векторы $\overrightarrow{C_0C_1}, \overrightarrow{C_0C_2}, \ldots, \overrightarrow{C_0C_r}$ и, следовательно, совпадает с V_r, а плоскость Q_r, являясь натянутой не только на B и V_r, но и на C_0 и V_r, совпадает с P_r.

Пример. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна двумерная плоскость.

4.4. Взаимное расположение двух плоскостей. Две плоскости называются *пересекающимися*, если они имеют хотя бы одну общую точку.

Теорема 1. Если две плоскости пересекаются, то их пересечение есть плоскость, направляющее подпространство которой является пересечением направляющих подпространств этих плоскостей.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве A_n две плоскости: плоскость P_r, натянутую на точку A и подпространство

V_r, и плоскость Q_s, натянутую на точку B и подпространство W_s (рис. 7).

Пусть эти плоскости имеют общую точку C: $C \in P_r \cap Q_s$. Обозначим через U_p пересечение подпространств V_r и W_s: $U_p = V_r \cap W_s$, а через T_p обозначим плоскость, натянутую на C и U_p. Докажем, что $T_p = P_r \cap Q_s$.

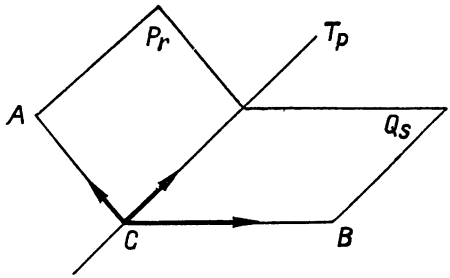


Рис. 7

Если какая-нибудь точка $M \in T_p$, то $\overrightarrow{CM} \in U_p$; но $U_p = V_r \cap W_s$, следовательно, $\overrightarrow{CM} \in V_r$ и $\overrightarrow{CM} \in W_s$. Это означает, что $M \in P_r$ и $M \in Q_s$, т. е. что $M \in P_r \cap Q_s$.

Верно и обратное. Если $M \in P_r \cap Q_s$, то $M \in P_r$ и $M \in Q_s$, откуда $\overrightarrow{CM} \in V_r$ и $\overrightarrow{CM} \in W_s$. Следовательно, $\overrightarrow{CM} \in U_p = V_r \cap W_s$, т. е. $M \in T_p$.

Две плоскости называются *параллельными*, если направляющее подпространство одной из них принадлежит направляющему подпространству другой.

Если две плоскости не параллельны и не пересекаются, то они называются *скрещивающимися*.

Теорема 2. Если две плоскости параллельны и пересекаются, то одна из них принадлежит другой.

Доказательство. Применим те же обозначения, что и при доказательстве теоремы 1. Для определенности предположим, что $r \leqslant s$; тогда по определению параллельности $V_r \subset W_s$. Докажем, что $P_r \subset Q_s$, т. е. что любая точка M плоскости P_r принадлежит также и Q_s.

Пусть C — общая точка плоскостей P_r и Q_s; если $M \in P_r$, то $\overrightarrow{CM} \in V_r$. Так как $V_r \subset W_s$, то $\overrightarrow{CM} \in W_s$ и, следовательно, $M \in Q_s$.

Пример. В пространстве A_3 возможны следующие случаи взаимного расположения прямой P_1 и плоскости Q_2:

1) P_1 и Q_2 параллельны и не имеют общих точек (рис. 8). Раньше в школьных учебниках именно такие прямая и плоскость назывались параллельными.

2) P_1 и Q_2 параллельны и имеют общие точки. Тогда $P_1 \subset Q_2$ (рис. 9).

В каждом из этих двух случаев $V_1 \subset W_2$. Векторы $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ базиса подпространства W_2 можно выбрать так, что вектор $\vec{v}_1$ будет являться базисным вектором и для V_1.

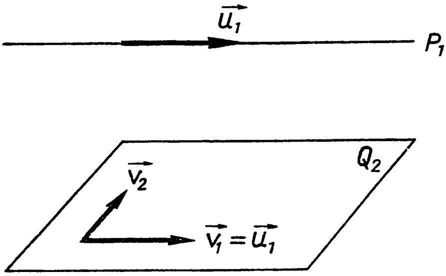


Рис. 8

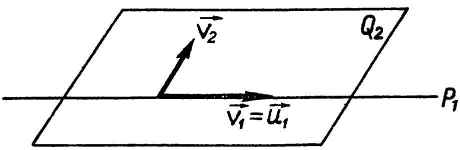


Рис. 9

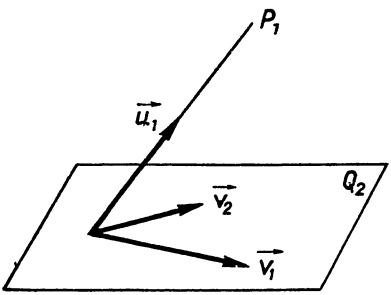


Рис. 10

3) P_1 и Q_2 не параллельны (рис. 10). Тогда они имеют единственную общую точку (упр. 2 г к § 4).

Таким образом, в пространстве A_3 плоскости P_1 и Q_2 скрещивающимися быть не могут; однако в пространстве A_4 такой случай возможен (см. пример 1 из 5.3).

Упражнения

1. По образцу примера из 4.4 исследуйте все случаи взаимного расположения плоскостей:

а) P_1 и Q_1 в A_2;

б) P_1 и Q_1 в A_3;

в) P_2 и Q_2 в A_3.

2. Докажите следующие теоремы:

а) Если две плоскости, имеющие одинаковые размерности, пересекаются и параллельны, то они совпадают.

б) Через точку A, не принадлежащую r-мерной плоскости P_r, проходит одна и только одна r-мерная плоскость, параллельная P_r и не пересекающаяся с ней.

в) Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то и любая точка этой прямой принадлежит этой плоскости.

г) Если в A_3 плоскости P_1 и Q_2 не параллельны, то они имеют единственную общую точку.

§ 5. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

5.1. Векторное и параметрические уравнения плоскости. Рассмотрим в пространстве A_n плоскость P_r, натянутую на точку A и линейно независимые векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ (рис. 11). Она является множеством точек M, определяемых уравнением (1) из 4.1:

$$\overrightarrow{AM} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_r$ принимают любые действительные значения.

Пусть O — начало аффинной системы координат. По аксиоме IV_2

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM},$$

следовательно,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r. \quad (1)$$

Это уравнение (1) называется *векторным уравнением* плоскости P_r.

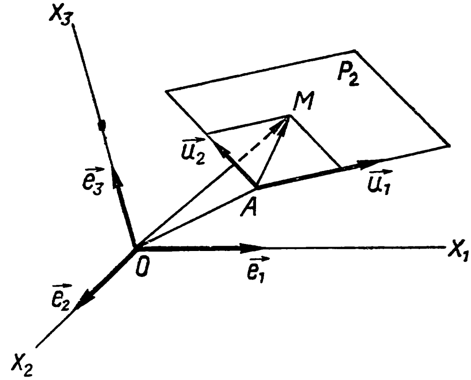


Рис. 11

Если

$$M\ (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n),$$
$$A\ (a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n),$$
$$\vec{u}_i = (u_1^{(i)};\ u_2^{(i)};\ \ldots;\ u_n^{(i)}),$$

то

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,\\
\overrightarrow{OA} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n,\\
\vec{u}_1 &= u_1^{(1)}\vec{e}_1 + u_2^{(1)}\vec{e}_2 + \ldots + u_n^{(1)}\vec{e}_n,\\
\vec{u}_2 &= u_1^{(2)}\vec{e}_1 + u_2^{(2)}\vec{e}_2 + \ldots + u_n^{(2)}\vec{e}_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vec{u}_r &= u_1^{(r)}\vec{e}_1 + u_2^{(r)}\vec{e}_2 + \ldots + u_n^{(r)}\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнение (1) и приравнивая в левой и правой частях коэффициенты при одинаковых координатных векторах, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}
x_1 = a_1 + u_1^{(1)}t_1 + u_1^{(2)}t_2 + \ldots + u_1^{(r)}t_r,\\
x_2 = a_2 + u_2^{(1)}t_1 + u_2^{(2)}t_2 + \ldots + u_2^{(r)}t_r,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n = a_n + u_n^{(1)}t_1 + u_n^{(2)}t_2 + \ldots + u_n^{(r)}t_r.
\end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) выражают текущие координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольной точки M данной r-мерной плоскости с помощью линейных функций от r параметров $t_1, t_2, \ldots, t_r$ и называются *параметрическими уравнениями* этой плоскости.

В частности, при $r = 1$ получаем параметрические уравнения прямой P_1 пространства A_n; положив для краткости $u_i^{(1)} = u_i$ и $t_1 = t$, имеем:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + u_1 t, \\ x_2 = a_2 + u_2 t, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = a_n + u_n t. \end{cases} \tag{3}$$

Пример 1. Составим параметрические уравнения плоскости P_3, натянутой в A_4 на точку A (1; 0; 0; 2) и линейно независимые векторы $\vec{u}_1 = (1; 1; 1; -1)$, $\vec{u}_2 = (-1; 0; 1; 0)$, $\vec{u}_3 = (1; -1; 0; 0)$.

Решение. Данная плоскость имеет векторное уравнение

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + t_3\vec{u}_3;$$

ее параметрическими уравнениями являются

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 1 \cdot t_1 - 1 \cdot t_2 + 1 \cdot t_3, \\ x_2 = 0 + 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 - 1 \cdot t_3, \\ x_3 = 0 + 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3, \\ x_4 = 2 - 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - t_2 + t_3, \\ x_2 = t_1 - t_3, \\ x_3 = t_1 + t_2, \\ x_4 = 2 - t_1. \end{cases}$$

Пример 2. Составим параметрические уравнения плоскости P_2, проходящей в A_4 через точки C_0 (1; 1; 0; 3), C_1 (2; 1; 0; 4), C_2 (0; 2; —2; 4).

Решение. Векторы

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{C_0C_1} = (1; 0; 0; 1),$$
$$\vec{u}_2 = \overrightarrow{C_0C_2} = (-1; 1; -2; 1)$$

линейно независимы, следовательно, данные точки являются линейно независимыми и задача имеет единственное решение (4.3). Искомая плоскость натянута на точку C_0 и векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$; ее параметрические уравнения

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - t_2, \\ x_2 = 1 + t_2, \\ x_3 = t_1 - 2t_2, \\ x_4 = 3 + t_1 + t_2. \end{cases}$$

5.2. Общие уравнения плоскости. Если каждое из уравнений (3) решить относительно t и приравнять полученные выражения, то мы получим уравнения прямой, не содержащие параметра:

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{u_n}.$$

При $n = 3$ это будут уже знакомые читателю канонические уравнения прямой.

Покажем, как исключить параметры из параметрических уравнений (2) плоскости любой размерности r.

Так как векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ линейно независимы, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \ldots & u_1^{(r)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \ldots & u_2^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \ldots & u_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

равен r. Это означает, что хотя бы один из миноров r-го порядка этой матрицы отличен от нуля. Пусть, например, такой минор образован первыми r ее строками; тогда первые r уравнений системы (2) можно решить относительно $t_1, t_2, \ldots, t_r$, выразив эти параметры линейно через $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Подставив полученные значения в остальные $n - r$ уравнений системы (2), получим систему из $n - r$ линейных уравнений, которые содержат только координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольной точки плоскости, но не содержат параметров $t_1, t_2, \ldots, t_r$.

Точка принадлежит данной плоскости тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют полученным уравнениям.

Таким образом, любая r-мерная плоскость P_r в пространстве A_n может быть задана системой $n - r$ линейных уравнений. В частности, гиперплоскость P_{n-1} может быть задана одним линейным уравнением.

Пример. Исключим параметры из уравнений плоскости P_3, полученных в примере 1 из 5.1. Для этого можно, например, выразить t_1, t_2, t_3 через x_2, x_3, x_4 из последних трех уравнений:

$$t_1 = 2 - x_4, \qquad t_2 = x_3 - 2 + x_4, \qquad t_3 = 2 - x_4 - x_2,$$

а затем подставить найденные значения в первое уравнение:

$$x_1 = 7 - 3x_4 - x_3 - x_2.$$

Таким образом, плоскость P_3 (являясь гиперплоскостью пространства A_4) задается одним уравнением, которое можно окончательно записать в виде

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 7 = 0.$$

Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть дана система из k линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n + A_1 = 0, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{2n}x_n + A_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \ldots + A_{kn}x_n + A_k = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Как известно из алгебры, эта система имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен рангу «расширенной» матрицы, получаемой присоединением к A столбца из свободных членов. Рассмотрим тот случай, когда оба ранга равны числу уравнений системы, т. е. k; система (4) называется тогда *независимой*.

Пусть, например, определитель k-го порядка, составленный из коэффициентов при $x_{n-k+1}, x_{n-k+2}, \ldots, x_n$, не равен нулю. Тогда систему (4) можно разрешить относительно этих неизвестных, выразив их через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}$. Если при этом ввести обозначения: $x_1 = t_1, x_2 = t_2, \ldots, x_{n-k} = t_{n-k}$, то получатся уравнения вида (2) при $r = n - k$.

Будем рассматривать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты точки относительно некоторой аффинной системы координат в пространстве A_n. Тогда независимая система из k линейных уравнений вида (4) определяет в пространстве A_n некоторую $(n - k)$-мерную плоскость.

Уравнения вида (4) мы будем называть *общими уравнениями* этой плоскости.

Пример. Плоскость задана в A_5 уравнениями

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 - x_5 - 1 = 0. \end{cases}$$

Найдем ее векторное и параметрические уравнения.

Решение. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов при координатах, так же как и ранг расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

равен двум. Следовательно, плоскость имеет размерность $r = 5 - 2 = 3$. Число параметров в параметрических уравнениях плоскости также равно трем; эти параметры можно выбрать, например, следующим образом:

$$x_1 = t_1, \qquad x_2 = t_2, \qquad x_3 = t_3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_4 &= t_2 - t_1, \\ x_5 &= t_3 + t_2 - t_1 - 1. \end{aligned}$$

Полученные пять уравнений являются параметрическими уравнениями плоскости. Запишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3, \\ x_2 = 0 + 0 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3, \\ x_3 = 0 + 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 1 \cdot t_3, \\ x_4 = 0 - 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3, \\ x_5 = -1 - 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + 1 \cdot t_3. \end{cases}$$

Эту систему можно заменить одним векторным уравнением

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + t_3\vec{u}_3,$$

где

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= (x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4;\ x_5),\\
\overrightarrow{OA} &= (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ -1),\\
\vec{u}_1 &= (1;\ 0;\ 0;\ -1;\ -1),\\
\vec{u}_2 &= (0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1),\\
\vec{u}_3 &= (0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1).
\end{aligned}$$

5.3. Исследование взаимного расположения плоскостей. Поясним методы исследования на примерах.

Пример 1. В пространстве A_4 прямая P_1 натянута на точку A и вектор $\vec{u}$, а плоскость Q_2 натянута на точку B и векторы $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$. Исследуем взаимное расположение плоскостей P_1 и Q_2, если

$$\begin{aligned}
&A\ (0;\ 4;\ 0;\ 1), \qquad && \vec{u} = (1;\ 0;\ 0;\ 3);\\
&B\ (1;\ 1;\ 2;\ 2), && \vec{v}_1 = (0;\ 0;\ 1;\ 2),\\
& && \vec{v}_2 = (1;\ 0;\ -1;\ 2).
\end{aligned}$$

Решение. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

составленной из координат векторов $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, равен трем (определитель, составленный из 1, 3 и 4-го столбцов, не равен нулю), следовательно, вектор $\vec{u}$ не может быть линейной комбинацией векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, так что плоскости P_1 и Q_2 не параллельны.

Установим, имеют ли эти плоскости общие точки, для чего решим совместно параметрические уравнения плоскостей P_1 и Q_2:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 1\cdot t,\\ x_2 = 4 + 0\cdot t,\\ x_3 = 0 + 0\cdot t,\\ x_4 = 1 + 3\cdot t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 + 0\cdot t_1 + 1\cdot t_2,\\ x_2 = 1 + 0\cdot t_1 + 0\cdot t_2,\\ x_3 = 2 + 1\cdot t_1 - 1\cdot t_2,\\ x_4 = 2 + 2\cdot t_1 + 2\cdot t_2. \end{cases}$$

Сравнивая выражения для x_2, замечаем, что уравнения несовместны, плоскости P_1 и Q_2 скрещивающиеся.

Пример 2. Исследуем в пространстве A_4 взаимное расположение прямой P_1, заданной уравнениями

$$x_1 + x_2 - 2 = 0, \qquad x_2 - x_3 = 0, \qquad x_4 - 1 = 0,$$

и гиперплоскости Q_3, заданной уравнением

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0.$$

Решение. Пересечение плоскостей определяется системой, которая получится, если объединить их уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_4 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что плоскости являются пересекающимися и их пересечением служит точка (1; 1; 1; 1). Параллельными они быть не могут, так как в противном случае по теореме 2 из 4.4 $P_1 \subset Q_3$, откуда следовало бы, что $P_1 \cap Q_3 = P_1$.

Упражнения

1. Составьте параметрические и общие уравнения прямой:

а) натянутой в A_4 на точку A (1; —1; 2; 0) и вектор $\vec{u} = (3; 4; -1; 2)$;

б) проходящей в A_5 через точки (0; 1; 2; 3; 4) и (4; 3; 2; 1; 0).

2. Гиперплоскость задана в A_4 параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 - 3, \\ x_2 = t_2 - t_3, \\ x_3 = t_2 + t_3, \\ x_4 = 1 + t_1. \end{cases}$$

Найдите ее общее уравнение.

3. Плоскость задана в A_4 уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 1 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3 = 0. \end{cases}$$

Найдите ее векторное и параметрические уравнения.

4. Составьте параметрические и общие уравнения плоскости P_3, проходящей в A_5 через точки C_0 (1; 0; 2; —1; 0), C_1 (1; 1; 3; 0; 0), C_2 (2; 0; 2; —1; 1) и C_3 (1; 1; 2; 1; 3).

5. Прямая P_1 натянута в A_4 на точку A и вектор $\vec{u} = (0; -1; 1; 0)$, а гиперплоскость Q_3 — на точку B (0; 3; 0; 0) и векторы $\vec{v}_1$ (1; 0; 1; 0), $\vec{v}_2 = (0; 1; 0; 1)$, $\vec{v}_3 = (-1; 0; 0; 1)$. Исследуйте взаимное расположение P_1 и Q_3, если:

а) A (0; 0; 3; 3);

б) A (0; 0; 3; 0).

6. Исследуйте взаимное расположение плоскостей P_2 и Q_2 в пространстве A_4, если:

а) P_2 и Q_2 заданы соответственно уравнениями

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t_1 - t_2, \\ x_2 = 1 - t_1, \\ x_3 = t_1 + t_2, \\ x_4 = t_2 - 1; \end{cases}$$

б) плоскость P_2 натянута на начало координат, вектор $\vec{e}_1$ и вектор $\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, а плоскость Q_2 проходит через точки, получаемые при откладывании векторов $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ от начала координат.

7. Плоскость P_3 натянута в A_5 на начало координат и векторы $\vec{u}_1 = (1; 0; -1; 1; 0)$, $\vec{u}_2 = (0; 0; 0; 1; 0)$, $\vec{u}_3 = (1; 0; 0; 0; 1)$, а плоскость Q_2 задана уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Исследуйте взаимное расположение P_3 и Q_2.

8. Исследуйте взаимное расположение гиперплоскости P_4, заданной в A_4 уравнением

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 + 1 = 0,$$

и плоскости Q_3, заданной уравнениями

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + x_4 + 2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

9. Составьте параметрические и общие уравнения плоскости P_3, проходящей в A_6 через точку (0; 1; 0; 2; 0; 3) параллельно плоскости, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_3 - x_4 = 0, \\ x_5 + x_6 = 1. \end{cases}$$

10. Запишите параметрические и общие уравнения плоскости P_2, проходящей в A_4 через точку (0; 1; 0; 1) параллельно прямым

$$x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4}{4},$$

$$x_1 = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4}{-4}.$$

§ 6. ИЗОМОРФИЗМ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВ

6.1. Изоморфное отображение. Пусть α — отображение аффинного пространства A_n на аффинное пространство A'_m, а M' и N' — образы каких-либо точек M и N при этом отображении:

$$M' = \alpha(M), \qquad N' = \alpha(N),$$

V_n и V'_m — векторные пространства, связанные соответственно с A_n и A'_m, и φ — какое-нибудь отображение V_n на V'_m.

Отображение φ называется *ассоциированным с отображением* α, если при любом выборе точек M и N φ отображает вектор $\overrightarrow{MN}$ на вектор $\overrightarrow{M'N'}$:

$$\overrightarrow{M'N'} = \varphi\,(\overrightarrow{MN}).$$

Взаимно однозначное отображение α аффинного пространства A_n на аффинное пространство A'_m называется *изоморфным*, если существует ассоциированное с ним изоморфное отображение φ пространства V_n на пространство V'_m.

Аффинные пространства A_n и A'_m называются *изоморфными*, если существует изоморфное отображение одного из них на другое.

6.2. Признак изоморфизма аффинных пространств.

Теорема. Для того чтобы два аффинных пространства A_n и A'_m были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были одинаковы.

Доказательство. 1) Докажем вначале *необходимость* данного условия. Пусть пространства A_n и A'_m изоморфны. По определению изоморфного отображения векторные пространства V_n и V'_m, связанные соответственно с A_n и A'_m, также изоморфны и имеют поэтому одинаковые размерности (1.3); следовательно, $n = m$. Но тогда совпадают также и размерности пространств A_n и A'_m.

2) Теперь докажем, что условие является *достаточным*. Рассмотрим два аффинных пространства A_n и A'_n, имеющие одну и ту же размерность n, и докажем, что они изоморфны.

Введем в этих пространствах аффинные системы координат и отобразим пространство A_n на пространство A'_n, считая образом произвольной точки $M\,(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ точку $M'\,(x'_1;\ x'_2;\ \ldots;\ x'_n)$ с такими же координатами: $x_i = x'_i$. Это отображение α взаимно однозначно. Покажем, что оно является изоморфным.

Обозначим через V_n и V'_n векторные пространства, связанные соответственно с A_n и A'_n. Рассмотрим отображение φ пространства V_n на пространство V'_n, при котором соответствующими считаются те векторы, которые имеют во введенных аффинных системах одинаковые координаты. Это отображение φ будет ассоциированным с отображением α. Действительно, пусть образами точек $M\,(x_1; x_2;\ldots;\ldots; x_n)$ и $N\,(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$ при отображении α являются соответственно точки $M'\,(x'_1;\ x'_2;\ \ldots;\ x'_n)$ и $N'\,(y'_1;\ y'_2;\ \ldots;\ y'_n)$. Так как $x_i = x'_i$ и $y_i = y'_i$, то равны и соответствующие координаты векторов

$$\overrightarrow{MN} = (y_1 - x_1;\ y_2 - x_2;\ \ldots;\ y_n - x_n)$$

и

$$\overrightarrow{M'N'} = (y'_1 - x'_1;\ y'_2 - x'_2;\ \ldots;\ y'_n - x'_n),$$

но это и означает, что вектор $\overrightarrow{M'N'}$ является образом вектора $\overrightarrow{MN}$ при отображении φ.

Остается доказать, что φ является изоморфным отображением V_n на V'_n. Так как оно взаимно однозначно, то достаточно убедиться в том, что оно линейно (1.3).

Пусть образами векторов $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_n)$ и $\vec{v} = (v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_n)$ являются соответственно векторы $\vec{u'} = (u'_1;\ u'_2;\ \ldots;\ u'_n)$ и $\vec{v'} = (v'_1;\ v'_2;\ \ldots;\ v'_n)$. Тогда

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1;\ u_2 + v_2;\ \ldots;\ u_n + v_n),$$
$$\vec{u'} + \vec{v'} = (u'_1 + v'_1;\ u'_2 + v'_2;\ \ldots;\ u'_n + v'_n).$$

Так как $u_i = u'_i$ и $v_i = v'_i$, то $u_i + v_i = u'_i + v'_i$; следовательно, вектор $\vec{u'} + \vec{v'}$ является образом вектора $\vec{u} + \vec{v}$.

Аналогично доказывается, что образом произведения $k\vec{u}$ вектора $\vec{u}$ на число k является произведение $k\vec{u'}$ образа $\vec{u'}$ этого вектора на число k.

§ 7. АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

7.1. Определение аффинного преобразования. *Аффинным преобразованием* аффинного пространства A_n называется его изоморфное отображение на себя.

Изоморфное отображение векторного пространства на себя есть его линейное преобразование (1.3). Поэтому можно сказать также, что аффинным преобразованием называется такое преобразование пространства A_n, для которого в связанном с A_n векторном пространстве V_n существует ассоциированное линейное преобразование.

Пример 1. Докажем, что преобразование α пространства A_2, выражаемое в аффинной системе координат формулами

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 1, \\ x'_2 = 2x_2, \end{cases}$$

является аффинным.

Решение. Рассмотрим в связанном с A_2 векторном пространстве V_2 линейное преобразование φ, имеющее формулы

$$\begin{cases} u'_1 = u_1, \\ u'_2 = 2u_2. \end{cases} \tag{1}$$

Оно является ассоциированным с α. Действительно, α отображает произвольные точки $M\ (x_1;\ x_2)$ и $N\ (y_1;\ y_2)$ соответственно на точки $M'\ (x_1 + 1;\ 2x_2)$ и $N'\ (y_1 + 1;\ 2y_2)$; тогда $\overrightarrow{MN} = (y_1 - x_1;\ y_2 - x_2)$

и $\overrightarrow{M'N'} = (y_1 - x_1; 2(y_2 - x_2))$. Так как координаты этих векторов удовлетворяют системе (1), то φ отображает $\overrightarrow{MN}$ на $\overrightarrow{M'N'}$.

Пример 2. Докажем, что преобразование α, выражаемое формулами

$$\begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = x_2 + x_1^2, \end{cases}$$

не является аффинным.

Решение. Нетрудно установить, что α отображает точки $K(0; 0)$, $L(1; 1)$, $M(2; 2)$, $N(3; 3)$ соответственно на точки $K'(0; 0)$, $L'(1; 2)$, $M'(2; 6)$, $N'(3; 12)$ и что $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN} = (1; 1)$, $\overrightarrow{K'L'} = (1; 2)$, $\overrightarrow{M'N'} = (1; 6)$. Таким образом, если бы существовало векторное преобразование φ, ассоциированное с преобразованием α, то оно отображало бы один и тот же вектор $(1; 1)$ на различные векторы $(1; 2)$ и $(1; 6)$, что невозможно.

7.2. Простейшие свойства аффинного преобразования. Так как векторное преобразование, ассоциированное с аффинным преобразованием, является линейным, то оно сохраняет линейную зависимость векторов: векторы, образующие линейно независимую систему, отображаются на векторы, также образующие линейно независимую систему, и коэффициенты в формуле, выражающей линейную зависимость, остаются прежними. Например, если

$$\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_r\vec{u}_r$$

и векторы $\vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ отображаются соответственно на векторы $\vec{v}', \vec{u}_1', \vec{u}_2', \ldots, \vec{u}_r'$, то

$$\vec{v}' = k_1\vec{u}_1' + k_2\vec{u}_2' + \ldots + k_r\vec{u}_r'.$$

Отсюда следует, в частности, что базис векторного пространства V_n, связанного с A_n, отображается также на некоторый базис этого пространства V_n, а подпространство пространства V_n отображается на подпространство той же размерности.

Теорема 1. При аффинном преобразовании пространства A_n любая плоскость отображается на плоскость той же размерности. Аффинное преобразование сохраняет параллельность плоскостей.

Доказательство. Плоскость P_r, натянутая на точку A и подпространство V_r, определялась как множество точек, получаемых при откладывании от A векторов этого подпространства (4.1). Аффинное преобразование отображает A на некоторую точку A', а ассоциированное с ним векторное преобразование отображает V_r на некоторое подпространство V_r', следовательно, P_r отображается на плоскость P_r', натянутую на A' и V_r'.

Параллельность плоскостей (4.4) при аффинном преобразовании сохраняется. Действительно, если ассоциированное с ним векторное преобразование отображает подпространства V_r и W_s соответственно на V'_r и W'_s, а $V_r \subset W_s$, то и $V'_r \subset W'_s$.

Теорема 2. При аффинном преобразовании всякая аффинная система координат

$$O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \tag{1}$$

отображается также на некоторую аффинную систему координат

$$O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n, \tag{2}$$

а любая точка M, имеющая в системе (1) координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отображается на точку M', имеющую координатами в системе (2) соответственно те же числа.

Доказательство. Данное аффинное преобразование отображает начало O на некоторую точку O', а ассоциированное с ним векторное преобразование отображает векторы базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ на некоторые векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$. Так как векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ также составляют базис пространства V_n, связанного с A_n, то первая часть теоремы доказана.

Координаты точки M в системе (1) определяются как коэффициенты разложения

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

Векторное преобразование, ассоциированное с данным аффинным преобразованием, не меняет этих коэффициентов:

$$\overrightarrow{O'M'} = x_1\vec{e}'_1 + x_2\vec{e}'_2 + \ldots + x_n\vec{e}'_n.$$

Таким образом, числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются координатами точки M' в системе (2).

7.3. Другие определения аффинного преобразования. Аффинные преобразования уже рассматривались в разделе «Преобразования плоскости».

При изложении этой темы аффинным обычно называется преобразование, отображающее любую прямую также на прямую и сохраняющее отношение, в котором точка делит отрезок.

Отношение, в котором точка C делит отрезок AB, можно определить как число k такое, что

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}.$$

Это число k называют также *простым отношением трех точек* A, B, C и обозначают через (ABC).

По теореме 1 из 7.2 и вследствие сохранения линейной зависимости векторов преобразование пространства A_n, названное в 7.1 аффинным, отображает прямые на прямые и сохраняет простое отношение трех точек.

Докажем теперь обратную теорему.

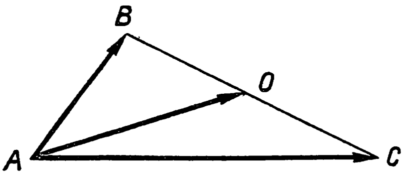


Рис. 12

Теорема. Всякое преобразование пространства A_n, отображающее прямые на прямые и сохраняющее простое отношение трех точек, является аффинным.

Доказательство*. Пусть α — преобразование пространства A_n, обладающее свойствами, перечисленными в условии теоремы. Покажем, что α — аффинное преобразование, т. е. что для α существует ассоциированное векторное преобразование и что это преобразование является изоморфным.

Пусть A, B, C — три произвольные точки пространства A_n (рис. 12). Рассмотрим «середину отрезка BC», т. е. такую точку O, что

$$\overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Имеем:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO}, \qquad (1)$$

так как

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}).$$

Поскольку преобразование α сохраняет простое отношение, то O' — образ точки O — будет серединой отрезка $B'C'$. Поэтому наряду с (1) будем иметь:

$$\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{A'O'}. \qquad (2)$$

Добавим теперь к точкам A, B, C еще одну точку D, притом такую, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 13) или, что равносильно,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Сравнивая это равенство с (1), получим:

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO},$$

откуда следует:

$$\overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{A'O'}$$

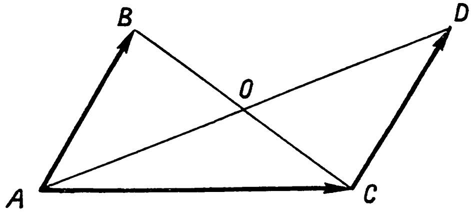


Рис. 13

(ведь α сохраняет простое отношение). Сопоставив это равенство с (2), получим:

$$\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'D'},$$

что равносильно $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$. Таким образом, преобразование α отображает равные векторы на равные. Это значит, что ассоциированное преобразование φ существует.

---

* Предложено А. С. Солодовниковым.

Проверим, что φ — линейное преобразование. Имеем:

$$\varphi(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\varphi(\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}=\varphi(\overrightarrow{AB})+\varphi(\overrightarrow{AC}),$$

а также

$$\varphi(k\overrightarrow{AB})=k\,\varphi(\overrightarrow{AB})$$

(последнее равенство непосредственно следует из того, что α сохраняет простое отношение). Итак, φ линейно. Теперь, чтобы убедиться в том, что φ есть изоморфизм, достаточно проверить, что φ отображает любой ненулевой вектор снова на ненулевой вектор. Но это непосредственно следует из того, что преобразование α отображает две различные точки также на две различные точки.

Теорема доказана.

Из этих двух теорем следует, что определение аффинного преобразования, сформулированное в начале раздела, и определение аффинного преобразования из 7.1 являются эквивалентными. Более того, аффинное преобразование можно определить как такое преобразование пространства A_n, которое отображает прямые на прямые, однако доказательство эквивалентности в этом случае является значительно более сложным.

7.4. Аффинное преобразование в координатах.

Теорема 1. При аффинном преобразовании координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольной точки и координаты $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ ее образа в одной и той же аффинной системе координат связаны формулами вида

$$x'_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j+b_i, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

т. е.

$$\begin{cases} x'_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n+b_1,\\ x'_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2+\ldots+b_{2n}x_n+b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x'_n=b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\ldots+b_{nn}x_n+b_n, \end{cases}$$

при условии

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{2}$$

Доказательство. Выберем в пространстве A_n какую-нибудь аффинную систему координат. Пусть произвольная точка M имеет в этой системе координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а точка M', на которую отображается M при аффинном преобразовании α, имеет в той же системе координаты $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Координаты точки O', на которую α отображает начало координат O, обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (рис. 14).

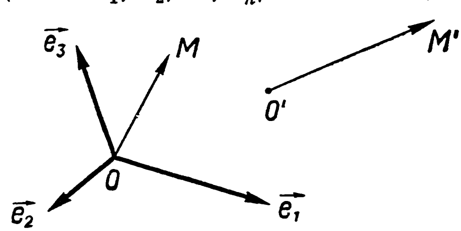


Рис. 14

Векторное преобразование φ, ассоциированное с α, является линейным преобразованием и, следовательно, выражается формулами вида (1) из 1.3

$$u'_i = \sum_{j=1}^{h} b_{ij}u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

при выполнении условия (2). По определению ассоциированного отображения (6.1) φ отображает вектор $\overrightarrow{OM}$ на вектор $\overrightarrow{O'M'}$. Но $\overrightarrow{OM} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $\overrightarrow{O'M'} = (x'_1 - b_1;\ x'_2 - b_2; \ldots; x'_n - b_n)$.

Подставляя координаты этих векторов вместо u_j и u'_i в формулы (3), получим равенства

$$x'_i - b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j,$$

а следовательно, и формулы (1).

Замечание. Следует отличать формулы (1) аффинного преобразования пространства A_n от внешне похожих на них формул преобразования координат из 3.2. Если формулы (3) из 3.2 связывают координаты *одной и той же* точки относительно *различных* систем координат, то формулы (1) связывают координаты, вообще говоря, *различных* точек (произвольной точки и ее образа) относительно *одной и той же* системы координат.

Теорема 2 (обратная). Всякое преобразование аффинного пространства, выражаемое в аффинной системе координат формулами вида (1) при выполнении условия (2), является аффинным.

Доказательство. Пусть V_n — векторное пространство, связанное с данным аффинным пространством A_n. По определению аффинного преобразования (7.1) достаточно показать, что для данного преобразования α существует ассоциированное с ним изоморфное преобразование пространства V_n. Покажем, что таким преобразованием является преобразование φ, выражаемое формулами (3).

Пусть преобразование α отображает произвольные точки

$$M\,(x_1; x_2; \ldots; x_n) \text{ и } N\,(y_1; y_2; \ldots; y_n)$$

соответственно на точки $M'\,(x'_1;\ x'_2; \ldots; x'_n)$ и $N'\,(y'_1; y'_2; \ldots;\ y'_n)$.

Тогда

$\overrightarrow{MN} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; \ldots;\ y_n - x_n)$ и

$\overrightarrow{M'N'} = (y'_1 - x'_1;\quad y'_2 - x'_2; \ldots, y'_n - x'_n)$, но по формулам (1)

$$x'_i = \sum_{j=1}^{h} b_{ij}x_j + b_i, \quad y'_i = \sum_{j=1}^{h} b_{ij}y_j + b_i,$$

откуда

$$y'_i - x'_i = \sum_{j=1}^{h} b_{ij}(y_j - x_j).$$

Таким образом, координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ удовлетворяют уравнениям вида (3). Следовательно, преобразование φ отображает вектор $\overrightarrow{MN}$ на вектор $\overrightarrow{M'N'}$ и поэтому является преобразованием, ассоциированным с α. Так как преобразование φ выражается формулами (3) при выполнении условия (2), то оно является изоморфным.

Следствие. Если аффинное преобразование выражается формулами (1), то ассоциированное с ним векторное преобразование выражается формулами (3).

Пример. С аффинным преобразованием

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - 2x_2 + 3, \\ x'_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ x'_3 = 3x_2 - x_3 + 4 \end{cases}$$

ассоциировано векторное преобразование

$$\begin{cases} u'_1 = u_1 - 2u_2, \\ u'_2 = u_1 + u_2 + u_3, \\ u'_3 = 3u_2 - u_3. \end{cases}$$

Теорема 3. Каковы бы ни были два репера $A, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ и $A', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \ldots, \vec{g}'_n$, существует одно и только одно аффинное преобразование, обладающее тем свойством, что оно отображает точку A на точку A', а ассоциированное с ним векторное преобразование отображает базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ на базис $\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \ldots, \vec{g}'_n$.

Доказательство. Примем репер $A, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ за координатный.

Как известно, в векторном пространстве, связанном с A_n, существует одно и только одно преобразование φ, отображающее базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ на базис $\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \ldots, \vec{g}'_n$ (1.3). Пусть оно выражается формулами (3) при условии (2). Тогда аффинное преобразование α, выражаемое формулами (1), где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — координаты точки A', будет обладать всеми свойствами, перечисленными в теореме. С другой стороны, подставляя координаты точек $A\ (0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ и $A'\ (b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_n)$ в (1), нетрудно убедиться, что α отображает A на A'.

Обратно, любое аффинное преобразование $\widetilde{\alpha}$, обладающее свойствами, указанными в теореме, совпадает с преобразованием (1). Действительно, пусть $\widetilde{\alpha}$ выражается формулами:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}x_j + \widetilde{b}_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ и

$$\begin{vmatrix} \widetilde{b}_{11} & \widetilde{b}_{12} & \ldots & \widetilde{b}_{1n} \\ \widetilde{b}_{21} & \widetilde{b}_{22} & \ldots & \widetilde{b}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \widetilde{b}_{n1} & \widetilde{b}_{n2} & \ldots & \widetilde{b}_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $\widetilde{\alpha}$ отображает A на A', то $\widetilde{b}_i = b_i$. Так как преобразование, ассоциированное с $\widetilde{\alpha}$, отображает $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ соответственно на $\vec{g}_1{}', \vec{g}_2{}', \ldots, \vec{g}_n{}'$, то оно совпадает с φ и $\widetilde{b}_{ij} = b_{ij}$.

Следствие 1. Существует одно и только одно аффинное преобразование, отображающее данную точку A на данную точку A', с которым ассоциировано данное векторное преобразование (3).

Следствие 2. Существует одно и только одно аффинное преобразование пространства A_n, отображающее данные $n + 1$ линейно независимых точек соответственно на другие данные $n + 1$ линейно независимых точек (достаточно учесть теорему из 4.3).

Пример. Аффинное преобразование пространства A_2 вполне определяется заданием двух соответствующих троек линейно независимых точек (т. е. двух соответствующих треугольников).

Упражнения

1. Аффинное преобразование пространства A_3 задано формулами

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4, \\ x_2' = x_2 + x_3 - 2, \\ x_3' = x_2 - x_3. \end{cases}$$

Найдите: а) образ точки (1; 0; 2); б) прообраз точки (2; 2; 0); в) множество неподвижных точек преобразования; г) образ плоскости $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$.

2. Аффинное преобразование пространства A_4 задано формулами

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_3 + 1, \\ x_2' = x_2 + x_3 + x_4 - 3, \\ x_3' = x_3 - x_4 + 2, \\ x_4' = x_3 + x_4 - 1. \end{cases}$$

Найдите: а) множество неподвижных точек преобразования; б) формулы векторного преобразования, ассоциированного с данным преобразованием; в) образ и прообраз вектора (0; 2; 4; 2) при данном векторном преобразовании; г) образ прямой, натянутой на точку (—3; 0; —2; 0) и вектор (4; 2; 2; —1).

3. Найдите формулы аффинного преобразования пространства A_5, с которым ассоциировано векторное преобразование

$$\begin{cases} u_1' = u_1 + u_2, \\ u_2' = u_4, \\ u_3' = u_3, \\ u_4' = u_2, \\ u_5' = u_4 + u_5, \end{cases}$$

а) если это аффинное преобразование отображает начало координат на точку (0; —1; 1; —1; 0); б) если оно отображает точку (0; 1; 2; 3; 4) на точку (4; 3; 2; 1; 0).

4. Найдите формулы аффинного преобразования пространства A_4, при котором точки 0 (0; 0; 0; 0), C_1 (1; 0; 0; 0), C_2 (0; 1; 0; 0), C_3 (0; 0; 1; 0) остаются неподвижными, а точка C_4 (0; 0; 0; 1) отображается на точку C (1; 1; 1; 1).

5. Найдите формулы аффинного преобразования пространства A_3, отображающего репер $A, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ на репер $A', \vec{g}_1', \vec{g}_2', \vec{g}_3'$, если

$$\begin{array}{ll} A\ (3;\ 0;\ 0), & A'\ (-1;\ -2;\ 1), \\ \vec{g}_1 = (0;\ 1;\ -1), & \vec{g}_1' = (3;\ -2;\ 0), \\ \vec{g}_2 = (0;\ 0;\ 2), & \vec{g}_2' = (2;\ 0;\ 4), \\ \vec{g}_3 = (1;\ -1;\ 0), & \vec{g}_3' = (-4;\ 3;\ -2). \end{array}$$

§ 8. ГРУППА АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ЕЕ ПОДГРУППЫ

8.1. Понятие группы преобразований. Приведем некоторые сведения о преобразованиях, известные из курса геометрии.

Если α — преобразование некоторого множества и элемент M' образ элемента M при этом преобразовании, то мы будем писать:

$$M' = \alpha\,(M).$$

Композицией преобразования α и преобразования β (или произведением преобразований α и β) называется преобразование γ, заключающееся в последовательном выполнении сначала преобразования α, а затем преобразования β. Таким образом, для любого элемента M

$$\gamma(M) = \beta(\alpha(M)).$$

Это преобразование γ мы будем обозначать через $\beta \circ \alpha$: $\gamma = \beta \circ \alpha$, так что

$$\beta \circ \alpha(M) = \beta(\alpha(M)).$$

Преобразование называется *обратным* по отношению к преобразованию α и обозначается через α^{-1}, если оно отображает любой элемент на его прообраз относительно преобразования α. Следовательно, если $\alpha(M) = M'$, то $\alpha^{-1}(M') = M$. Тогда

$$\alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} = E,$$

где E — тождественное преобразование.

В алгебре уже было рассмотрено понятие группы. Пусть G — некоторое множество преобразований. Из определения группы следует, что G является группой относительно композиции преобразований, если выполнены следующие условия:

1) композиция любых двух преобразований из G также принадлежит G;

2) для композиций преобразований из G справедлив ассоциативный закон;

3) в G содержится тождественное преобразование (играющее роль единичного элемента);

4) преобразование, обратное любому преобразованию из G, также принадлежит G.

Однако известно, что второе условие выполняется для любых преобразований. С другой стороны, из выполнения первого и четвертого условий следует выполнение третьего условия. Действительно, пусть α — любое преобразование из G; по четвертому условию $\alpha^{-1} \in G$, но тогда по первому условию $E = \alpha^{-1} \circ \alpha \in G$. Следовательно, если мы хотим доказать, что G является группой, то нам достаточно проверить выполнение только первого и четвертого условий:

а) если $\alpha \in G$ и $\beta \in G$, то и $\beta \circ \alpha \in G$;

б) если $\alpha \in G$, то и $\alpha^{-1} \in G$.

Пример. Известно, что линейные преобразования векторного пространства V_n обладают следующими свойствами:

1) композиция любых двух линейных преобразований является также линейным преобразованием;

2) преобразование, обратное любому линейному преобразованию, также является линейным преобразованием.

Таким образом, множество всех линейных преобразований пространства V_n является группой.

8.2. Группа аффинных преобразований.

Теорема. *Множество аффинных преобразований пространства A_n является группой.*

Доказательство. Докажем сначала, что композиция любых двух аффинных преобразований α и β является аффинным преобразованием. Обозначим через φ и ψ векторные преобразования, ассоциированные соответственно с α и β. Пусть M и N — произвольные точки, $\alpha(M) = M'$, $\alpha(N) = N'$, $\beta(M') = M''$, $\beta(N') = N''$. Так как α и β — аффинные преобразования, то по определению (7.1) $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$ и $\psi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{M''N''}$; тогда

$$\beta \circ \alpha(M) = M'', \quad \beta \circ \alpha(N) = N'', \quad \psi \circ \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M''N''}. \qquad (1)$$

Так как φ и ψ — линейные преобразования, то и $\psi \circ \varphi$ — линейное преобразование. Из (1) следует, что $\psi \circ \varphi$ является векторным преобразованием, ассоциированным с преобразованием $\beta \circ \alpha$; по определению из 7.1 $\beta \circ \alpha$ — аффинное преобразование.

Остается доказать, что преобразование α^{-1}, обратное аффинному преобразованию α, также является аффинным преобразованием. Обозначим через φ линейное преобразование, ассоциированное с α. Пусть M и N — произвольные точки, $\alpha^{-1}(M) = M'$, $\alpha^{-1}(N) = N'$; тогда $\alpha(M') = M$, $\alpha(N') = N$, а так как α — аффинное преобразование, то $\varphi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{MN}$, откуда $\varphi^{-1}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$. Следовательно, φ^{-1} — линейное преобразование, ассоциированное с α^{-1}, и α^{-1} — аффинное преобразование.

8.3. Подгруппа параллельных переносов. Преобразование пространства A_n называется *параллельным переносом* на данный вектор $\vec{b}$, если образом любой точки M является такая точка M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{b}$.

Пусть $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $M'(x_1'; x_2'; \ldots; x_n')$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$; тогда по определению параллельного переноса

$$x_i' - x_i = b_i;$$

следовательно, координаты точек при параллельном переносе преобразуются по формулам

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + b_1, \\ x_2' = x_2 + b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n' = x_n + b_n. \end{cases}$$

Эти формулы являются частным случаем формул (1) из 7.4 при

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

По теореме 2 из 7.4 параллельный перенос является аффинным преобразованием. По следствию из этой теоремы векторное преобразование, ассоциированное с параллельным переносом, выражается формулами

$$u_i' = u_i$$

и, следовательно, является тождественным преобразованием.

Композиция параллельного переноса на вектор $\vec{b}$ и параллельного переноса на вектор $\vec{c}$ есть параллельный перенос на вектор $\vec{b} + \vec{c}$, а преобразование, обратное параллельному переносу на вектор $\vec{b}$, есть параллельный перенос на вектор $-\vec{b}$. Следовательно, множество параллельных переносов есть группа; эта группа является подгруппой группы аффинных преобразований.

8.4. Подгруппа гомотетий. *Гомотетией* с центром S и коэффициентом k (где $k \neq 0$) называется преобразование пространства A_n, при котором образом любой точки M является такая точка M', что $\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}$.

Пусть $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $M'(x_1'; x_2'; \ldots; x_n')$ и $S(s_1; s_2; \ldots; s_n)$; тогда

$$x_i' - s_i = k(x_i - s_i),\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

следовательно, координаты точек при гомотетии преобразуются по формулам

$$\begin{cases} x_1' = k(x_1 - s_1) + s_1, \\ x_2' = k(x_2 - s_2) + s_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n' = k(x_n - s_n) + s_n. \end{cases}$$

В частности, если центр гомотетии совпадает с началом координат, то $s_i = 0$, и эти формулы принимают вид

$$x_i' = kx_i.$$

Формулы гомотетии являются частным случаем формул (1) из 7.4 при

$$b_{ij} = \begin{cases} k, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

Следовательно, гомотетия является аффинным преобразованием; ассоциированное с ним векторное преобразование выражается формулами

$$u_i' = ku_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или формулой

$$\vec{u}' = k\vec{u}.$$

Композиция двух гомотетий с коэффициентами p, q и общим центром S есть гомотетия с тем центром S и коэффициентом $k = pq$. Преобразование, обратное гомотетии с центром S и коэффициентом k, есть гомотетия с тем же центром S и коэффициентом $\frac{1}{k}$. Следовательно, множество гомотетий с данным центром S есть группа; эта группа является подгруппой группы аффинных преобразований.

8.5. Подгруппа центроаффинных преобразований. *Центроаффинным преобразованием* с центром S называется аффинное преобразование, оставляющее неподвижной точку S.

Пусть $S(s_1; s_2; \ldots; s_n)$; применим к этой точке формулы (1) из 7.4. Так как точка S неподвижна, то $s_i' = s_i$ и

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}s_j + b_i,$$

откуда

$$b_i = s_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}s_j.$$

Подставив найденные значения в равенства (1) из 7.4, получим формулы центроаффинного преобразования с центром в S:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j - s_j) + s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В частности, если S совпадает с началом координат, то

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j.$$

Композиция аффинных преобразований, оставляющих неподвижной точку S, есть аффинное преобразование, оставляющее неподвижной эту точку. Преобразование, обратное аффинному преобразованию, оставляющему точку S неподвижной, есть аффинное преобразование, также обладающее этим свойством. Таким образом, центроаффинные преобразования с данным центром S составляют группу. Эта группа является еще одним примером подгруппы группы аффинных преобразований.

Теорема. Всякое аффинное преобразование может быть представлено как композиция центроаффинного преобразования и параллельного переноса.

Доказательство. Всякое аффинное преобразование может быть выражено формулами (1) из 7,4; тогда оно является композицией центроаффинного преобразования

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$$

и параллельного переноса

$$x'_i = \tilde{x}_i + b_i.$$

Упражнения

1. Аффинные преобразования α и β пространства A_4 выражаются соответственно формулами

$$\begin{cases} x'_1 = 4 - x_1, \\ x'_2 = x_2 - x_1 + 2, \\ x'_3 = x_3 + x_4 - 1, \\ x'_4 = 2 - x_4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = x_3 + x_4, \\ x'_2 = x_3 + 1, \\ x'_3 = x_2 - 2, \\ x'_4 = x_1 - x_2. \end{cases}$$

Найдите формулы преобразований: а) $\beta \circ \alpha$; б) $\alpha \circ \beta$; в) α^{-1}; г) β^{-1}.

2. Образуют ли группу аффинные преобразования, выражающиеся формулами вида:

а) $\begin{cases} x'_1 = x_1, \\ x'_2 = x_2 + kx_1, \\ x'_3 = x_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_1 = x_1 + k, \\ x'_2 = x_2, \\ x'_3 = x_3, \\ x'_4 = x_4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_1, \\ x'_3 = x_3 + k, \\ x'_4 = x_5, \\ x'_5 = x_4? \end{cases}$

3. Запишите формулы (1) из 7.4 для аффинного преобразования пространства A_3 и установите, какой вид примут эти формулы, если преобразование обладает следующим свойством:

а) оставляет неподвижными точки (0; 0; 0) и (0; 0; 1);

б) оставляет неподвижными все точки плоскости $x_1 = 0$;

в) отображает плоскость $x_1 = 0$ на себя, но может и не оставлять ее точки неподвижными;

г) отображает на себя прямую $x_1 = x_2 = 0$.

Является ли множество преобразований, обладающих каждым из указанных свойств, группой?

§ 9. ПРЕДМЕТ АФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

9.1. Определение аффинной геометрии. Будем называть *фигурой* пространства A_n произвольное множество точек этого пространства. Если какое-нибудь преобразование отображает данную фигуру F

на некоторую фигуру F', то некоторые из свойств фигуры F' могут оказаться такими же, как и у фигуры F, а некоторые — другими. Те свойства фигуры, которые не меняются при данном преобразовании, называются *инвариантными* относительно этого преобразования.

Аффинной геометрией называется наука, которая изучает свойства фигур аффинного пространства A_n, инвариантные относительно любых аффинных преобразований.

Свойства фигур, инвариантные относительно аффинных преобразований, называются *аффинными*; таким образом, аффинная геометрия изучает аффинные свойства фигур. Приведем примеры понятий и теорем аффинной геометрии.

Теорема 1 из 7.2 утверждает, что любое аффинное преобразование отображает r-мерную плоскость также на r-мерную плоскость. Следовательно, свойство точечного множества быть r-мерной плоскостью является аффинным и r-мерная плоскость относится к понятиям аффинной геометрии. Из той же теоремы следует, что параллельность плоскостей является их аффинным свойством.

Другими примерами аффинных понятий могут служить линейно-независимая система точек, простое отношение трех точек прямой, аффинные координаты точки. Все доказанные выше теоремы, выражающие свойства этих понятий, являются теоремами аффинной геометрии. Многие из этих понятий и теорем уже знакомы нам из школьного курса геометрии. Здесь они вводятся для аффинного пространства любой размерности.

9.2. Аффинная эквивалентность фигур. Фигура F_1 называется *аффинно эквивалентной* фигуре F_2, если существует аффинное преобразование, отображающее фигуру F_2 на фигуру F_1.

Так как аффинная геометрия изучает только те свойства фигур, которые не меняются при аффинных преобразованиях, то с точки зрения этой геометрии все свойства аффинно эквивалентных фигур одинаковы (точно так же, как в школьном курсе геометрии конгруэнтные фигуры не отличаются друг от друга по своим свойствам).

Теорема 1. Любые две r-мерные плоскости аффинно эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве A_n две произвольные r-мерные плоскости: плоскость P_r, натянутую на точку A и векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ (4.1), и плоскость P'_r, натянутую на точку A' и векторы $\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_r$. Так как система векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$ линейно независима, то ее можно дополнить векторами $\vec{u}_{r+1}, \ldots, \vec{u}_n$ так, чтобы получился репер $A, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$. Аналогично построим репер $A', \vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n$ и в случае плоскости P'_r (рис. 15). По теореме 3 из 7.4 существует аффинное преобразование, при котором первый из этих двух реперов отображается на второй.

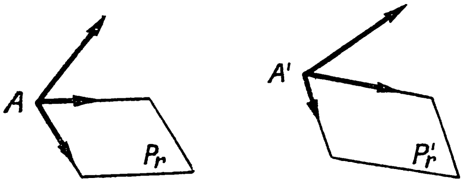


Рис. 15

Тогда, в частности, A, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_r$ отображаются соответственно на A', $\vec{u}'_1$, $\vec{u}'_2$, ..., $\vec{u}'_r$, а следовательно, и плоскость P_r отображается на плоскость P'_r. Таким образом, плоскость P_r аффинно эквивалентна плоскости P'_r.

Теорема 2. Любые две линейно независимые системы, состоящие из одинакового числа точек, аффинно эквивалентны.

Доказательство. Пусть C_0, C_1, ..., C_r — одна из данных систем точек. Дополним совокупность точки C_0 и векторов $\overrightarrow{C_0C_1}$, $\overrightarrow{C_0C_2}$, ..., $\overrightarrow{C_0C_r}$ до репера пространства A_n; аналогично поступим с другой данной системой точек. Аффинное преобразование, при котором один из полученных реперов отображается на другой, является искомым.

Пример. Любые две линейно независимые тройки точек (являющиеся вершинами двух треугольников) аффинно эквивалентны. Линейно независимая тройка точек не может быть аффинно эквивалентной тройке точек, лежащих на одной прямой.

9.3. Отрезок и параллелепипед. Рассмотрим еще ряд понятий аффинной геометрии.

Пусть A и B — две различные точки. Множество точек M таких, что

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \tag{1}$$

при $-\infty < t < +\infty$, есть прямая, натянутая на точку A и вектор $\overrightarrow{AB}$ (4.1). Точки A и B принадлежат этой прямой: если $t = 0$, то $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ и M совпадает с A; если $t = 1$, то $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ и M совпадает с B.

Множество точек M, определяемых уравнением (1) при $0 \leqslant t \leqslant 1$, называется *отрезком* AB.

Точки A и B, получаемые при $t = 0$ и $t = 1$, называются *концами* отрезка. Остальные точки отрезка, получаемые при $0 < t < 1$, называются *внутренними точками* отрезка; в частности, точка, получаемая при $t = \frac{1}{2}$, называется *серединой* отрезка. Внутренние точки отрезка AB называются *лежащими между* A и B.

Если C — середина отрезка AB, то точки A и B называются *симметричными* относительно точки C.

Теорема. Середина отрезка с концами A $(a_1; a_2; ...; a_n)$ и B $(b_1; b_2; ...; b_n)$ имеет координаты

$$\frac{a_1+b_1}{2}, \quad \frac{a_2+b_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n+b_n}{2}.$$

Доказательство. Если $C\ (c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n)$ — середина отрезка AB, то по определению середины отрезка точка M в формуле (1) совпадает при $t = \frac{1}{2}$ с точкой C:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Тогда

$$c_i - a_i = \frac{1}{2}(b_i - a_i),$$

откуда

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Рассмотрим одно из обобщений понятия отрезка.

Пусть в уравнении

$$\overrightarrow{AM} = t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \ldots + t_r\vec{u}_r,$$

определяющем r-мерную плоскость (4.1), каждый из параметров принимает следующие значения:

$$0 \leqslant t_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant t_2 \leqslant 1,\ \ldots,\ 0 \leqslant t_r \leqslant 1.$$

Тогда множество точек M называется *r-мерным параллелепипедом*, натянутым на точку A и векторы $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r$.

Отрезок можно рассматривать как одномерный параллелепипед. Двумерный параллелепипед называется *параллелограммом* (рис. 16).

Все эти понятия являются понятиями аффинной геометрии. Так, например, отрезок при аффинном преобразовании отображается также на некоторый отрезок, причем середина данного отрезка отображается на середину нового отрезка.

Упражнения

1. По образцу определений прямой и отрезка сформулируйте определение луча.

2. Найдите простое отношение точек A, B и C (7.3), если: а) C совпадает с A; б) C — середина отрезка AB.

3. Докажите теоремы:

а) Если точка C лежит между точками A и B, то C лежит между B и A.

б) Для того чтобы точка C лежала между точками A и B, необходимо и достаточно, чтобы $(ABC) > 0$.

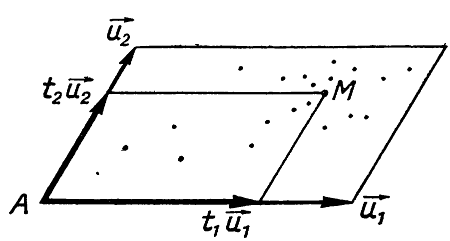


Рис. 16

4. Докажите, что любые два параллелепипеда, имеющие одинаковые размерности, аффинно эквивалентны.

5. В пространстве A_2 даны четыре точки: (0; 0), (1; 0), (0; 1) и (1; 1). Приведите пример четверки точек, которая: а) была бы аффинно эквивалентна данной четверке точек; б) не была бы ей аффинно эквивалентна.

6. Преобразование пространства A_n, при котором образом любой точки является точка, симметричная ей относительно данной точки S, называется *центральной симметрией* относительно S.

а) Запишите формулы центральной симметрии, если S (s_1; s_2; ...; ...; s_n). Какой вид они примут, если S — начало координат?

б) Является ли центральная симметрия аффинным преобразованием?

Глава II

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 10. ЕВКЛИДОВО ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

10.1. Определение евклидова векторного пространства. Понятие евклидова векторного пространства известно из курса алгебры. Вспомним некоторые уже знакомые свойства этого пространства и докажем несколько новых.

Пусть в векторном пространстве V_n (1.1) задана операция скалярного умножения векторов, а именно любым двум векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$ поставлено в соответствие определенное действительное число, которое называется *скалярным произведением* этих векторов; будем обозначать его через $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Векторное пространство V_n называется *n-мерным евклидовым пространством*, если скалярное умножение обладает свойствами, перечисленными в следующих аксиомах:

V. Аксиомы скалярного умножения векторов

Аксиома V_1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Аксиома V_2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Аксиома V_3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Аксиома V_4. Если $\vec{u} \neq \vec{0}$, то $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Таким образом, система аксиом евклидова векторного пространства состоит из четырех групп: трех групп аксиом произвольного векторного пространства (1.1) и группы аксиом скалярного умножения векторов.

Отображение одного евклидова векторного пространства на другое называется *изоморфным*, если оно: 1) является изоморфным отображением в смысле определения из 1.3 и 2) сохраняет скалярные произведения векторов.

Два евклидовых векторных пространства называются *изоморфными*, если одно из них можно изоморфно отобразить на другое. Как и в случае произвольных векторных пространств, необходимым и достаточным условием изоморфизма двух евклидовых векторных пространств является равенство их размерностей.

10.2. Длина вектора. *Длиной* (или модулем) вектора $\vec{u}$ называется арифметический квадратный корень из его скалярного квадрата:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Отсюда следует, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2.$$

Если $\vec{u} = \vec{0}$, то $|\vec{u}| = 0$; если $\vec{u} \neq \vec{0}$, то $|\vec{u}| > 0$.

Теорема. Длины любых двух векторов и модуль их скалярного произведения связаны так называемым *неравенством Коши — Буняковского*:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|.$$

Доказательство. Рассмотрим вектор вида

$$\vec{u} - k\vec{v},$$

где k — произвольное число. Так как

$$(\vec{u} - k\vec{v})^2 \geqslant 0,$$

то

$$\vec{v}^2 k^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} k + \vec{u}^2 \geqslant 0. \qquad (1)$$

В левой части формулы находится трехчлен, квадратный относительно k; он неотрицателен при всех значениях k, следовательно, его дискриминант не может быть положительным:

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - \vec{u}^2\vec{v}^2 \leqslant 0.$$

Отсюда

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leqslant |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$$

и

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|. \qquad (2)$$

Замечание. Докажем, что в формуле (2) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линейно независимы.

Пусть векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линейно независимы. Тогда при любом k вектор $\vec{u} - k\vec{v} \neq \vec{0}$, а квадратный трехчлен в формуле (1) может быть только положительным; поэтому дискриминант его будет отрицательным, а следовательно, и в соотношении (2) окажется лишь знак $<$.

Пусть векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линейно зависимы: $\vec{u} = k\vec{v}$, тогда

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |(k\vec{v}) \cdot \vec{v}| = |k(\vec{v} \cdot \vec{v})| = |k| \cdot |\vec{v}|^2 = |k\vec{v}| \cdot |\vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|.$$

10.3. Угол между векторами. Если $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — ненулевые векторы, то из неравенства Коши — Буняковского следует, что

$$-1 \leqslant \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \leqslant 1;$$

поэтому полученную дробь можно рассматривать как косинус некоторого аргумента Θ. Число Θ, для которого

$$\cos \Theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \ 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi, \tag{1}$$

называется *углом между векторами* $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Если угол между векторами равен $\frac{\pi}{2}$, то векторы называются *ортогональными*. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Если $\Theta = 0$ или $\Theta = \pi$, то $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ и по замечанию из 10.2 $\vec{u} = k\vec{v}$, где $k > 0$ при $\Theta = 0$ и $k < 0$ при $\Theta = \pi$.

Из (1) следует, что

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \Theta.$$

В школьном курсе математики это равенство рассматривается как определение скалярного произведения. При нашем же изложении оно является лишь следствием из определения угла между векторами.

10.4. Ортонормированный базис. Базис евклидова векторного пространства называется *ортонормированным*, если его векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ попарно ортогональны и имеют длины, равные единице. В этом случае

$$\vec{e}_i^{\,2} = 1, \ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{1}$$

Если координаты векторов $\vec{u} = (u_1; u_2; \ldots; u_n)$ и $\vec{v} = (v_1; v_2; \ldots; \ldots; v_n)$ определены относительно ортонормированного базиса, то

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n, \tag{2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}. \tag{3}$$

Формула для угла между векторами тогда принимает вид

$$\cos \Theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\ \sqrt{v_1^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2}},$$

а неравенство Коши — Буняковского записывается следующим образом:

$$(u_1v_1 + \ldots + u_nv_n)^2 \leqslant \left(u_1^2 + \ldots + u_n^2\right)\left(v_1^2 + \ldots + v_n^2\right).$$

Упражнения

1. Найдите угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

а) $\vec{u} = (1; 2; 2; 3)$, $\vec{v} = (3; 1; 5; 1)$;

б) $\vec{u} = (-1; 1; -1; 1; 0)$, $\vec{v} = (2; 0; 1; 0; 2)$.

2. Найдите углы между вектором $\vec{u} = (3; 0; -4; 0)$ и координатными векторами.

§ 11. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

11.1. Ортогональные матрицы. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если обратная ей матрица A^{-1} совпадает с матрицей A^T, получаемой при транспонировании матрицы A, т. е. если

$$A^{-1} = A^T.$$

Это соотношение равносильно любому из следующих равенств:

$$AA^T = E \qquad (1)$$

и

$$A^TA = E, \qquad (2)$$

где E — единичная матрица.

Запишем равенство (1) подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Из правила умножения матриц следует, что

$$\begin{cases} a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = 1, \ i = 1, 2, \ldots, n; \\ a_{i1}\,a_{j1} + a_{i2}\,a_{j2} + \ldots + a_{in}\,a_{jn} = 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \qquad (3)$$

Таким образом, квадратная матрица является ортогональной тогда и только тогда, когда сумма квадратов всех элементов каждой ее строки равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов любых двух ее различных строк равна нулю.

Из (2) следует, что аналогичное утверждение справедливо и для столбцов:

$$\begin{cases} a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \ldots + a_{ni}^2 = 1, \ i = 1, 2, \ldots, n; \\ a_{1i}\,a_{1j} + a_{2i}\,a_{2j} + \ldots + a_{ni}\,a_{nj} = 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \qquad (4)$$

Из соотношений (3) вытекают соотношения (4) и обратно. Отсюда, в частности, следует, что при транспонировании ортогональной матрицы получается также ортогональная матрица.

Так как определители матриц A и A^T равны: $|A| = |A^T|$, то из (1) следует, что $|A|^2 = 1$, т. е. $|A| = \pm 1$.

Таким образом, определитель ортогональной матрицы может быть равен только $+1$ или -1.

Пример. При $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

а условия (3) и (4) принимают вид

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

Этим условиям удовлетворяет, например, матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

11.2. Переход к новому ортонормированному базису.

Теорема. Для того чтобы базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, векторы которого выражаются через векторы некоторого ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ по формулам (1) из 1.2, также был ортонормированным, необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода была ортогональной.

Доказательство. Перепишем формулы (1) из 1.2:

$$\vec{e}_i' = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

тогда

$$\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = (a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n) \cdot (a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nj}\vec{e}_n).$$

Так как базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормированный, то, выполняя умножение и учитывая формулы (1) из 10.4, будем иметь:

$$\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj}. \tag{5}$$

Если базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ ортонормированный,

то

$$\vec{e}_i'^2 = 1, \ \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{6}$$

Тогда из (5) следует (4), и матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

является ортогональной.

Верно и обратное, если матрица (7) ортогональна, то из (4) согласно (5) следует (6), и базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ ортонормированный.

11.3. Ортогональные преобразования. Линейное преобразование φ евклидова векторного пространства V_n называется *ортогональным*, если оно сохраняет длину любого вектора:

$$|\varphi(\vec{u})| = |\vec{u}|.$$

Обозначая $\varphi(\vec{u})$ через $\vec{u}'$, это равенство можно записать следующим образом:

$$|\vec{u}'| = |\vec{u}|.$$

Теорема 1. Ортогональное преобразование сохраняет скалярные произведения векторов.

Доказательство. Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — произвольные векторы.

Тогда

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

или

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2. \tag{1}$$

Аналогично

$$|\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})|^2 = |\varphi(\vec{u})|^2 + 2\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) + |\varphi(\vec{v})|^2. \tag{2}$$

Так как ортогональное преобразование φ является линейным (1.3), то

$$\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{u} + \vec{v}),$$

а так как оно сохраняет длины векторов, то

$$|\varphi(\vec{u} + \vec{v})| = |\vec{u} + \vec{v}|, \ |\varphi(\vec{u})| = |\vec{u}|, \ |\varphi(\vec{v})| = |\vec{v}|;$$

поэтому равенство (2) можно записать в виде

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) + |\vec{v}|^2. \tag{3}$$

Сравнивая (1) и (3), получим, что

$$\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

С л е д с т в и е 1. Ортогональное преобразование сохраняет углы между векторами.

С л е д с т в и е 2. Ортогональное преобразование отображает ортонормированный базис также на ортонормированный.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы линейное преобразование было ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица относительно какого-нибудь ортонормированного базиса была ортогональной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала *необходимость* условия. Пусть линейное преобразование является ортогональным. Рассмотрим какой-нибудь ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Данное преобразование выразится относительно этого базиса формулами (1) из 1.3, оно отобразит базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ по формулам (3) из 1.3 на ортонормированный базис $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$. Согласно теореме из 11.2 матрица (4) из 1.3 должна быть ортогональной. Матрица (2) из 1.3 получается из нее с помощью транспонирования и, следовательно, также является ортогональной.

Докажем теперь *достаточность* условия. Пусть линейное преобразование имеет ортогональную матрицу вида (2) из 1.3 относительно какого-нибудь ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Оно отобразит этот базис на некоторый базис $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$. Коэффициенты в формулах (3) из 1.3 составляют ортогональную матрицу, и по теореме из 11.2 этот базис также будет ортонормированным.

Рассмотрим произвольный вектор

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \ldots + u_n\vec{e}_n;$$

тогда

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Пусть данное линейное преобразование отображает вектор $\vec{u}$ на вектор $\vec{u}\,'$. Так как при линейном преобразовании коэффициенты в формулах, выражающих линейную зависимость векторов, не меняются, то

$$\vec{u}\,' = u_1\vec{e}\,'_1 + u_2\vec{e}\,'_2 + \ldots + u_n\vec{e}\,'_n,$$

откуда

$$|\vec{u}\,'| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Таким образом, $|\vec{u}| = |\vec{u}\,'|$, а это означает, что данное линейное преобразование является ортогональным.

Т е о р е м а 3. Множество ортогональных преобразований векторного евклидова пространства V_n является группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Композиция двух ортогональных преобразований является ортогональным преобразованием. Каждое из этих преобразований не изменяет длин векторов, следовательно, композиция этих преобразований не должна изменять длин векторов. Аналогично и преобразование, обратное ортогональному, также не изменяет длин векторов и, следовательно, является ортогональным преобразованием.

Согласно теореме 1 ортогональное преобразование сохраняет скалярные произведения векторов. Верно и обратное. Линейное преобразование, сохраняющее скалярные произведения векторов, сохраняет и длины векторов:

$$|\vec{u}'| = \sqrt{\vec{u}' \cdot \vec{u}'} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\vec{u}|;$$

следовательно, оно является ортогональным преобразованием. Таким образом, ортогональное преобразование можно определить и как линейное преобразование, сохраняющее скалярные произведения векторов.

Из сказанного в 10.1 тогда следует, что ортогональное преобразование можно определить и как изоморфное отображение евклидова векторного пространства на себя.

Упражнения

1. Укажите, какие из приведенных ниже матриц ортогональны:

а) $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \sin 2 & 0 & \cos 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos 2 & 0 & \sin 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Определите такие a, b, c, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1}{2} & c \end{pmatrix}$$

оказалась ортогональной.

3. При каком условии диагональная матрица является ортогональной?

4. Докажите, что матрица, обратная ортогональной матрице, также является ортогональной.

5. Докажите, что композиция двух ортогональных матриц — ортогональная матрица.

6. Докажите, что любая ортогональная матрица второго порядка может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

§ 12. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

12.1. Определение и простейшие свойства евклидова пространства. Аффинное пространство A_n называется *евклидовым точечным* или просто *евклидовым пространством*, если связанное с ним пространство V_n является евклидовым векторным пространством. Мы будем обозначать n-мерное евклидово пространство через E_n.

Все определения и теоремы, сформулированные для аффинного пространства, справедливы и для евклидова пространства.

Аффинная система координат в евклидовом пространстве называется *прямоугольной декартовой*, если ее координатные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ образуют ортонормированный базис связанного с ним векторного пространства.

Теорема. При переходе от одной из двух прямоугольных декартовых систем координат к другой координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольной точки относительно старой системы выражаются через ее координаты $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ в новой системе формулами вида

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + a_i, \tag{1}$$

где матрица, образованная коэффициентами a_{ij}, является ортогональной.

Эта теорема непосредственно следует из теорем 3.2 и 11.2. Коэффициенты a_{ij} и a_i имеют тот же геометрический смысл, что и в теореме из 3.2.

Пример. Известные из аналитической геометрии на плоскости формулы

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

перехода от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой являются частным случаем формул (1) при $n = 2$ (см. пример из 11.1).

Расстоянием от точки A до точки B пространства E_n называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$. Будем обозначать его через $|AB|$.

Пусть точки A и B заданы своими координатами в какой-нибудь прямоугольной декартовой системе координат:

$$A\,(a_1; a_2; \ldots; a_n) \text{ и } B\,(b_1; b_2; \ldots; b_n).$$

Так как

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ \ldots;\ b_n - a_n),$$

то вследствие (3) из 10.4 расстояние от точки A до точки B выразится формулой

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}.$$

12.2. Неравенство треугольника.

Теорема. Для любых трех точек A, B и C справедливо так называемое *неравенство треугольника*:

$$|AC| \leqslant |AB| + |BC|. \tag{1}$$

Доказательство. По аксиоме IV_2

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \tag{2}$$

откуда

$$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2$$

или

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2.$$

Так как

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \leqslant |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \tag{3}$$

(при $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$ это очевидно, а при $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \geqslant 0$ вытекает из неравенства Коши — Буняковского), то

$$|\overrightarrow{AC}|^2 \leqslant |\overrightarrow{AB}|^2 + 2\,|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}|^2,$$

$$|\overrightarrow{AC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|,$$

т. е.

$$|AC| \leqslant |AB| + |BC|.$$

Замечание. Если B совпадает с A или C, то легко видеть, что в формуле (1) имеет место знак равенства.

Если же B не совпадает ни с A, ни с C, то знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда B лежит на одной прямой с A и C между этими точками. Покажем это.

Пусть в формуле (1) стоит только знак равенства:

$$|AC| = |AB| + |BC|.$$

Из доказательства теоремы видно, что это может быть только тогда, когда формула (3) обращается в равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|. \tag{4}$$

Тогда $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$ и (4) можно записать в виде

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|.$$

По замечанию из 10.2 $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ линейно зависимы: $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB}$; тогда равенство (4) принимает вид

$$k\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|,$$

и, следовательно, $k > 0$. Согласно (2)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (1 + k)\overrightarrow{AB}$$

и

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC}.$$

Так как $k > 0$, то

$$0 < \frac{1}{1+k} < 1;$$

по определению отношения «лежать между» (9.3) B лежит между A и C. Верно и обратное. Пусть B лежит между A и C, т. е. $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$, где $0 < t < 1$. Тогда $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (1 - t)\overrightarrow{AC}$, где $1 - t > 0$. Отсюда

$$|AB| = t\,|AC|, \qquad |BC| = (1 - t)\,|AC|,$$

и, следовательно,

$$|AB| + |BC| = |AC|.$$

12.3. Точечно-векторное евклидово пространство. Совокупность точечного евклидова пространства E_n и связанного с ним евклидова векторного пространства V_n называется иногда n-мерным *точечно-векторным евклидовым пространством.*

Точки и векторы называются *основными объектами* этого пространства.

Операции сложения, умножения вектора на число, скалярного умножения векторов и откладывания вектора устанавливают между основными объектами некоторые отношения. Так, например, складывая два вектора, мы ставим им в соответствие некоторый третий вектор — их сумму. Эти отношения будем называть *основными отношениями* точечно-векторного евклидова пространства.

Свойства основных отношений излагаются в сформулированных ранее *аксиомах*, которые составляют следующие пять групп: I_1, I_2, I_3, I_4 — аксиомы сложения векторов, II_1, II_2, II_3, II_4 — аксиомы умножения вектора на число, III_1, III_2 — аксиомы размерности, IV_1, IV_2 — аксиомы откладывания вектора, V_1, V_2, V_3, V_4 — аксиомы скалярного умножения векторов.

Мы не делали никаких предположений относительно природы основных объектов и не давали их определений, не определялись и основные отношения. Они должны были лишь удовлетворять требованиям, изложенным в аксиомах, все остальные их свойства могли быть какими угодно.

Все другие встречавшиеся нам объекты и отношения определялись через основные. При доказательствах теорем использовались только те свойства основных отношений, которые были перечислены в аксиомах.

Аналогично совокупность аффинного пространства A_n и связанного с ним произвольного векторного пространства V_n называется n-мерным точечно-векторным аффинным пространством. В этом случае основными объектами являются также точки и векторы, но из числа основных отношений евклидова пространства исключается отношение, устанавливаемое операцией скалярного умножения векторов, а к аксиомам относятся только те, которые входят в I, II, III и IV группы.

Упражнения

1. Докажите, что

а) $|AA| = 0$,
б) $|AB| > 0$, если A и B различны;
в) $|AB| = |BA|$.

2. Докажите следующие аналоги известных теорем школьной геометрии:

а) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ ортогональны, то

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2.$$

б) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и вектор $\overrightarrow{AB}$ ортогонален вектору $\overrightarrow{AD}$, то $|AC| = |BD|$.

в) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|AB| = |AD|$, то векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ ортогональны.

г) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, то

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2.$$

д) Если $|AC| = |BC|$, то угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен углу между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3. Даны точки A (3; —1; 3; —1), B (4; 0; 2; 0) и C (3; 1; 3; 1). Найдите расстояния между каждыми двумя из этих точек, а также углы между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ (т. е. найдите длины сторон и величины углов треугольника ABC).

4. В пространстве E_4 даны координаты нового начала и новых координатных векторов:

$$O'(1;\ 2;\ -3;\ 4),\quad \vec{e}_1{}' = \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),$$

$$\vec{e}_2{}' = \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right),\quad \vec{e}_3{}' = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),$$

$$\vec{e}_4{}' = \left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right).$$

Является ли новая система координат прямоугольной декартовой, если старая система — прямоугольная декартова?

Запишите формулы перехода от старой системы координат к новой.

§ 13. ГРУППА ДВИЖЕНИЙ. ПРЕДМЕТ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

13.1. Определение и простейшие свойства движения. *Движением* (перемещением) евклидова пространства E_n называется его аффинное преобразование, не меняющее расстояний между точками.

Из определения расстояния между точками (12.1) следует, что векторное преобразование, ассоциированное с движением, сохраняет длины векторов и, следовательно, является ортогональным преобразованием. Отсюда вытекает, в частности, что при этом преобразовании не меняются скалярные произведения векторов и углы между векторами.

Репер $A, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ в пространстве E_n называется *ортонормированным*, если векторы $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ образуют ортонормированный базис пространства V_n, связанного с E_n. Примером такого репера может служить прямоугольная декартова система координат. Из сказанного выше следует, что при движении ортонормированный репер отображается также на ортонормированный репер.

Теорема 1. При движении пространства E_n координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произвольной точки и координаты $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ ее образа в одной и той же прямоугольной декартовой системе координат связаны формулами вида

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + b_i, \tag{1}$$

где матрица B, составленная из коэффициентов b_{ij}, ортогональна.

Теорема 2. Всякое преобразование пространства E_n, выражаемое формулами вида (1) с ортогональной матрицей B, является движением.

Теорема 3. Движение пространства E_n вполне определяется заданием двух соответствующих ортонормированных реперов.

Теоремы 1, 2, 3 являются непосредственными следствиями аналогичных теорем из 7.4 и теоремы 2 из 11.3.

Определитель матрицы B равен $+1$ или -1 (11.1); в первом случае движение (1) называется движением первого рода, во втором — движением второго рода.

13.2. Другие определения движения. Движение можно определить как преобразование евклидова пространства, сохраняющее расстояния между точками.

Эквивалентность этого определения и определения, данного в 13.1, вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Всякое преобразование евклидова пространства, сохраняющее расстояния между точками, является аффинным.

Доказательство. Пусть данное преобразование евклидова пространства отображает произвольные точки A, B, C, лежащие на одной прямой, соответственно на точки A', B', C'.
Тогда

$$|AC| = |A'C'|, \ |CB| = |C'B'|, \ |AB| = |A'B'|. \tag{1}$$

Согласно теореме из 7.2 достаточно доказать, что точки A', B', C' также лежат на одной прямой и $(ABC) = (A'B'C')$. Предположим для определенности, что C лежит между A и B. По замечанию из 12.2

$$|AC| + |CB| = |AB|,$$

тогда вследствие (1)

$$|A'C'| + |C'B'| = |A'B'|.$$

По этому же замечанию A', B', C' лежат на одной прямой и C' лежит между A' и B'. По определению прямой

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{A'C'} = t'\overrightarrow{C'B'},$$

причем (см. упр. 3 б к § 9)

$$t = (ABC) > 0, \qquad t' = (A'B'C') > 0.$$

Отсюда

$$|AC| = t\,|CB|, \qquad |A'C'| = t'\,|C'B'|;$$

тогда согласно (1) $t = t'$. Теорема доказана.

В конце 10.1 было дано определение изоморфизма евклидовых векторных пространств. По аналогии с определением из 6.1 взаимно однозначное отображение одного из двух евклидовых точечных пространств на другое называется *изоморфным*, если существует ассоциированное с ним изоморфное отображение евклидовых векторных пространств, связанных с данными евклидовыми точечными пространствами. Евклидовы точечные пространства называются *изоморфными*, если одно из них может быть изоморфно отображено на другое. Как и в 6.2, можно доказать, что необходимым и достаточным условием изоморфизма двух точечных евклидовых пространств является равенство их размерностей.

В соответствии со сказанным выше можно определить движение (по аналогии с определением аффинного преобразования из 7.1) как изоморфное отображение евклидова пространства на себя.

13.3. Группа движений и ее подгруппы.

Теорема. Множество движений евклидова пространства E_n является группой.

Доказательство. В соответствии со сказанным в 8.1 докажем сначала, что композиция двух движений также является движением. Так как движения — аффинные преобразования, то по теореме из 8.2 и их композиция — аффинное преобразование. Так как движения не меняют расстояний между точками, то и их композиция не меняет расстояний между точками.

Аналогично показывается, что преобразование, обратное движению, также является движением.

Рассмотрим некоторые подгруппы группы движений пространства E_n.

В 8.3 была рассмотрена группа *параллельных переносов*. Как уже указывалось, формулы параллельного переноса являются частным случаем формул (1) из 7.4 при

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Следовательно, матрица B, составленная из коэффициентов b_{ij}, является в этом случае единичной. Но единичная матрица ортогональна, и по теореме 2 из 13.1 параллельный перенос является движением. Группа параллельных переносов является одной из подгрупп группы движений.

Движение, при котором некоторая точка S отображается на себя, называется *вращением* вокруг центра S. Вращение является частным случаем центроаффинного преобразования (8.5). Его формулы имеют тот же вид, что и формулы центроаффинного преобразования, но матрица B является теперь ортогональной.

Всякое движение может быть представлено как композиция вращения и параллельного переноса. Эта теорема доказывается так же, как и аналогичная теорема из 8.5.

Легко видеть, что вращения с данным центром S составляют группу; эта группа также является подгруппой группы движений.

13.4. Предмет евклидовой геометрии. *Евклидовой геометрией* называется наука, изучающая те свойства фигур евклидова пространства E_n, которые остаются неизменными при любых движениях этого пространства. Элементарная геометрия — это евклидова геометрия пространств E_2 и E_3.

Так как движение является частным случаем аффинного преобразования, то всякое свойство фигуры, сохраняющееся при любых аффинных преобразованиях, будет сохраняться также и при движениях. Поэтому все свойства фигур, изучаемые в аффинной геометрии, изучаются также и в евклидовой геометрии.

Однако не всякое свойство, сохраняющееся при движениях, будет сохраняться и при любых аффинных преобразованиях. Поэтому евклидова геометрия значительно богаче по содержанию, чем аффинная. В ней рассматриваются многие понятия, отсутствующие в аффинной геометрии: «скалярное произведение векторов», «расстояние между точками», «угол между векторами» и т. д.

На многомерные евклидовы пространства могут быть распространены и многие другие понятия элементарной геометрии. Приведем примеры определений таких понятий для евклидова пространства E_n.

Фигура F_1 называется *конгруэнтной* фигуре F_2, если существует движение, отображающее фигуру F_2 на фигуру F_1. С точки зрения евклидовой геометрии конгруэнтные фигуры обладают одинаковыми свойствами.

Гиперсферой или просто *сферой* радиуса R с центром C называется множество точек пространства E_n, находящихся от точки C на расстоянии, равном R. Множество точек, находящихся от точки C на расстоянии, не превышающем R, называется n-мерным *шаром*.

Если векторы, на которые натянут r-мерный параллелепипед, попарно ортогональны и имеют равные длины, то этот параллелепипед называется r-мерным *кубом*.

Две плоскости называются *перпендикулярными*, если любой вектор направляющего подпространства одной из них ортогонален любому вектору направляющего подпространства другой плоскости.

Можно определить также такие понятия, как «расстояние между точкой и r-мерной плоскостью», «объем r-мерного параллелепипеда» и т. д.

Упражнения

1. Является ли движением преобразование пространства E_4, выражаемое в прямоугольной декартовой системе координат формулами:

а) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 1, \\ x_2' = \dfrac{x_2 + x_3}{\sqrt{2}}, \\ x_3' = \dfrac{x_2 - x_3}{\sqrt{2}}, \\ x_4' = x_4 + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = x_2 + x_3 + 1, \\ x_3' = x_3 + x_4 + 2, \\ x_4' = x_4 + x_1 + 3? \end{cases}$

2. При каком условии гомотетия является движением? Как называются те частные случаи гомотетии, которые являются движениями?

3. Докажите, что множество движений 1-го рода является группой.

4. Запишите уравнение гиперсферы с центром $(c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n)$ и радиусом R.

5. Запишите неравенство, которому удовлетворяют координаты точек n-мерного шара с центром $(c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n)$ и радиусом R.

6. Каким неравенствам удовлетворяют координаты точек n-мерного куба, натянутого в E_n на координатные векторы прямоугольной декартовой системы координат?

7. Запишите общее уравнение гиперплоскости, проходящей через точку $(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n)$ перпендикулярно прямой, натянутой на вектор $(u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_n)$.

§ 14. ГРУППА ПОДОБИЙ

14.1. Определение подобия. *Преобразованием подобия* или *подобием* евклидова пространства E_n называется его аффинное преобразование, при котором все расстояния между точками умножаются на одно и то же положительное число k.

Число k называется *коэффициентом подобия*.

Фигура F_1 называется *подобной* фигуре F_2, если существует подобие, отображающее F_2 на F_1.

Движение является подобием с коэффициентом подобия, равным единице.

Теорема. Гомотетия с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$.

Доказательство. Гомотетия с центром $S(s_1; s_2; \ldots; \ldots; s_n)$ и коэффициентом k (8.4) выражается в аффинной, а в частности, и в прямоугольной декартовой системе координат с помощью формул вида

$$x'_i = k(x_i - s_i) + s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть произвольные точки $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $N(y_1; y_2; \ldots; \ldots; y_n)$ отображаются при гомотетии соответственно на точки $M'(x'_1; x'_2; \ldots; x'_n)$ и $N'(y'_1; y'_2; \ldots; y'_n)$. Так как $y'_i - x'_i = [k(y_i - s_i) + s_i] - [k(x_i - s_i) + s_i] = k(y_i - x_i)$, то по формуле из 12.1 для расстояния между точками получим:

$$|M'N'| = \sqrt{k^2(y_1 - x_1)^2 + k^2(y_2 - x_2)^2 + \ldots + k^2(y_n - x_n)^2} =$$

$$= |k| \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} = |k| \cdot |MN|.$$

Это и указывает на справедливость теоремы.

14.2. Группа подобий.

Теорема 1. Множество подобий пространства E_n является группой.

Доказательство. Докажем сначала, что композиция $\mu_2 \circ \mu_1$ подобия μ_1 с коэффициентом k_1 и подобия μ_2 с коэффициентом k_2 является подобием с коэффициентом $k_1 k_2$.

Так как μ_1 и μ_2 — аффинные преобразования, то и $\mu_2 \circ \mu_1$ — аффинное преобразование. Если при подобии μ_1 все расстояния умножаются на k_1, а при подобии μ_2 полученные расстояния умножаются еще и на k_2, то при преобразовании $\mu_2 \circ \mu_1$ все расстояния умножаются на число $k_1 k_2$.

Аналогично получаем, что преобразование μ^{-1}, обратное подобию μ с коэффициентом k, является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Действительно, если μ — аффинное преобразование, то и μ^{-1} — аффинное преобразование, а так как при подобии μ все расстояния умножаются на число k, то при преобразовании μ^{-1} они делятся на k, т. е. умножаются на $\frac{1}{k}$.

Теорема 2. Всякое подобие с коэффициентом k можно представить в виде композиции гомотетии (с тем же коэффициентом k и любым центром) и движения.

Доказательство. Пусть μ — данное подобие с коэффициентом k, γ — упомянутая выше гомотетия с коэффициентом k.

Тогда преобразование γ^{-1} — гомотетия с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Преобразование

$$\delta = \mu \circ \gamma^{-1}, \tag{1}$$

являясь композицией подобий с коэффициентами $\frac{1}{k}$ и k, есть подобие с коэффициентом $\frac{1}{k} \cdot k = 1$, т. е. движение. Из (1) следует, что

$$\delta \circ \gamma = \mu \circ \gamma^{-1} \circ \gamma = \mu;$$

таким образом,

$$\mu = \delta \circ \gamma.$$

14.3. Свойства подобий.

Теорема 1. При подобии с коэффициентом k длины всех векторов умножаются на k, а все скалярные произведения векторов — на k^2.

Доказательство. По теореме 2 из 14.2 данное подобие μ можно представить как композицию движения δ и гомотетии γ с коэффициентом k. Так как векторное преобразование, ассоциированное с движением, является ортогональным преобразованием, то оно не меняет длин и скалярных произведений векторов (11.3). Так как векторное преобразование, ассоциированное с гомотетией γ, имеет вид $\vec{u}' = k\vec{u}$ (8.4), то при этом преобразовании все длины векторов умножаются на k, а все скалярные произведения векторов — на k^2:

$$|\vec{u}'| = k\,|\vec{u}|,$$

$$\vec{u}' \cdot \vec{v}' = (k\vec{u}) \cdot (k\vec{v}) = k^2\,\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Теорема 2. При подобии углы между векторами не меняются.

Доказательство. Пусть векторное преобразование, ассоциированное подобию с коэффициентом k, отображает векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, образующие угол Θ, соответственно на векторы $\vec{u}'$ и $\vec{v}'$, образующие угол Θ'. Тогда

$$\cos\Theta' = \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{|\vec{u}'| \cdot |\vec{v}'|} = \frac{k^2\,\vec{u} \cdot \vec{v}}{k\,|\vec{u}| \cdot k\,|\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos\Theta.$$

Так как $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \Theta' \leqslant \pi$, то отсюда следует, что $\Theta' = \Theta$.

Теорема 3. Подобие с коэффициентом k выражается в прямоугольной декартовой системе координат формулами вида

$$x'_i = k \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + b_i, \tag{2}$$

где коэффициенты b_{ij} составляют ортогональную матрицу.

Доказательство. По теореме 2 из 14.2 данное подобие можно представить как композицию гомотетии с центром в начале координат и с коэффициентом k:

$$\tilde{x}_j = kx_j \tag{3}$$

и движения:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\tilde{x}_j + b_i. \tag{4}$$

Подставляя значения (3) в (4), получим (2).

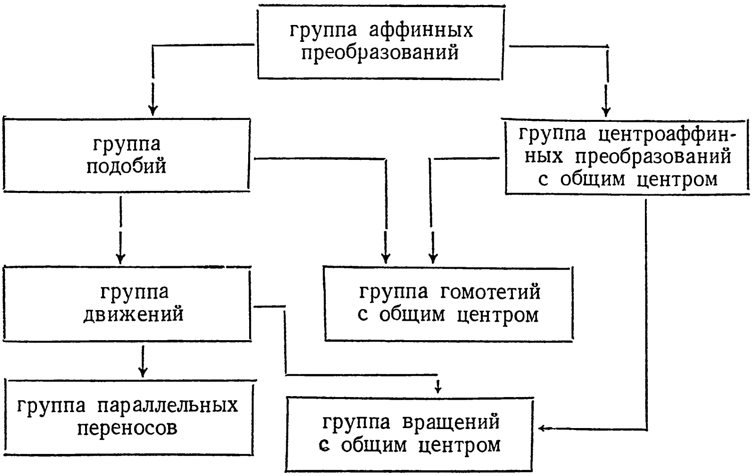
§ 15. ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ГЕОМЕТРИИ

15.1. Определение геометрии по Ф. Клейну. Во второй половине XIX века знаменитый немецкий математик *Феликс Клейн* определил геометрию как науку о свойствах фигур, которые остаются неизменными при всех преобразованиях некоторой группы.

Каждой группе преобразований соответствует своя геометрия; следовательно, можно построить очень много различных геометрий. Например, группе аффинных преобразований соответствует *аффинная геометрия*, изучающая свойства фигур, не меняющиеся при этих преобразованиях. Группе движений соответствует *евклидова геометрия*. Для пространств E_2 и E_3 эта геометрия совпадает с *элементарной геометрией*, изучаемой в средней школе (точнее, элементарная геометрия объединяет геометрию, соответствующую группе движений, и геометрию, соответствующую группе подобий). Так называемая *центроаффинная геометрия* соответствует группе центроаффинных преобразований, имеющих данный центр (8.5). Можно было бы рассмотреть геометрию, изучающую свойства фигур, которые не меняются при параллельных переносах и т. д.

Свойства фигур, сохраняющиеся при всех преобразованиях данной группы, сохраняются, в частности, и при преобразованиях любой ее подгруппы. Обратное неверно: свойства, сохраняющиеся при преобразованиях подгруппы, могут и не сохраняться при преобразованиях всей группы. Поэтому геометрия, соответствующая подгруппе, обычно богаче по содержанию, чем геометрия, соответствующая всей группе.

На приведенной ниже схеме каждая из стрелок указывает на подгруппу соответствующей группы:



Например, группа движений является подгруппой группы аффинных преобразований, и поэтому евклидова геометрия (как это уже отмечалось в 2.2 и 13.4) богаче по содержанию, чем аффинная геометрия. Лишь часть понятий и теорем евклидовой геометрии может быть отнесена и к аффинной. Аффинное преобразование сохраняет параллельность прямых и отображает середину отрезка также на середину отрезка; в связи с этим понятия трапеции, средней линии, теорема о параллельности средней линии трапеции и ее оснований относятся к аффинной геометрии. Но при аффинных преобразованиях могут меняться расстояния между точками и углы между векторами; поэтому, например, теорема Пифагора не является теоремой аффинной геометрии.

15.2. Эквивалентность фигур. Фигура F_1 называется *эквивалентной* фигуре F_2 относительно данной группы преобразований, если в этой группе имеется преобразование, отображающее F_2 на F_1.

Мы уже знакомы из курса алгебры с понятием отношения эквивалентности. Покажем, что эквивалентность фигур относительно данной группы обладает тремя основными свойствами, характеризующими это отношение:

1) Всякая фигура эквивалентна самой себе (свойство *рефлексивности*).

Действительно, любая фигура отображается сама на себя тождественным преобразованием, а это преобразование содержится в любой группе.

2) Если фигура F_1 эквивалентна фигуре F_2, то фигура F_2 эквивалентна фигуре F_1 (свойство *симметрии*).

Если группа содержит преобразование, отображающее F_2 на F_1, то она содержит и обратное преобразование, отображающее F_1 на F_2.

3) Если фигура F_1 эквивалентна фигуре F_2, а фигура F_2 — фигуре F_3, то фигура F_1 эквивалентна фигуре F_3 (свойство *транзитивности*).

Если группа содержит преобразование, отображающее F_2 на F_1, и преобразование, отображающее F_3 на F_2, то она содержит и композицию этих преобразований, отображающую F_3 на F_1.

С точки зрения геометрии, соответствующей данной группе преобразований, эквивалентные фигуры обладают одними и теми же свойствами. В аффинной геометрии эквивалентными являются аффинно эквивалентные фигуры, в евклидовой геометрии — конгруэнтные, в геометрии группы параллельных переносов — фигуры, которые могут быть отображены одна на другую с помощью параллельного переноса, и т. д.

В каждой геометрии все фигуры разбиваются на классы так, что любые две фигуры из одного и того же класса эквивалентны друг другу и, следовательно, не отличаются по своим свойствам, а любые две фигуры из разных классов не эквивалентны между собой. Например, в аффинной геометрии все треугольники образуют один класс, так как любые два треугольника аффинно эквивалентны друг другу; этот класс не содержит других фигур, потому что треугольник может быть аффинно эквивалентен только треугольнику. Но в евклидовой геометрии все треугольники можно разбить на классы так, что любые два треугольника из одного класса будут конгруэнтны друг другу, но не будут конгруэнтны треугольникам из других классов.

Заметим в заключение, что определение геометрии, данное Клейном, не исчерпывает всего богатства содержания современной геометрии, но этому определению удовлетворяют многие важные геометрические теории, например уже известные нам евклидова и аффинная геометрии, а также проективная геометрия и геометрия Лобачевского, которые будут изучаться в дальнейшем. Групповой подход к геометрии позволяет установить связь между различными геометриями и решить ряд других важных проблем.

15.3. Применения многомерных пространств. Возникновение понятия многомерного пространства было вызвано потребностями как самой математики, так и других наук. Многомерные пространства нашли также важные применения в самых различных областях практической деятельности.

Еще из курса средней школы известно, что положение точки на плоскости характеризуется двумя числами — ее координатами; аналогично точка в пространстве определяется тремя числами. Но наряду с этим состояние вещества в замкнутом сосуде определяется двумя величинами — давлением и температурой, любой цвет может быть получен при смешении в определенных соотношениях трех основных цветов — красного, зеленого, синего, а событие характеризуется уже четырьмя числами — временем и тремя координатами точки, в которой оно произошло, и т. д. Множества этих объектов также называют пространствами — двумерным пространством состояний, трехмерным пространством цветов, четырехмерным пространством событий и т. п.

Уже указывалось, что основные объекты и отношения n-мерных аффинных и евклидовых пространств могут иметь самую различную природу; требуется лишь, чтобы выполнялись соответствующие аксиомы. Приведем пример такого конкретного выбора объектов для n-мерного евклидова пространства.

Рассмотрим сеть проводников постоянного тока, состоящую из n однородных проволок, и назовем точкой с координатами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ состояние сети, при котором в этих n проволоках текут токи соответственно с силами $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Во множестве таких точек имеет место евклидова геометрия пространства E_n. Началом координат $(0; 0; \ldots; 0)$ является такое состояние сети, при котором в каждом из проводников ток отсутствует. Расстояние от произвольной точки $(i_1; i_2; \ldots; i_n)$ до начала координат есть квадратный корень из количества теплоты, выделяемого в сети за единицу времени при соответствующем распределении токов. Многие важные физические задачи приобретают тогда простой геометрический смысл. Например, задача о нахождении сил токов по данным величинам напряжений эквивалентна задаче нахождения ортогональной проекции начала координат на некоторую плоскость.

Наряду с этим существуют множества, которые нельзя рассматривать как n-мерные евклидовы пространства, хотя они и имеют с такими пространствами целый ряд общих свойств. Например, можно ввести понятия расстояний между двумя цветами или двумя событиями, но свойства этих понятий будут в той или иной степени отличаться от свойств расстояния между точками евклидова пространства. С некоторыми из таких множеств читатель встретится в дальнейшем при изучении так называемых неевклидовых пространств.

Упражнения

1. Какие из следующих понятий школьной геометрии являются одновременно и понятиями аффинной геометрии: а) трапеция; б) параллелограмм; в) квадрат; г) ромб; д) окружность; е) медиана; ж) биссектриса; з) высота; и) подобные треугольники; к) гомотетичные треугольники?

2. Какие из следующих теорем школьной геометрии относятся и к аффинной геометрии: а) теорема о параллельности средней линии треугольника и его соответствующей стороны; б) теорема о конгруэнтности вертикальных углов; в) теорема о том, что диагонали параллелограмма при пересечении делятся пополам; г) теорема синусов; д) теорема о пересечении медиан треугольника; е) теорема о пересечении высот треугольника?

3. Какие из свойств квадрата сохраняются при аффинных преобразованиях, а какие могут нарушаться?

Глава III

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 16. ПОНЯТИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

16.1. Определение квадратичной формы. *Квадратичной формой* от переменных x_1, x_2, ..., x_n называется однородный многочлен второй степени относительно этих переменных.

Таким образом, каждый член квадратичной формы содержит или квадрат одной из переменных, или произведение двух разных переменных.

Переменные x_1, x_2, ..., x_n можно рассматривать как аффинные координаты точки $(x_1; x_2; ...; x_n)$ пространства A_n или как координаты вектора $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ пространства V_n. Будем обозначать квадратичную форму от переменных x_1, x_2, ..., x_n через $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или просто через f.

Пример 1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2$ — квадратичная форма от переменных x_1 и x_2,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5x_2x_3 -$$

квадратичная форма от переменных x_1, x_2 и x_3.

Если в квадратичной форме уже выполнено приведение подобных членов, то коэффициент при x_i^2 обозначают через c_{ii}, а коэффициент при x_ix_j, где $i \neq j$, — через $2c_{ij}$ и пишут:

$$2c_{ij}x_ix_j = c_{ij}x_ix_j + c_{ji}x_jx_i,$$

считая

$$c_{ij} = c_{ji}.$$

Тогда квадратичную форму можно записать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(c_{i1}x_ix_1 + c_{i2}x_ix_2 + ... + c_{in}x_ix_n) =$$

$$\begin{aligned} &= c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + ... + c_{1n}x_1x_n + \\ &+ c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 + ... + c_{2n}x_2x_n + \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ c_{n1}x_nx_1 + c_{n2}x_nx_2 + ... + c_{nn}x_nx_n. \end{aligned} \tag{1}$$

П р и м е р 2.

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{2}(c_{i1}x_ix_1 + c_{i2}x_ix_2) = (c_{11}x_1x_1 +$$

$$+ c_{12}x_1x_2) + (c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2) = c_{11}x_1^2 + (c_{12} + c_{21})\, x_1x_2 + c_{22}x_2^2;$$

так как $c_{12} = c_{21}$, то

$$f(x_1, x_2) = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей квадратичной формы* (1). Так как $c_{ij} = c_{ji}$, то эта матрица *симметрическая*: ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

П р и м е р 3. Квадратичные формы, рассмотренные в примерах 1 и 2, имеют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

16.2. Линейное преобразование переменных. *Линейным преобразованием переменных* называется такой переход от системы n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ к системе n переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$, при котором старые переменные выражаются через новые при помощи линейных формул

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = x_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (2)$$

где коэффициенты a_{ij} образуют невырожденную матрицу.

Если переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ рассматривать как координаты вектора пространства V_n относительно некоторого базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, то это преобразование можно истолковать как переход в V_n к новому базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$, относительно которого этот вектор имеет координаты $y_1, y_2, \dots, y_n$ (см. 1.2).

Выполняя последовательно сначала переход от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \ldots, \vec{e}_n^{\,\prime}$, а затем от базиса $\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \ldots, \vec{e}_n^{\,\prime}$ к базису $\vec{e}_1^{\,\prime\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime\prime}, \ldots, \vec{e}_n^{\,\prime\prime}$, мы совершаем переход от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1^{\,\prime\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime\prime}, \ldots, \vec{e}_n^{\,\prime\prime}$. Следовательно, композиция двух линейных преобразований n переменных есть также линейное преобразование n переменных. Аналогично для любого линейного преобразования n переменных существует обратное преобразозание, которое также является линейным преобразованием n переменных. Таким образом, множество линейных преобразований n переменных является группой.

16.3. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. В дальнейшем мы будем рассматривать квадратичные формы и линейные преобразования только с действительными коэффициентами. Будем считать, что и переменные принимают лишь действительные значения.

Если в квадратичной форме (1) переменные подвергнуть линейному преобразованию (2), то получится квадратичная форма от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с новыми коэффициентами. В § 17 будет показано, что при надлежащем выборе преобразования (2) любую квадратичную форму (1) можно привести к виду, содержащему только квадраты новых переменных:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2.$$

Такой вид квадратичной формы называется *каноническим*; матрица формы в этом случае является диагональной:

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & c_n \end{pmatrix}.$$

Если, в частности, коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ равны $+1$, -1 или 0, то этот вид квадратичной формы называется ее *нормальным* видом.

Пример. Известно, что уравнение центральной кривой 2-го порядка

$$c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + c_{33} = 0$$

с помощью перехода к новой системе координат по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

можно привести к виду

$$c'_{11}x'^2 + c'_{22}y'^2 + c_{33} = 0.$$

Квадратичная форма

$$c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2$$

при этом принимает канонический вид.

Упражнения

1. По образцу примера 2 из 16.1 запишите квадратичную форму от трех переменных.

2. Докажите справедливость равенства

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_i x_j.$$

3. Запишите матрицы квадратичных форм:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2x_3$;

б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_4 - 3x_2x_4$.

4. Покажите, что квадратичная форма

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

может быть приведена к каноническому виду с помощью следующего преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2, \\ x_2 = y_1. \end{cases}$$

§ 17. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

17.1. Теорема о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Лемма 1. Если квадратичная форма

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j \tag{1}$$

не содержит квадратов переменных, то с помощью линейного преобразования ее можно перевести в форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной.

Доказательство. По условию квадратичная форма содержит только члены с произведениями переменных. Пусть при каких-нибудь различных значениях i и j $c_{ij} \neq 0$, т. е. $2c_{ij}x_i\, x_j$ — один из таких членов. Если выполнить линейное преобразование

$$\begin{cases} x_i = y_i + y_j, \\ x_j = y_i - y_j, \\ x_k = y_k \text{ при всех } k \neq i \text{ и } k \neq j \end{cases}$$

(его определитель не равен нулю), то в квадратичной форме появятся даже два члена с квадратами переменных:

$$2c_{ij}x_ix_j = 2c_{ij}(y_i + y_j)(y_i - y_j) = 2c_{ij}y_i^2 - 2c_{ij}y_j^2.$$

Эти слагаемые не могут исчезнуть после приведения подобных членов, так как любое из остальных слагаемых содержит хотя бы одну переменную, отличную от y_i или y_j.

Пример. $f = 3x_1x_4 - 5x_2x_3 + 4x_2x_4$.

Решение. Так как, например, $c_{14} = \frac{3}{2} \neq 0$, то можно положить

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_4, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_1 - y_4. \end{cases}$$

Определитель этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

и соответствующее преобразование является линейным. Квадратичная форма принимает вид

$$f = 3y_1^2 - 3y_4^2 - 5y_2y_3 + 4y_1y_2 - 4y_2y_4.$$

Лемма 2. Если квадратичная форма (1) содержит член с квадратом переменной, например член $c_{ii}x_i^2$, и еще хотя бы один член с этой переменной x_i, то с помощью линейного преобразования данную квадратичную форму можно перевести в форму от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, имеющую вид

$$f = d_{ii}y_i^2 + g, \tag{2}$$

где g — квадратичная форма, не содержащая переменной y_i.

Доказательство. Выделим в квадратичной форме (1) сумму членов, содержащих переменную x_i:

$$f = 2c_{i1}x_ix_1 + 2c_{i2}x_ix_2 + \ldots + c_{ii}x_i^2 + \ldots + 2c_{in}x_ix_n + g_1, \tag{3}$$

где через g_1 обозначена сумма всех остальных членов (не содержащих переменную x_i). Введем также обозначение:

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{ii}x_i + \ldots + c_{in}x_n.$$

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с удвоенными произведениями каждого члена на каждый из последующих. Следовательно, если в выражении для y_i^2 выделить сумму членов, содержащих переменную x_i, то эта сумма будет содержать квадрат члена $c_{ii}x_i$ и удвоенные произведения этого члена $c_{ii}x_i$ на остальные члены многочлена:

$$\begin{aligned} y_i^2 = 2c_{ii}x_i \cdot c_{i1}x_1 + 2c_{ii}x_i \cdot c_{i2}x_2 + \ldots + \\ + c_{ii}^2x_i^2 + \ldots + 2c_{ii}x_i \cdot c_{in}x_n + g_2, \end{aligned} \tag{4}$$

где g_2 — сумма членов, не содержащих переменную x_i.

Разделим обе части (4) на c_{ii} и вычтем полученное равенство из (3). После приведения подобных членов будем иметь:

$$f - \frac{1}{c_{ii}} y_i^2 = g_1 - \frac{1}{c_{ii}} g_2.$$

Выражение в правой части не содержит переменной x_i и является квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, \ldots, x_n$. Обозначим его через g, а коэффициент $\frac{1}{c_{ii}}$ — через d_{ii}. Тогда

$$f = d_{ii} y_i^2 + g.$$

Если произвести линейное преобразование

$$\begin{cases} y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n, \\ y_k = x_k \text{ при всех } k \neq i \end{cases}$$

(определитель которого не равен нулю), то g будет квадратичной формой от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ и квадратичная форма f окажется приведенной к виду (2).

Теорема. Всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду с помощью линейного преобразования переменных.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Квадратичная форма от одной переменной x_1 имеет вид $c_{11}x_1^2$, уже являющийся каноническим. Предположим, что эта теорема верна для квадратичных форм от $n-1$ переменных, и докажем, что она будет верна тогда и для квадратичных форм от n переменных.

Если квадратичная форма (1) не содержит квадратов переменных, то по лемме 1 ее можно с помощью линейного преобразования перевести в квадратичную форму, содержащую квадрат хотя бы одной переменной. По лемме 2 полученную квадратичную форму можно представить в виде (2). Так как квадратичная форма g в равенстве (2) зависит от $n-1$ переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, то по сделанному предположению она может быть приведена к каноническому виду линейным преобразованием этих переменных. От переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ мы перейдем при этом к новым переменным $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n$. Если к формулам этого перехода добавить еще и формулу $y_i = z_i$, то получатся формулы линейного преобразования, которое приводит к каноническому виду квадратичную форму $d_{ii}y_i^2 + g$, содержащуюся в равенстве (2).

Композиция всех рассмотренных преобразований переменных является искомым линейным преобразованием, приводящим к каноническому виду данную квадратичную форму (1).

Если квадратичная форма (1) содержит квадрат какой-нибудь переменной, то лемму 1 применять не нужно.

17.2. Способы приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному виду. Способ, использованный при доказательстве теоремы из 17.1, был предложен известным французским математиком *Лагранжем*. Этот способ может быть применен и для практического приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Если данная квадратичная форма от n переменных не содержит квадратов переменных, то с помощью линейного преобразования, примененного при доказательстве леммы 1, переходим к квадратичной форме, содержащей квадраты переменных. Затем с помощью линейного преобразования, рассмотренного при доказательстве леммы 2, представляем квадратичную форму в виде суммы члена с квадратом какой-нибудь переменной и квадратичной формы от остальных $n-1$ переменных. Применив снова этот же прием к полученной квадратичной форме, получаем еще один член с квадратом другой переменной и квадратичную форму от остальных $n-2$ переменных. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получится квадратичная форма, содержащая только члены с квадратами переменных.

От канонического вида квадратичной формы

$$c_1v_1^2 + c_2v_2^2 + \ldots + c_mv_m^2,$$

где $m \leqslant n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_m$ отличны от нуля, можно перейти к нормальному виду

$$\varepsilon_1w_1^2 + \varepsilon_2w_2^2 + \ldots + \varepsilon_mw_m^2$$

(где $\varepsilon_i = 1$ при $c_i > 0$ и $\varepsilon_i = -1$ при $c_i < 0$) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{|c_1|}}\, w_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_m = \dfrac{1}{\sqrt{|c_m|}}\, w_m, \\ v_{m+1} = w_{m+1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = w_n. \end{cases}$$

Пример. Приведем к каноническому виду следующую квадратичную форму:

$$f = x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3. \qquad (1)$$

Решение. 1) Так как форма содержит член x_1^2, то леммы 1 применять не нужно. Если бы остальные члены не содержали x_1, то один из квадратов был бы уже выделен и можно было бы сразу приводить к каноническому виду сумму этих остальных членов.

Но, кроме x_1^2, есть и еще члены, содержащие переменную x_1. Как и при доказательстве леммы 2, выделяем их сумму:

$$f = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 11x_3^2 - 6x_2x_3;$$

$$i = 1,\ c_{11} = 1,\ c_{12} = -1,\ c_{13} = 2;$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = x_1 - x_2 + 2x_3,$$

$$y_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3;$$

$$\frac{1}{c_{11}} = 1, \qquad f - y_1^2 = -x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_2x_3;$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3; \end{cases} \tag{2}$$

$$f = y_1^2 + (-y_2^2 + 7y_3^2 - 2y_2y_3).$$

2) Снова применяем лемму 2, на этот раз — к квадратичной форме

$$g = -y_2^2 + 7y_3^2 - 2y_2y_3.$$

Выделяем члены, содержащие переменную y_2:

$$g = (-y_2^2 - 2y_2y_3) + 7y_3^2;$$

$$i = 2,\ d_{22} = -1,\ d_{23} = -1.$$

$$v_2 = d_{22}y_2 + d_{23}y_3 = -y_2 - y_3,$$

$$v_2^2 = y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2;$$

$$\frac{1}{d_{22}} = -1,\ g + v_2^2 = 8y_3^2;$$

$$\begin{cases} v_1 = y_1, \\ v_2 = -y_2 - y_3, \\ v_3 = y_3; \end{cases} \tag{3}$$

$$g = -v_2^2 + 8v_3^2.$$

Так как

$$f = y_1^2 + g,$$

то

$$f = v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2. \tag{4}$$

Таким образом, квадратичная форма (1) приведена к каноническому виду.

3) Чтобы получить линейное преобразование, непосредственно приводящее данную квадратичную форму (1) к каноническому виду (4), найдем сначала преобразования, обратные преобразованиям (2) и (3):

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 2y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = v_1, \\ y_2 = -v_2 - v_3, \\ y_3 = v_3, \end{cases}$$

а затем композицию полученных преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 - v_2 - 3v_3, \\ x_2 = -v_2 - v_3, \\ x_3 = v_3. \end{cases} \tag{5}$$

Если подставить полученные значения x_1, x_2, x_3 в форму (1), то сразу придем к форме (4).

4) От канонического вида (4) с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} v_1 = w_1, \\ v_2 = w_2, \\ v_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3 \end{cases}$$

можно перейти к нормальному виду

$$f = w_1^2 - w_2^2 + w_3^2. \tag{6}$$

Линейное преобразование, непосредственно приводящее форму (1) к виду (6), выражается формулами

$$\begin{cases} x_1 = w_1 - w_2 - \dfrac{3}{2\sqrt{2}} w_3, \\ x_2 = - w_2 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3, \\ x_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} w_3. \end{cases}$$

Рассмотренную выше квадратичную форму можно было бы привести к каноническому виду и другим способом, непосредственно выделяя полные квадраты:

$$\begin{aligned} f = x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 = 2x_1^2 + \\ + 4x_1x_3 + 2x_3^2 + 9x_3^2 - 6x_2x_3 + x_2^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1^2 = \\ = 2(x_1 + x_3)^2 + (3x_3 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2. \end{aligned}$$

Линейное преобразование

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_3, \\ z_2 = 3x_3 - x_2, \\ z_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

также приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$f = 2z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Таким образом, приводя квадратичную форму к каноническому виду различными способами, можно получить разные ответы. Это следует иметь в виду при решении примеров.

Упражнения

1. Найдите канонический вид квадратичной формы:

а) $3x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2$;
б) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;
в) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

2. Найдите нормальный вид квадратичной формы:

а) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
б) $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$.

3. Приведите квадратичную форму к нормальному виду и найдите формулы соответствующего линейного преобразования:

а) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
б) $9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$;
в) $4x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;
г) $-x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 14x_1x_3 + 36x_2x_3$;
д) $x_1^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$;
е) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
ж) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$;
з) $x_1^2 + 4x_2^2 - 9x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 4x_1x_2 - 2x_4x_5$.

§ 18. ЗАКОН ИНЕРЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

18.1. Закон инерции. При решении примера в 17.2 мы привели одну и ту же квадратичную форму к каноническому (а в частности, и к нормальному) виду различными способами, получив при этом квадратичные формы с различными коэффициентами:

$$v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2, \quad w_1^2 - w_2^2 + w_3^2, \quad 2z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Однако число членов с положительными коэффициентами, а также число членов с отрицательными коэффициентами во всех случаях оказалось одинаковым. Это не случайно. Чтобы подчеркнуть неизменность указанных чисел, соответствующее свойство квадратичных форм называют *законом инерции*. Оно выражается следующей теоремой.

Теорема. Если данная квадратичная форма приведена к каноническому виду с помощью двух различных линейных преобразований, то число положительных коэффициентов при квадратах новых переменных, так же как и число отрицательных коэффициентов, будет в обоих случаях одно и то же.

Пусть данная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приведена с помощью двух линейных преобразований

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j, \tag{1}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_j \qquad (2)$$

соответственно к видам

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 v_1^2 + \ldots + c_p v_p^2 - c_{p+1} v_{p+1}^2 - \ldots - c_{p+q} v_{p+q}^2, \qquad (3)$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = d_1 w_1^2 + \ldots + d_r w_r^2 - d_{r+1} w_{r+1}^2 - \ldots - d_{r+s} w_{r+s}^2, \qquad (4)$$

где

$$c_k > 0;\ k = 1, \ldots, p+q; \qquad p + q \leqslant n;$$

$$d_e > 0;\ e = 1, \ldots, r+s; \qquad r + s \leqslant n.$$

Требуется доказать, что $p = r$ и $q = s$. Докажем, что $p = r$. То, что $q = s$, доказывается аналогично.

Доказательство. Предположим, например, что $p < r$.

Так как преобразование, обратное линейному, является линейным, то, решая системы уравнений (1) и (2) относительно v_i и w_i, получим:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j, \qquad (5)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} x_j. \qquad (6)$$

Определим числовые значения $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ старых переменных так, чтобы они не все были равны нулю и чтобы соответствующие им по формулам (5) и (6) числовые значения $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ и $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n$ новых переменных удовлетворяли условиям

$$\tilde{v}_1 = 0, \ \ldots, \ \tilde{v}_p = 0, \qquad (7)$$

$$\tilde{w}_{r+1} = 0, \ldots, \ \tilde{w}_n = 0. \qquad (8)$$

Как следует из (5) и (6), искомые значения должны удовлетворять следующей системе линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \ldots + A_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{p1}x_1 + A_{p2}x_2 + \ldots + A_{pn}x_n = 0, \\ B_{r+1,1}\,x_1 + B_{r+1,2}\,x_2 + \ldots + B_{r+1,n}\,x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n1}x_1 + B_{n2}x_2 + \ldots + B_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Так как $p < r$, то число уравнений этой системы меньше числа неизвестных:

$$p + (n - r) = n - (r - p) < n.$$

Следовательно, эта система имеет бесконечное множество решений в том числе и ненулевые. Пусть $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ — какое-нибудь из этих ненулевых решений.

Эти значения $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ и являются искомыми. Подставим их в равенства (3) и (4), учтя при этом условия (7) и (8):

$$f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = -c_{p+1}\tilde{v}_{p+1}^2 - \ldots - c_{p+q}\tilde{v}_{p+q}^2,$$

$$f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = d_1\tilde{w}_1^2 + \ldots + d_r\tilde{w}_r^2.$$

Отсюда

$$-c_{p+1}\tilde{v}_{p+1}^2 - \ldots - c_{p+q}\tilde{v}_{p+q}^2 = d_1\tilde{w}_1^2 + \ldots + d_r\tilde{w}_r^2$$

или

$$c_{p+1}\tilde{v}_{p+1}^2 + \ldots + c_{p+q}\tilde{v}_{p+q}^2 + d_1\tilde{w}_1^2 + \ldots + d_r\tilde{w}_r^2 = 0.$$

Так как ни одно из этих слагаемых не отрицательно, то полученное равенство может оказаться справедливым лишь при

$$\tilde{v}_{p+1} = 0, \ \ldots, \ \tilde{v}_{p+q} = 0,$$

$$\tilde{w}_1 = 0, \ \ldots, \ \tilde{w}_r = 0. \qquad (9)$$

Сравнивая равенства (8) и (9), замечаем, что $\tilde{w}_1 = \ldots = \tilde{w}_n = 0$. Подставляя эти значения в (2), получим, что $\tilde{x}_1 = \ldots = \tilde{x}_n = 0$, в то время как эти значения должны быть не все равны нулю.

Полученное противоречие является следствием предположения о том, что $p < r$. К такому же противоречию мы придем, предположив, что $p > r$. Следовательно, $p = r$.

Теорема доказана.

18.2. Ранг и положительный индекс квадратичной формы. Из закона инерции следует, что число p положительных, число q отрицательных, а значит, и число $p + q$ всех ненулевых членов в каноническом виде (3) квадратичной формы не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду.

Число всех ненулевых членов в каноническом виде квадратичной формы называется *рангом* этой формы, а число положительных членов — ее *положительным индексом*.

Можно доказать, что, к каким бы переменным ни была отнесена квадратичная форма, ранг этой формы и ранг ее матрицы одинаковы.

18.3. Положительно определенные квадратичные формы. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если при любых одновременно не равных нулю значениях переменных ее значения положительны.

Примеры. 1) Квадратичная форма

$$2x_1^2 + 3x_2^2$$

от двух переменных является положительно определенной.

2) Квадратичная форма

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$$

не является положительно определенной, так как при $x_1 = -x_2$ она принимает нулевое значение.

3) Квадратичная форма

$$x_1^2 - x_2^2$$

может принимать значения с любым знаком, следовательно, она также не является положительно определенной.

Теорема. Для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы ее положительный индекс был равен n.

Доказательство. Пусть квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приведена к каноническому виду

$$c_1v_1^2 + c_2v_2^2 + \ldots + c_n v_n^2.$$

Если $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ — какие-нибудь значения старых переменных, не все равные нулю, то и соответствующие им значения $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ новых переменных не все равны нулю. Действительно, если предположить, что $\tilde{v}_1 = \ldots = \tilde{v}_n = 0$, то, подставляя эти значения в формулу (1) из 18.1, получим, что и $\tilde{x}_1 = \ldots = \tilde{x}_n = 0$. Аналогично, если не все $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ равны нулю, то согласно формуле (5) из 18.1 также и не все $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ равны нулю. Для этих значений

$$f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = c_1\tilde{v}_1^2 + c_2\tilde{v}_2^2 + \ldots + c_n\tilde{v}_n^2. \qquad (1)$$

Докажем теперь *необходимость* условия. Пусть квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ положительно-определенная. Если положить

$$\tilde{v}_1 = 1,\ \tilde{v}_2 = \ldots = \tilde{v}_n = 0,$$

то из (1) следует, что $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) = c_1$. Так как квадратичная форма положительно определенная, то $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) > 0$, а следовательно, и $c_1 > 0$. Аналогично получим, что $c_2 > 0, \ldots, c_n > 0$, но это и означает, что положительный индекс данной квадратичной формы равен n.

Переходим к доказательству того, что условие является также и *достаточным*. Пусть положительный индекс квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ равен n, т. е. $c_1 > 0, c_2 > 0, \ldots, c_n > 0$. Для любых значений $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, одновременно не равных нулю, соответствующие значения $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ также не все равны нулю, но тогда из (1) следует, что $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) > 0$, т. е. что квадратичная форма $f(x_1, \ldots, \ldots, x_n)$ положительно определенная.

Пример. Установим, является ли положительно определенной квадратичная форма

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Решение. В упражнении 4 из § 16 указано преобразование переменных, с помощью которого эта квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$2y_1^2 + 4y_2^2.$$

По только что доказанной теореме она является положительно-определенной. Этот факт можно было бы установить и непосредственно, представив квадратичную форму в виде

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2.$$

Упражнения

Установите, являются ли положительно определенными следующие квадратичные формы от двух переменных:

1) $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$;
2) $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$;
3) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$.

§ 19. ПОНЯТИЕ КВАДРИКИ

19.1. Определение квадрики. *Квадрикой* в аффинном пространстве A_n называется множество точек, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени.

В общем виде уравнение квадрики может быть записано следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) + 2f_1(x_1, \ldots, x_n) + c = 0, \qquad (1)$$

где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — сумма членов второй степени, т. е. некоторая квадратичная форма:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad c_{ij} = c_{ji},$$

$f_1(x_1, \ldots, x_n)$ — сумма членов первой степени (так называемая линейная форма):

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

а c — свободный член.

Покажем, что понятие квадрики не зависит от выбора системы координат.

Теорема. Если множество точек в некоторой аффинной системе координат определяется уравнением второй степени, то оно будет определяться уравнением второй степени и в любой другой аффинной системе координат.

Доказательство. Если множество точек задано в старой системе координат уравнением (1), то для получения уравнения данного множества в новой системе достаточно подставить в это уравнение выражения старых координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через новые координаты $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ по формулам (3) из 3.1. При этом не могут получиться члены степени выше второй, т. е. степень уравнения не может повыситься.

Степень уравнения не может и понизиться. Действительно, если бы степень нового уравнения оказалась ниже второй, то при обратном переходе от этого уравнения к уравнению (1) степень уравнения стала бы равной двум, т. е. повысилась; но выше уже было доказано, что это невозможно.

Примеры. 1) В A_2 квадрика имеет уравнение вида

$$c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 + 2c_1x_1 + 2c_2x_2 + c = 0$$

и является кривой 2-го порядка.

2) В A_3 квадрика — поверхность 2-го порядка:

$$c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3 +$$
$$+ 2c_1x_1 + 2c_2x_2 + 2c_3x_3 + c = 0.$$

19.2. Приведение уравнения квадрики к нормальному виду. Пусть квадрика задана в некоторой аффинной системе координат уравнением (1) из 19.1. Поставим себе цель — упростить это уравнение путем надлежащего выбора новой аффинной системы координат.

Теорема. При соответствующем выборе аффинной системы координат уравнение любой квадрики может быть приведено к одному из следующих видов:

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \ldots + \varepsilon_m v_m^2 = 1, \tag{2}$$

где $m \leqslant n$,

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \ldots + \varepsilon_m v_m^2 = 0, \tag{3}$$

где $m \leqslant n$, и

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \ldots + \varepsilon_m v_m^2 = 2v_{m+1}, \tag{4}$$

где $m < n$; коэффициенты ε_i всюду равны $+1$ или -1.

Доказательство. Вначале произведем линейное преобразование:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j,$$

приводящее к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, \dots, \dots, x_n)$. С геометрической точки зрения это означает переход к новой аффинной системе координат с прежним началом. При соответствующей нумерации новых координат уравнение (1) квадрики примет вид

$$p_1y_1^2 + \dots + p_my_m^2 + 2d_1y_1 + \dots + 2d_ny_n + c = 0,$$

где $m \leqslant n$ и коэффициенты $p_1, \dots, p_m$ не равны нулю.

Выделяя полные квадраты, будем иметь:

$$p_1\left(y_1 + \frac{d_1}{p_1}\right)^2 + \dots + p_m\left(y_m + \frac{d_m}{p_m}\right)^2 + 2d_{m+1}y_{m+1} + \dots + 2d_ny_n +$$
$$+ c - p_1\left(\frac{d_1}{p_1}\right)^2 - \dots - p_m\left(\frac{d_m}{p_m}\right)^2 = 0.$$

Подвергнем теперь систему координат параллельному переносу:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{d_1}{p_1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_m = y_m + \dfrac{d_m}{p_m}, \\ z_{m+1} = y_{m+1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_n = y_n. \end{cases}$$

Если ввести обозначение

$$p = p_1\left(\frac{d_1}{p_1}\right)^2 + \dots + p_m\left(\frac{d_m}{p_m}\right)^2 - c,$$

то относительно полученной системы координат квадрика будет иметь уравнение

$$p_1z_1^2 + \dots + p_mz_m^2 + 2d_{m+1}z_{m+1} + \dots + 2d_nz_n = p. \qquad (5)$$

Заметим, что при $m = n$ формулы параллельного переноса принимают вид

$$z_i = y_i + \frac{d_i}{p_i}, \text{ где } i = 1, \dots, n,$$

а уравнение (5) — вид

$$p_1z_1^2 + p_2z_2^2 + \dots + p_nz_n^2 = p.$$

Продолжим упрощение уравнения квадрики.

Возможны следующие случаи:

1) если в уравнении (5) $d_{m+1} = \dots = d_n = 0$ и $p \neq 0$, то оно имеет вид

$$p_1z_1^2 + p_2z_2^2 + \dots + p_mz_m^2 = p.$$

Перейдя к новой системе координат по формулам

$$\begin{cases} z_i = \sqrt{\left|\dfrac{p}{p_i}\right|}\, v_i & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \\ z_j = v_j & \text{при } j = m + 1, \dots, n, \end{cases}$$

приведем уравнение квадрики к виду

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \dots + \varepsilon_m v_m^2 = 1,$$

где $\varepsilon_i = 1$ при $\dfrac{p}{p_i} > 0$ и $\varepsilon_i = -1$ при $\dfrac{p}{p_i} < 0$;

2) если $d_{m+1} = \dots = d_n = 0$ и $p = 0$, то уравнение (5) имеет вид

$$p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + \dots + p_m z_m^2 = 0.$$

После преобразования координат по формулам

$$\begin{cases} z_i = \dfrac{v_i}{\sqrt{|p_i|}} & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \\ z_j = v_j & \text{при } j = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

будем иметь:

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \dots + \varepsilon_m v_m^2 = 0,$$

где $\varepsilon_i = 1$ при $p_i > 0$ и $\varepsilon_i = -1$ при $p_i < 0$;

3) пусть теперь $m < n$ и хотя бы один из коэффициентов $d_{m+1}, \dots, \dots, d_n$ отличен от нуля, например $d_{m+1} \neq 0$. Выполнив преобразование координат по формулам

$$\begin{cases} u_{m+1} = \dfrac{p}{2} - d_{m+1} z_{m+1} - \dots - d_n z_n, \\ u_i = z_i \quad \text{при } i \neq m + 1, \end{cases}$$

приведем уравнение (5) к виду

$$p_1 u_1^2 + \dots + p_m u_m^2 = 2u_{m+1}.$$

После преобразования координат по формулам

$$\begin{cases} u_i = \dfrac{v_i}{\sqrt{|p_i|}} & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \\ u_j = v_j & \text{при } j = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

получим уравнение

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \dots + \varepsilon_m v_m^2 = 2v_{m+1},$$

где $\varepsilon_i = 1$ при $p_i > 0$, $\varepsilon_i = -1$ при $p_i < 0$.

Теорема доказана полностью.

Уравнения (2), (3) и (4) называются *нормальными видами* уравнения квадрики.

19.3. Центр квадрики. Точка S называется центром симметрии или просто *центром квадрики*, если точка, симметричная любой точке квадрики относительно S, также принадлежит квадрике.

Теорема. Если уравнение квадрики имеет вид (2) или (3), то точка $S(s_1; s_2; \ldots; s_n)$, для которой $s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0$, является центром квадрики.

Доказательство. Если точки $M'(v_1'; v_2'; \ldots; v_n')$ и $M''(v_1''; v_2''; \ldots; v_n'')$ симметричны относительно точки S, то по теореме из 9.3

$$s_i = \frac{v_i' + v_i''}{2},$$

откуда

$$v_i'' = 2s_i - v_i'.$$

Так как $s_1 = s_2 = \ldots = s_m = 0$, то

$$v_1'' = -v_1', \; v_2'' = -v_2', \; \ldots, \; v_m'' = -v_m'.$$

Уравнения (2) и (3) содержат координаты точки только во второй степени; следовательно, если координаты точки M' удовлетворяют какому-либо из этих уравнений, то этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки M''. Так как точка M'' симметрична точке M' относительно S, то S — центр квадрики.

Из этой теоремы следует, что все точки $(n-m)$-мерной плоскости, имеющей уравнения

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_m = 0, \tag{6}$$

являются центрами квадрики (2) или (3); можно доказать, что других центров квадрика не имеет.

В частности, при $m = n$ эта плоскость является нуль-мерной: уравнениям (6) удовлетворяют координаты единственной точки — начала координат. В этом случае квадрика имеет единственный центр.

Можно доказать, что квадрика (4) не имеет ни одного центра.

Так как уравнение квадрики всегда может быть приведено к виду (2), (3) или (4), то для любой квадрики имеет место один и только один из следующих трех случаев:

1) квадрика не имеет центра;

2) квадрика имеет единственный центр (тогда она называется *центральной*);

3) квадрика имеет бесконечное множество центров, являющееся некоторой плоскостью.

§ 20. КЛАССИФИКАЦИЯ КВАДРИК

20.1. Эллипсоиды и гиперболоиды. При $m = n$ уравнение (2) из § 19 имеет вид

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \ldots + \varepsilon_n v_n^2 = 1, \tag{1}$$

где ε_i равны $+1$ или -1.

В зависимости от знаков $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ получаем квадрики различных видов.

а) При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 1$ квадрика называется *эллипсоидом* и имеет уравнение

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = 1.$$

Внешне это уравнение напоминает уравнение сферы евклидова пространства в прямоугольной декартовой системе координат, однако следует помнить, что мы пользуемся аффинной системой координат, а понятие сферы в аффинной геометрии отсутствует.

б) При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = -1$ уравнение (1) принимает вид

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = -1.$$

Так как мы рассматриваем действительное аффинное пространство, то точек с координатами, удовлетворяющими этому уравнению, не существует. Однако по аналогии с предыдущим случаем это уравнение называют уравнением *мнимого эллипсоида*.

в) Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ не все одинаковы, то квадрика называется *гиперболоидом*.

Из сказанного в 19.3 следует, что эллипсоид и гиперболоид являются центральными квадриками.

Примеры. 1) При $n = 1$, т. е. для одномерного пространства A_1, получаем уравнения квадрик

$$v_1^2 = 1, \qquad v_1^2 = -1,$$

выражающие соответственно пару точек ($v_1 = 1$ и $v_1 = -1$) и пару мнимых точек.

2) При $n = 2$ получаем соответственно эллипс, мнимый эллипс и гиперболу:

$$v_1^2 + v_2^2 = 1, \qquad v_1^2 + v_2^2 = -1, \qquad v_1^2 - v_2^2 = 1.$$

Возможен еще случай $v_2^2 - v_1^2 = 1$, но он отличается от предыдущего лишь нумерацией координат, которую можно изменить, переходя к новой аффинной системе координат по формулам

$$\begin{cases} v_1' = v_2, \\ v_2' = v_1. \end{cases}$$

3) При $n = 3$ имеем соответственно эллипсоид и мнимый эллипсоид:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \qquad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = -1,$$

однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид:

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 1, \qquad v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 1.$$

20.2. Конусы. При $m = n$ уравнение (3) из § 19 имеет вид

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \ldots + \varepsilon_n v_n^2 = 0, \qquad (2)$$

где ε_i равны $+1$ или -1.

Если знаки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ не все одинаковы, то квадрика называется *конусом*. Конус — центральная квадрика, центр конуса называется его *вершиной*. Центром конуса (2) является начало координат.

Если координаты точки A $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$, отличной от вершины конуса, удовлетворяют уравнению (2), то этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки вида $(ta_1; ta_2; \ldots; ta_n)$. Множество всех таких точек является прямой, проходящей через A и вершину конуса — начало координат (5.1). Эта прямая целиком принадлежит конусу и называется его *прямолинейной образующей*.

Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n$, то квадрика (2) состоит из единственной точки (начала координат) и называется *мнимым конусом* с вершиной в этой точке.

Примеры. 1) При $n = 1$ получаем уравнение

$$v_1^2 = 0,$$

выражающее пару совпавших точек.

2) При $n = 2$ имеем пару пересекающихся прямых:

$$v_1^2 - v_2^2 = 0$$

и точку или, как иногда говорят по аналогии с предыдущим случаем, пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке:

$$v_1^2 + v_2^2 = 0.$$

3) При $n = 3$ имеем соответственно конус и мнимый конус с вершиной в действительной точке:

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0, \qquad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0.$$

20.3. Параболоиды. При $m = n - 1$ уравнение (4) из § 19 принимает вид

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} v_{n-1}^2 = 2v_n, \tag{3}$$

где ε_i равны $+1$ или -1.

Квадрика в этом случае называется *параболоидом*. Из сказанного в 19.3 следует, что параболоид не имеет центра.

Примеры. При $n = 2$ получаем параболу

$$v_1^2 = 2v_2.$$

При $n = 3$ — эллиптический и гиперболический параболоиды:

$$v_1^2 + v_2^2 = 2v_3, \qquad v_1^2 - v_2^2 = 2v_3.$$

20.4. Цилиндрические квадрики. Нам осталось рассмотреть лишь случаи, когда в уравнениях (2) и (3) из § 19 $m < n$, а в уравнении (4) из § 19 $m < n - 1$. Тогда, полагая в (2) и (3) из § 19 $m = r$, а в (4) из § 19 $m = r - 1$, получим соответственно

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \ldots + \varepsilon_r v_r^2 = 1, \tag{4}$$

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \ldots + \varepsilon_r v_r^2 = 0, \tag{5}$$

$$\varepsilon_1 v_1^2 + \ldots + \varepsilon_{r-1} v_{r-1}^2 = 2v_r , \tag{6}$$

где $r < n$ и ε_i равны $+1$ или -1.

Квадрика, для которой (4), (5) или (6) является нормальным уравнением, называется *цилиндрической.*

Можно показать, что цилиндрическая квадрика состоит из параллельных друг другу $(n - r)$-мерных плоскостей («образующих»), пересекающих некоторую квадрику («направляющую»), лежащую в r-мерной плоскости. Квадрики (4) и (5) имеют в общем случае бесконечное множество центров, являющееся $(n - r)$-мерной плоскостью. Квадрика (6) центров не имеет.

Примеры. 1) При $n = 2$ уравнение

$$v_1^2 = 1$$

выражает пару различных параллельных прямых. Образующими такой квадрики являются эти две прямые, направляющей — пара точек, в которых эти прямые пересекают прямую, имеющую уравнение $v_2 = 0$.

Кроме того, еще имеем уравнения

$$v_1^2 = -1, \qquad v_1^2 = 0,$$

выражающие соответственно пару мнимых параллельных и пару совпавших прямых.

2) При $n = 3$ имеем соответственно эллиптический, гиперболический, мнимый эллиптический, параболический цилиндры:

$$v_1^2 + v_2^2 = 1, \qquad v_1^2 - v_2^2 = 1, \qquad v_1^2 + v_2^2 = -1, \qquad v_1^2 = 2v_2$$

и пары плоскостей различных типов:

$v_1^2 - v_2^2 = 0$ (пара пересекающихся плоскостей),

$v_1^2 + v_2^2 = 0$ (пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой $v_1 = v_2 = 0$),

$v_1^2 = 1$ (пара различных параллельных плоскостей),

$v_1^2 = -1$ (пара мнимых параллельных плоскостей),

$v_1^2 = 0$ (пара совпавших плоскостей).

20.5. Аффинная классификация квадрик. Сопоставляя примеры из § 20, замечаем, что в пространстве A_2 уравнение любой квадрики может быть приведено к одному из следующих девяти нормальных видов:

1) $v_1^2+v_2^2=1$; 5) $v_1^2+v_2^2=0$;
2) $v_1^2+v_2^2=-1$; 6) $v_1^2=2v_2$;
3) $v_1^2-v_2^2=1$; 7) $v_1^2=1$;
4) $v_1^2-v_2^2=0$; 8) $v_1^2=-1$;
9) $v_1^2=0$.

Соответственно этому все квадрики пространства A_2 можно разбить на девять классов, объединяя в один и тот же класс все квадрики, уравнения которых с помощью надлежащего выбора аффинной системы координат можно привести к одному из этих девяти видов.

В A_1 все квадрики можно разбить на три класса, в A_3 — на семнадцать классов.

Любые две квадрики, принадлежащие к одному и тому же классу, аффинно эквивалентны. Это связано с тем, что формулы перехода от одной аффинной системы координат к другой и формулы аффинных преобразований с алгебраической точки зрения имеют один и тот же вид.

Заметим, что квадрики с различными нормальными уравнениями могут оказаться одинаковыми точечными множествами. Так, например, мнимый эллипс и пара мнимых параллельных прямых — пустое точечное множество. Поэтому квадрики, принадлежащие различным классам, иногда могут оказаться аффинно эквивалентными; с геометрической точки зрения эти классы тогда не различаются между собой.

Пример 1. Приведем к нормальному виду уравнение

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1-2x_2-3=0$$

квадрики пространства A_2.

Решение. 1) Квадратичная форма

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2$$

может быть сразу же приведена к нормальному виду с помощью перехода к новым переменным по формулам

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=x_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1=y_1-y_2, \\ x_2=y_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Если эти равенства рассматривать как формулы преобразования координат, то в новой аффинной системе координат уравнение данной квадрики примет вид

$$y_1^2+2(y_1-y_2)-2y_2-3=0,$$

т. е.

$$y_1^2+2y_1-4y_2-3=0.$$

2) Выделим теперь в левой части полученного уравнения полный квадрат:

$$(y_1^2 + 2y_1 + 1) - 1 - 4y_2 - 3 = 0,$$
$$(y_1 + 1)^2 = 4y_2 + 4.$$

С помощью преобразования координат по формулам

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 1, \\ z_2 = 2y_2 + 2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - 1, \\ y_2 = \frac{1}{2} z_2 - 1 \end{cases} \qquad (2)$$

уравнение квадрики приводится к нормальному виду

$$z_1^2 = 2z_2.$$

Квадрика является параболой.

3) Сопоставляя формулы (1) и (2), получим формулы перехода от первоначальной аффинной системы координат к такой системе координат, в которой уравнение квадрики имеет нормальный вид

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - \frac{1}{2} z_2, \\ x_2 = \frac{1}{2} z_2 - 1. \end{cases}$$

Согласно сказанному в 3.2 координатные векторы и начало новой аффинной системы координат имеют в исходной системе следующие координаты (рис. 17):

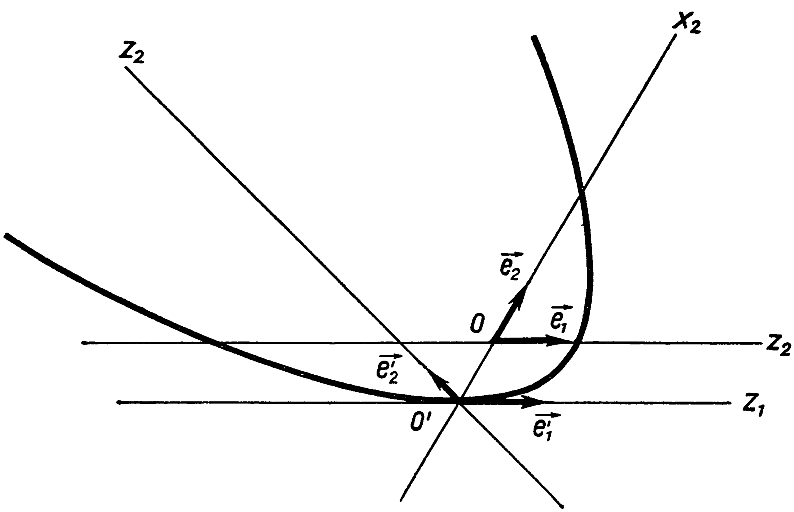


Рис. 17

$$\vec{e}_1{}' = (1;\ 0),\quad \vec{e}_2{}' = \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),\quad O'(0;\ -1).$$

Пример 2. Приведем к нормальному виду уравнение

$$x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 4x_2 - 12x_3 - 12 = 0$$

квадрики пространства A_3.

Решение. 1) Воспользуемся тем, что в 17.2 квадратичная форма

$$x_1^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3,$$

входящая в левую часть данного уравнения, уже была приведена по способу Лагранжа к каноническому виду

$$v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2$$

с помощью линейного преобразования

$$\begin{cases} x_1 = v_1 - v_2 - 3v_3, \\ x_2 = -v_2 - v_3, \\ x_3 = v_3. \end{cases}$$

Применим эти формулы к данному уравнению, рассматривая их как формулы перехода к новой аффинной системе координат:

$$v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2 + 4(-v_2 - v_3) - 12v_3 - 12 = 0,$$

$$v_1^2 - v_2^2 + 8v_3^2 - 4v_2 - 16v_3 - 12 = 0.$$

2) Полученное уравнение может быть упрощено с помощью параллельного переноса системы координат. Для этого выделим полные квадраты в левой части уравнения:

$$v_1^2 - (v_2^2 + 4v_2 + 4) + 4 + 8(v_3^2 - 2v_3 + 1) - 8 - 12 = 0,$$

$$v_1^2 - (v_2 + 2)^2 + 8(v_3 - 1)^2 - 16 = 0$$

и положим

$$\begin{cases} w_1 = v_1, \\ w_2 = v_2 + 2, \\ w_3 = v_3 - 1. \end{cases}$$

Уравнение квадрики примет вид

$$w_1^2 - w_2^2 + 8w_3^2 = 16.$$

3) Если перейти к новой системе координат по формулам

$$\begin{cases} w_1 = 4t_1, \\ w_2 = 4t_2, \\ w_3 = \sqrt{2}t_3, \end{cases}$$

то уравнение квадрики окажется приведенным к нормальному виду

$$t_1^2 - t_2^2 + t_3^2 = 1.$$

Квадрика является однополостным гиперболоидом.

4) Как и в предыдущем примере, найдем формулы преобразования координат, приводящего уравнение квадрики к нормальному виду

$$\begin{cases} x_1 = 4t_1 - 4t_2 - 3\sqrt{2}t_3 - 1, \\ x_2 = -4t_2 - \sqrt{2}t_3 + 1, \\ x_3 = \sqrt{2}t_3 + 1, \end{cases}$$

и новую аффинную систему координат:

$$O' \ (-1;\ 1;\ 1),$$

$$\vec{e}_1' = (4;\ 0;\ 0), \qquad \vec{e}_2' = (-4;\ -4;\ 0),$$

$$\vec{e}_3' = (-3\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}).$$

Упражнения

1. Приведите к нормальному виду уравнение квадрики и установите ее вид

в пространстве A_2:

а) $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 - 1 = 0$,

б) $9x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 - 12x_1 + 4x_2 + 3 = 0$;

в пространстве A_3:

в) $4x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3 - 8x_2 - 4x_3 + 3 = 0$,

г) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 4x_2 + 2x_3 = 0$.

2. Приведите к нормальному виду уравнение квадрики, установите вид квадрики, запишите формулы перехода к новой аффинной системе координат, найдите координаты новых координатных векторов и нового начала относительно старой системы координат

в пространстве A_2:

а) $3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 1 = 0$,

б) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 + 5 = 0$;

в пространстве A_3:

в) $x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2 = 0$,

г) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 + 2x_1 + 4x_3 + 1 = 0$,

д) $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 = 0$;

в пространстве A_4:

е) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 = 0$.

Глава IV

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 21. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

21.1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. В 1.3 уже были перечислены некоторые свойства линейных операторов (линейных отображений векторного пространства V_n в себя). Напомним еще ряд сведений, известных из курса алгебры.

Линейный оператор φ ставит в соответствие каждому вектору $\vec{u}$ определенный вектор $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$. Координаты этих векторов связаны формулами вида (1) из 1.3. Матрица линейного оператора имеет вид (2) из 1.3, она может быть вырожденной.

Если ненулевой вектор $\vec{u}$ обладает таким свойством, что соответствующий ему вектор $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$ отличается от него лишь числовым множителем λ:

$$\vec{u}' = \lambda\vec{u}, \tag{1}$$

то вектор $\vec{u}$ называется *собственным вектором* линейного оператора φ, а число λ называется *собственным значением* линейного оператора, соответствующим этому собственному вектору $\vec{u}$.

Формулы (1) из 1.3 принимают в случае собственного вектора следующий вид:

$$\begin{cases} b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1n}u_n = \lambda u_1, \\ b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2n}u_n = \lambda u_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nn}u_n = \lambda u_n, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (b_{11} - \lambda)u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1n}u_n = 0, \\ b_{21}u_1 + (b_{22} - \lambda)u_2 + \dots + b_{2n}u_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + (b_{nn} - \lambda)u_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Эта система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, любое собственное значение линейного оператора φ является корнем уравнения (3). Верно и обратное. Любой действительный корень уравнения (3) является собственным значением линейного оператора. Определитель, стоящий в левой части этого уравнения, является многочленом n-й степени относительно λ. Он называется *характеристическим многочленом*, а само уравнение (3) — *характеристическим уравнением* линейного оператора. При переходе к другому базису матрица линейного оператора меняется, но коэффициенты и корни характеристического многочлена остаются неизменными.

Любая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению, также является собственным вектором, соответствующим этому собственному значению.

Если векторы базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ являются собственными векторами некоторого линейного оператора и λ_i — собственное значение, которому соответствует вектор $\vec{e}_i$, то уравнения (1) из 1.3 принимают вид

$$u_i' = \lambda_i u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и, следовательно, матрица этого оператора относительно такого базиса является диагональной:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ могут быть и равные; каждое из них встречается столько раз, какова его кратность как корня характеристического уравнения.

21.2. Симметрический оператор и его матрица. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только евклидовых векторных пространств.

Линейный оператор φ называется *симметрическим*, если для любых векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеет место равенство

$$\varphi(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \varphi(\vec{v}). \tag{1}$$

Таким образом, символ симметрического оператора при скалярном умножении можно переносить с одного множителя на другой.

Теорема 1. Симметрический линейный оператор в любом ортонормированном базисе имеет симметрическую матрицу.

Доказательство. Пусть матрица симметрического линейного оператора φ имеет в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \ldots, \vec{e}_n$ вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Положим в формуле (1) $\vec{u} = \vec{e}_i$ и $\vec{v} = \vec{e}_j$, тогда

$$\varphi(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i \cdot \varphi(\vec{e}_j). \tag{2}$$

По формулам (3) из 1.3

$$\varphi(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j = (b_{1i}\vec{e}_1 + b_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + b_{ji}\vec{e}_j + \ldots + b_{ni}\vec{e}_n) \cdot \vec{e}_j;$$

отсюда вследствие ортогональности базиса

$$\varphi(\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = b_{ji}. \tag{3}$$

Аналогично получаем:

$$\vec{e}_i \cdot \varphi(\vec{e}_j) = b_{ij}. \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$b_{ij} = b_{ji}$$

для любых i и j, а это и означает, что матрица B является симметрической.

Теорема 2 (обратная). Если линейный оператор хотя бы в одном ортонормированном базисе имеет симметрическую матрицу, то этот оператор является симметрическим.

Доказательство. Пусть линейный оператор φ имеет в некотором ортонормированном базисе симметрическую матрицу B, т. е. при всех i и j

$$b_{ij} = b_{ji}. \tag{5}$$

Для любых векторов $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_n)$ и $\vec{v} = (v_1;\ v_2;\ \ldots;\ v_n)$ по формулам (2) из 10.4 и (1) из 1.3 получаем:

$$\varphi(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i' v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_i u_j \tag{6}$$

и

$$\vec{u} \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}' = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j' = \sum_{j=1}^{n} u_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ji} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_i u_j. \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7) следует, что

$$\varphi(\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\varphi(\vec{v}),$$

т. е. что оператор φ является симметрическим.

21.3. Собственные значения симметрического оператора. Остановимся предварительно на некоторых свойствах комплексных чисел. Будем обозначать через $\bar{\alpha}$ число, сопряженное числу α:

$$\alpha=a+bi,\qquad \bar{\alpha}=a-bi.$$

Лемма. Отношение сопряженности комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1) $\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$;

2) $\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta}$;

3) $\overline{(\bar{\alpha})}=\alpha$;

4) для того чтобы число α было действительным, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{\alpha}=\alpha$,

5) если $\alpha\neq 0$, то $\alpha\bar{\alpha}$ — действительное положительное число.

Доказательство. Докажем, например, первое свойство. Пусть

$$\alpha=a+bi,\qquad \beta=c+di.$$

Тогда

$$\alpha+\beta=a+c+(b+d)\,i,$$

$$\overline{\alpha+\beta}=a+c-(b+d)\,i=(a-bi)+(c-di)=\bar{\alpha}+\bar{\beta}.$$

Так же просто доказываются и остальные свойства.

Теорема. Характеристическое уравнение симметрического линейного оператора может иметь только действительные корни.

Доказательство. Пусть λ_0 — какой-нибудь корень характеристического уравнения; докажем, что он является действительным. Если подставить его вместо λ в систему (2) из 21.1, то полученная система будет иметь равный нулю определитель и, следовательно, обладать ненулевым решением. Обозначим это решение через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; тогда

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} b_{1j}\beta_j=\lambda_0\beta_1,\\&\sum_{j=1}^{n} b_{2j}\beta_j=\lambda_0\beta_2,\\&\quad\cdots\cdots\\&\sum_{j=1}^{n} b_{nj}\beta_j=\lambda_0\beta_n.\end{aligned}\tag{1}$$

Числа b_{ij} мы, как и раньше, считаем действительными. Является ли действительным число λ_0, а следовательно, и числа β_i, пока неизвестно.

Умножая обе части каждого из равенств (1) соответственно на числа $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_n$ и складывая отдельно левые и правые части всех полученных равенств, будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\overline{\beta_i} = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i\overline{\beta_i}. \tag{2}$$

Докажем, что λ_0 — действительное число. Так как решение $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ является ненулевым, то согласно утверждению 5 леммы коэффициент при λ_0 в формуле (2) — положительное действительное число. Теорема будет доказана, если число, являющееся левой частью формулы (2), также окажется действительным. Обозначим его через β. Согласно утверждению 4 леммы достаточно показать, что число β совпадает с сопряженным ему числом $\overline{\beta}$.

Используя утверждения 1—4 леммы и учитывая, что b_{ij} — действительные числа, получим:

$$\overline{\beta} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{b_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{b}_{ij}\overline{\beta}_j\,(\overline{\overline{\beta}_i}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\overline{\beta}_j\beta_i.$$

Так как выбор буквы для обозначения индекса суммирования не является существенным, то можно вместо i поставить j, а вместо j поставить i; используя при этом упражнение 2 из § 16, будем иметь:

$$\overline{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\overline{\beta}_i\beta_j.$$

По теореме 1 из 21.2 $b_{ji} = b_{ij}$; следовательно,

$$\overline{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\overline{\beta}_i\beta_j = \beta.$$

Теорема доказана.

Следствие. Любой симметрический линейный оператор имеет хотя бы одно собственное значение.

В курсе алгебры доказывается, что любое алгебраическое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень. В частности, и характеристическое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень λ_0; по доказанной выше теореме он является действительным. Это число λ_0 и есть собственное значение данного симметрического оператора.

Числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, образующие решение системы (1), также являются действительными и представляют собой координаты собственного вектора, соответствующего значению λ_0.

21.4. Собственные векторы симметрического оператора.

Теорема 1. Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие его различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Доказательство. Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — собственные векторы данного линейного оператора φ, соответствующие различным собственным значениям λ и μ:

$$\varphi(\vec{u}) = \lambda\vec{u}, \qquad \varphi(\vec{v}) = \mu\vec{v}.$$

Так как этот оператор симметрический, то

$$\varphi(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \varphi(\vec{v}).$$

Но

$$\varphi(\vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$\vec{u} \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot (\mu\vec{v}) = \mu\vec{u} \cdot \vec{v},$$

следовательно,

$$\lambda\vec{u} \cdot \vec{v} = \mu\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$(\lambda - \mu)\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Поскольку $\lambda \neq \mu$, то

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Таким образом, векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортогональны.

Теорема 2. Для любого симметрического линейного оператора евклидова пространства V_n существует ортонормированный базис пространства V_n, составленный из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. Используем метод математической индукции.

Вначале докажем, что теорема справедлива для одномерного пространства V_1. В этом случае система (1) из 1.3 состоит только из одного уравнения

$$u_1' = b_{11}u_1,$$

которое показывает, что любой ненулевой вектор $\vec{u}$ отличается от своего образа $\vec{u}' = \varphi(\vec{u})$ только числовым множителем b_{11} и, следовательно, является собственным вектором линейного оператора φ. Любой единичный вектор $\vec{e}_1$ может служить искомым базисом пространства V_1.

Теперь предположим, что теорема верна для пространства V_{n-1}, и докажем ее справедливость для пространства V_n.

Пусть φ — симметрический оператор пространства V_n. По следствию теоремы из 21.3 он имеет действительное собственное значение λ. Обозначим через $\vec{v}$ какой-нибудь собственный вектор, соответствующий этому значению. Вектор

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

является единичным. Так как он отличается от $\vec{v}$ только числовым множителем, то он также является собственным вектором, соответствующим значению λ:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \lambda \vec{e}_1. \tag{1}$$

Как известно из курса алгебры, множество всех векторов, ортогональных вектору $\vec{e}_1$, есть $(n-1)$-мерное подпространство V_{n-1} векторного пространства V_n. Это подпространство можно рассматривать как евклидово векторное пространство. Действительно, если скалярное умножение введено для всех векторов из V_n, то оно определено, в частности, и для векторов из V_{n-1}; все аксиомы скалярного умножения выполняются и для векторов из V_{n-1}.

Пусть $\vec{u}$ — произвольный вектор из V_{n-1}. Тогда $\vec{e}_1 \cdot \vec{u} = 0$. Используя, кроме того, симметричность оператора φ и равенство (1), будем иметь:

$$\vec{e}_1 \cdot \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{e}_1) \cdot \vec{u} = \lambda \vec{e}_1 \cdot \vec{u} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, вектор $\varphi(\vec{u})$ ортогонален к $\vec{e}_1$ и так же, как и $\vec{u}$, содержится в V_{n-1}.

Таким образом, оператор φ относит любому вектору подпространства V_{n-1} вектор того же самого подпространства. Действуя оператором φ только на векторы из V_{n-1}, получим новый линейный оператор φ_1, определенный в пространстве V_{n-1}. Равенство (1) из 21.2, выполняясь для любых векторов из пространства V_n, выполняется, в частности, и для векторов подпространства V_{n-1}. Следовательно, оператор φ_1 является симметрическим.

Согласно сделанному предположению доказываемая теорема верна для подпространства V_{n-1}. Следовательно, в V_{n-1} существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора φ_1. Обозначим этот базис через $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$; все эти векторы ортогональны вектору $\vec{e}_1$ и являются собственными векторами также и для оператора φ. Поэтому векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ образуют искомый ортонормированный базис пространства V_n, состоящий из собственных векторов данного симметрического линейного оператора.

Следствие. Матрица симметрического линейного оператора с помощью соответствующего выбора ортонормированного базиса может быть приведена к диагональному виду.

Согласно замечанию, сделанному в конце 21.1, за этот базис достаточно принять ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов симметрического оператора.

§ 22. ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

22.1. Ортогональное преобразование переменных. В 17.1 было доказано, что любая квадратичная форма может быть приведена с помощью линейного преобразования переменных к каноническому и даже к нормальному виду. С геометрической точки зрения это преобразование можно рассматривать как переход к новому базису в векторном пространстве (16.2). Но в евклидовом пространстве обычно рассматриваются лишь ортонормированные базисы, поэтому в соответствии с теоремой из 11.2 мы в дальнейшем будем использовать линейные преобразования переменных только с ортогональными матрицами.

Линейное преобразование переменных с ортогональной матрицей называется *ортогональным*.

Ниже будет показано, что квадратичную форму можно привести к каноническому виду, ограничиваясь только ортогональными преобразованиями переменных. Однако приведение квадратичной формы к нормальному виду (16.3) с помощью ортогонального преобразования уже не всегда выполнимо.

22.2. Теорема о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Лемма. Если квадратичная форма и линейный оператор имеют одну и ту же матрицу относительно какого-нибудь ортонормированного базиса, то они будут иметь одинаковые матрицы и относительно любого другого ортонормированного базиса.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j \qquad (1)$$

и линейный оператор, матрица которого относительно какого-либо ортонормированного базиса совпадает с матрицей этой квадратичной формы: $b_{ij} = c_{ij}$.

Этот оператор отображает произвольный вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; \ldots; \ldots; x_n)$ на вектор $\vec{x}' = (x'_1; x'_2; \ldots; x'_n)$ по формулам (1) из 1.3, которые в данном случае принимают вид

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j. \qquad (2)$$

Тогда квадратичную форму (1) можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n = \vec{x} \cdot \vec{x}'. \qquad (3)$$

Перейдем теперь к новому ортонормированному базису. Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ имеют относительно этого базиса соответственно координаты y_i и y'_i, а формулы, связывающие эти координаты, имеют вид

$$y'_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_j. \qquad (4)$$

Выражая скалярное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ через их координаты относительно нового базиса, получим с помощью (4):

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' = y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + \ldots + y_n y'_n = \sum_{i=1}^{n} y_i y'_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_i y_j.$$

Отсюда вследствие (3) получаем:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_i y_j. \qquad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), видим, что данные квадратичная форма и линейный оператор имеют и относительно нового базиса одну и ту же матрицу с элементами d_{ij}.

Теорема. Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных.

Доказательство. Пусть (1) — данная квадратичная форма. Рассмотрим линейный оператор, имеющий относительно некоторого ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ту же симметрическую матрицу, что и эта квадратичная форма. Характеристическое уравнение этого оператора можно получить, положив в уравнении (3) из 21.1 $b_{ij} = c_{ij}$:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

По следствию теоремы 2 из 21.4 существует ортонормированный базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, относительно которого матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид; при этом диагональными элементами будут служить корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (6). По лемме квадратичная форма (1) будет иметь в новом базисе ту же матрицу, что и этот линейный оператор, т. е. окажется приведенной к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2; \tag{7}$$

здесь каждый корень характеристического уравнения взят столько раз, какова его кратность.

Векторы нового базиса выражаются через векторы старого базиса формулами вида

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\vec{e}_j; \tag{8}$$

при этом по теореме из 11.2 матрица перехода является ортогональной. Согласно сказанному в 1.3 матрица преобразования

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_j, \tag{9}$$

приводящего квадратичную форму к каноническому виду, получается при транспонировании этой ортогональной матрицы и, следовательно, также является ортогональной.

22.3. Способ приведения квадратичной формы к каноническому виду. Из сказанного в 22.2 следует, что для нахождения коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в каноническом виде (7) квадратичной формы (1) достаточно решить характеристическое уравнение (6).

Укажем теперь способ нахождения соответствующего ортонормированного базиса $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$ и ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Пусть λ_k — корень характеристического уравнения, имеющий кратность 1. Подставив этот корень в систему (2) из 21.1, принимающую при $b_{ij} = c_{ij}$ вид

$$\begin{cases} (c_{11} - \lambda)u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n = 0, \\ c_{21}u_1 + (c_{22} - \lambda)u_2 + \ldots + c_{2n}u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \ldots + (c_{nn} - \lambda)u_n = 0, \end{cases} \tag{10}$$

найдем из нее координаты собственного вектора $\vec{u}$, соответствующего этому собственному значению λ_k. Разделив найденный вектор на его длину, получим вектор искомого ортонормированного базиса.

Пусть теперь λ_k — корень характеристического уравнения, имеющий кратность $m > 1$. После его подстановки в (10) найдем m

независимых решений полученной системы, выбрав их так, чтобы они определяли координаты m попарно ортогональных единичных векторов. Эти векторы образуют ортонормированный базис m-мерного подпространства, состоящего из собственных векторов, соответствующих данному собственному значению λ_k. Примем найденные векторы за векторы искомого базиса пространства V_n.

Проведем такие же рассуждения для каждого из корней характеристического уравнения. Так как сумма кратностей всех корней равна n, а собственные векторы, соответствующие различным корням, ортогональны, то мы получим искомый ортонормированный базис.

Матрицу ортогонального преобразования (9), приводящего квадратичную форму к каноническому виду, можно получить транспонированием матрицы перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$.

П р и м е р. С помощью ортогонального преобразования приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3. \tag{11}$$

Р е ш е н и е. 1) Находим канонический вид квадратичной формы.

Записываем матрицу квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и составляем характеристическое уравнение вида (6):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим:

$$\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$$

или

$$\lambda^3 - 36\lambda + 9\lambda - 54 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\lambda(\lambda - 6)(\lambda + 6) + 9(\lambda - 6) = 0$$

или

$$(\lambda - 6)(\lambda + 3)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 6, \ \lambda_2 = \lambda_3 = -3.$$

Искомым каноническим видом формы (11) является

$$6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2. \tag{12}$$

2) Переходим к нахождению базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Запишем для данной квадратичной формы (11) систему вида (10):

$$\begin{cases} (1-\lambda)u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0, \\ 2u_1 - (2+\lambda)u_2 - 2u_3 = 0, \\ -4u_1 - 2u_2 + (1-\lambda)u_3 = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

3) Находим вектор $\vec{e}_1'$ нового базиса, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 6$.

Полагаем в системе (13) $\lambda = 6$:

$$\begin{cases} -5u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0, \\ 2u_1 - 8u_2 - 2u_3 = 0, \\ -4u_1 - 2u_2 - 5u_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем какое-нибудь решение полученной системы. Если, например, положить $u_1 = 2$, то из 1-го и 3-го уравнений будем иметь $u_2 = 1$ и $u_3 = -2$.

Вектор

$$\vec{p} = (2;\ 1;\ -2),$$

имеющий эти координаты, — собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_1 = 6$. Нормируя его, найдем координатный вектор

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right).$$

4) Находим векторы $\vec{e}_2'$ и $\vec{e}_3'$ нового базиса, соответствующие значению $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$.

Полагаем в системе (13) $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} 4u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0, \\ 2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0, \\ -4u_1 - 2u_2 + 4u_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна одному уравнению

$$2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0, \qquad (14)$$

из которого видно, что векторы $\vec{e}_2'$ и $\vec{e}_3'$ ортогональны уже найденному вектору $\vec{p} = (2;\ 1;\ -2)$, а следовательно, и вектору $\vec{e}_1'$.

Одно из решений уравнения (14) можно выбрать произвольно. Если, например, $u_2 = u_3 = 2$, то $u_1 = 1$. Нормируя найденный вектор

$$\vec{q} = (1;\ 2;\ 2),$$

получим вектор

$$\vec{e}_2' = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right).$$

Теперь определим вектор $\vec{r}$, координаты которого также удовлетворяют уравнению (14), но который ортогонален найденному выше вектору $\vec{q} = (1;\ 2;\ 2)$:

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0, \\ u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 0. \end{cases}$$

Получим какое-нибудь решение этой системы; если, например, $u_3 = 1$, то $u_1 = 2$ и $u_2 = -2$. Тогда

$$\vec{r} = (2;\ -2;\ 1),$$

откуда

$$\vec{e}_3' = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right).$$

5) Находим ортогональное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

Записываем выражения векторов нового ортонормированного базиса через векторы старого базиса:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2' = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3. \end{cases}$$

Матрица искомого ортогонального преобразования получается при транспонировании матрицы этой системы (1.2). Следовательно, искомое ортогональное преобразование выразится формулами

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3. \end{cases}$$

Если подставить эти значения в данную квадратичную форму (11), то получится ее канонический вид (12).

Вследствие неоднозначности выбора вектора $\vec{e}_2'$ существует бесконечное множество ортогональных преобразований, приводящих форму (11) к каноническому виду. Мы нашли лишь одно из них.

22.4. Ортогональные инварианты. Пусть переменные в квадратичной форме подвергаются какому-нибудь ортогональному преобразованию; будем рассматривать его как переход к новому ортонормированному базису.

У линейного оператора, матрица которого совпадает с матрицей данной квадратичной формы, коэффициенты характеристического многочлена остаются при этом преобразовании неизменными (21.1). Они являются функциями элементов такой матрицы, а следовательно, и равных им коэффициентов квадратичной формы. Так как эти выражения не меняются при ортогональном преобразовании переменных, то они называются *ортогональными инвариантами квадратичной формы.*

Пример. Если матрица линейного оператора совпадает с матрицей квадратичной формы

$$c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2,$$

то его характеристический многочлен имеет вид

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}^2.$$

Выражения

$$J_1 = c_{11} + c_{22} \quad \text{и} \quad J_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

(а следовательно, и корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена) являются ортогональными инвариантами данной квадратичной формы.

Упражнения

1. Запишите канонический вид квадратичной формы и найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к этому виду (в зависимости от избранного способа решения ответы могут оказаться различными):

а) $6x_1^2 + 24x_1x_2 - x_2^2$;

б) $3x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$;

в) $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

е) $2x_1^2 - x_2^2 - 3x_4^2 + 4x_3x_4$;

ж) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.

2. По образцу примера из 22.4 запишите ортогональные инварианты квадратичной формы от трех переменных.

§ 23. КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

23.1. Упрощение уравнения квадрики. Определение квадрики, данное в 19.1 для аффинного пространства A_n, сохраняется для евклидова пространства E_n; однако теперь мы будем уже использовать не произвольные аффинные, а только прямоугольные декартовы системы координат.

Упрощение уравнения квадрики производится вначале по тому же плану, что и в 19.2, с той лишь разницей, что квадратичная форма, содержащаяся в левой части уравнения (1) из 19.1, приводится к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования (а не произвольного линейного, как раньше). С геометрической точки зрения это означает переход к новой прямоугольной декартовой системе координат, получаемой из исходной прямоугольной декартовой системы координат с помощью вращения вокруг начала координат. Подвергая затем полученную систему координат параллельному переносу, приведем уравнение квадрики к виду (5) из 19.2, т. е. к виду

$$p_1 z_1^2 + \ldots + p_m z_m^2 + 2d_{m+1} z_{m+1} + \ldots + 2d_n z_n = p, \qquad (1)$$

где $m \leqslant n$ и коэффициенты $p_1, \ldots, p_m$ не равны нулю.

При дальнейшем упрощении уравнения квадрики обычно уже не удается добиться того, чтобы все коэффициенты при квадратах координат были равны $+1$ или -1. Это связано с тем, что при помощи ортогонального преобразования квадратичная форма не всегда приводится к нормальному виду. Поэтому в пространстве E_n уравнение квадрики в общем случае уже не удается привести к такому же простому виду, как в пространстве A_n.

Так как конгруэнтные фигуры являются также и аффинно эквивалентными, то аффинная классификация квадрик, установленная в § 20, остается в силе и для пространства E_n. Однако не всякие аффинно эквивалентные фигуры конгруэнтны; поэтому каждый из классов аффинной классификации может быть разбит на бесконечное множество классов так, что любые две квадрики из одного класса конгруэнтны, а любые две квадрики из разных классов не конгруэнтны (15.2). В связи с этим появляется возможность выделения новых видов квадрик, не рассматривавшихся в A_n.

23.2. Классификация квадрик в трехмерном евклидовом пространстве. Классификация квадрик в пространстве E_2 уже была рассмотрена при изучении темы «Линии второго порядка». Квадрики в пространстве E_3 являются поверхностями второго порядка, наиболее важные виды которых также уже изучались ранее.

Чтобы дать полную классификацию квадрик при $n = 3$, рассмотрим все частные случаи, которые могут представиться при упрощении уравнения (1) из 23.1.

Случай 1. $m = n = 3$, $p \neq 0$.

Уравнение (1) принимает вид

$$p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 + p_3 z_3^2 = p$$

или

$$\frac{p_1}{p} z_1^2 + \frac{p_2}{p} z_2^2 + \frac{p_3}{p} z_3^2 = 1.$$

В зависимости от знаков p_1, p_2, p_3 и p это уравнение можно записать в различных видах:

а) $\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$ — эллипсоид.

Все эллипсоиды аффинно эквивалентны (20.5) и, следовательно, с точки зрения аффинной геометрии не отличаются друг от друга по своим свойствам. Однако не всякие два эллипсоида конгруэнтны и даже подобны; в связи с этим в евклидовой геометрии появляется возможность классификации эллипсоидов.

Если a_1, a_2, a_3 различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Если равны какие-нибудь два из чисел a_1, a_2, a_3, то эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*. Если $a_1 = a_2 = a_3$, то эллипсоид является *сферой*. Эта классификация инвариантна относительно движений; например, любое движение может отобразить сферу также только на сферу. Поэтому указанные виды эллипсоидов являются объектами, изучаемыми в евклидовой геометрии (13.4).

Аналогичные замечания можно сделать и относительно тех видов квадрик, которые будут рассмотрены ниже (например, можно выделить гиперболоиды вращения, конус вращения и т. п.).

б) $\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=-1$ — мнимый эллипсоид.

в) $\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$ — однополостный гиперболоид (при $a_1 = a_2$ — однополостный гиперболоид вращения).

г) $\frac{z_1^2}{a_1^2}-\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=1$ — двуполостный гиперболоид (при $a_2 = a_3$ — двуполостный гиперболоид вращения).

Случай 2. $m = n = 3$, $p = 0$.

Уравнение (1) принимает вид

$$p_1z_1^2 + p_2z_2^2 + p_3z_3^2 = 0.$$

Частные случаи:

а) $\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}-\frac{z_3^2}{a_3^2}=0$ — конус (при $a_1 = a_2$ — конус вращения).

б) $\frac{z_1^2}{a_1^2}+\frac{z_2^2}{a_2^2}+\frac{z_3^2}{a_3^2}=0$ — мнимый конус с вершиной в действительной точке.

Случай 3. $m = 2$, $n = 3$, $d_3 \neq 0$.

Уравнение (1) принимает вид

$$p_1z_1^2 + p_2z_2^2 + 2d_3z_3 = p.$$

С помощью параллельного переноса системы координат по формулам

$$\begin{cases} z_1 = u_1, \\ z_2 = u_2, \\ z_3 = u_3 + \dfrac{p}{2d_3} \end{cases}$$

можно освободиться от свободного члена:

$$p_1 u_1^2 + p_2 u_2^2 + 2d_3 u_3 = 0.$$

Частные случаи:

а) $\dfrac{u_1^2}{a_1^2} + \dfrac{u_2^2}{a_2^2} = 2u_3$ — эллиптический параболоид (при $a_1 = a_2$ — параболоид вращения).

б) $\dfrac{u_1^2}{a_1^2} - \dfrac{u_2^2}{a_2^2} = 2u_3$ — гиперболический параболоид.

С л у ч а й 4 — цилиндрические квадрики.

I. $p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 = p, \qquad p \neq 0.$

а) $\dfrac{z_1^2}{a_1^2} + \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 1$ — эллиптический цилиндр (при $a_1 = a_2$ — цилиндр вращения).

б) $\dfrac{z_1^2}{a_1^2} + \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = -1$ — мнимый эллиптический цилиндр.

в) $\dfrac{z_1^2}{a_1^2} - \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 1$ — гиперболический цилиндр.

II. $p_1 z_1^2 + p_2 z_2^2 = 0.$

а) $\dfrac{z_1^2}{a_1^2} - \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей.

б) $\dfrac{z_1^2}{a_1^2} + \dfrac{z_2^2}{a_2^2} = 0$ — пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой $z_1 = z_2 = 0$.

III. $p_1 z_1^2 = p.$

а) $z_1^2 = a_1^2$ — пара различных параллельных плоскостей.

б) $z_1^2 = -a_1^2$ — пара мнимых параллельных плоскостей.

в) $z_1^2 = 0$ — пара совпавших плоскостей.

IV. $p_1 z_1^2 + 2d_2 z_2 + 2d_3 z_3 = p$, где $d_2^2 + d_3^2 \neq 0.$

Разделив обе части этого уравнения на p_1 и освободившись, как в случае 3, от свободного члена, приходим к уравнению вида

$$u_1^2 + 2q_2 u_2 + 2q_3 u_3 = 0.$$

С помощью ортогонального преобразования

$$\begin{cases} u_1 = v_1, \\ u_2 = -\frac{q_2}{q} v_2 + \frac{q_3}{q} v_3, \\ u_3 = -\frac{q_3}{q} v_2 - \frac{q_2}{q} v_3, \end{cases}$$

где $q = \sqrt{q_2^2 + q_3^2}$, переходим к новой прямоугольной декартовой системе координат, относительно которой квадрика — параболический цилиндр — будет иметь уравнение

$$v_1^2 = 2qv_2.$$

Те виды, к которым было приведено уравнение квадрики во всех рассмотренных выше случаях, называются *каноническими* видами уравнения квадрики.

20.3. Приведение уравнения квадрики к каноническому виду.

Пример 1. Приведем к каноническому виду уравнение:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - 3 = 0$$

квадрики пространства E_2.

Решение. В 20.6 уже была рассмотрена квадрика с таким уравнением. Но если там она была отнесена к произвольной аффинной системе координат, то здесь мы должны упростить уравнение, используя лишь прямоугольные декартовы системы координат.

1) Приведем с помощью ортогонального преобразования к каноническому виду квадратичную форму

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

равны

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 0,$$

и, следовательно, квадратичная форма имеет канонический вид

$$2y_1^2.$$

2) Найдем координатные векторы $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ новой прямоугольной декартовой системы. Они являются собственными векторами линейного оператора, имеющего ту же матрицу, что и данная квадратичная форма. Следовательно, их координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda)\, u_1 + u_2 = 0, \\ u_1 + (1-\lambda)\, u_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая в этой системе сначала $\lambda = 2$, а затем $\lambda = 0$, найдем (как и в примере из 22.3) новые координатные векторы

$$\vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_2' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 \tag{1}$$

и ортогональное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \end{cases} \tag{2}$$

приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

3) Будем рассматривать (2) как формулы преобразования координат при переходе к новой прямоугольной декартовой системе координат, получаемой из старой системы с помощью вращения вокруг начала координат. Относительно этой новой системы квадрика будет иметь уравнение

$$2y_1^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) - 3 = 0$$

или

$$2y_1^2 - 2\sqrt{2}y_2 - 3 = 0. \tag{3}$$

4) Запишем уравнение (3) в виде

$$y_1^2 = \sqrt{2}\left(y_2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right).$$

Если подвергнуть полученную выше систему координат параллельному переносу, положив

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}, \end{cases} \tag{4}$$

то уравнение квадрики примет канонический вид

$$z_1^2 = \sqrt{2}\,z_2.$$

Квадрика является параболой.

5) Сравнивая (2) и (4), получим формулы перехода от первоначальной системы координат к той, в которой квадрика имеет каноническое уравнение; этими формулами являются

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 + \frac{3}{4}, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_2 - \frac{3}{4}. \end{cases}$$

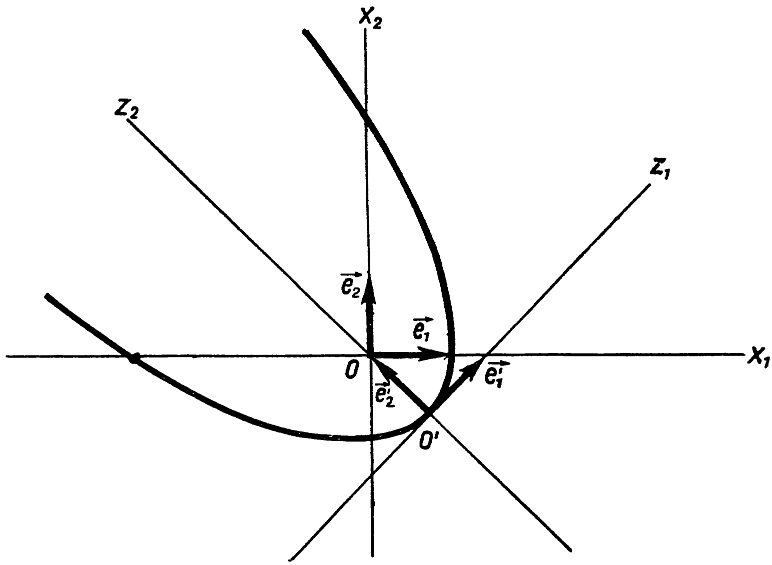


Рис. 18

Начало и координатные векторы этой системы координат имеют в исходной системе координаты (рис. 18):

$$O'\left(\frac{3}{4};\ -\frac{3}{4}\right),$$
$$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\vec{e}_2' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Пример 2. Приведем к каноническому виду уравнение
$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 - 4x_3 - 1 = 0$

квадрики пространства E_3.

Решение. 1) Квадратичная форма, содержащаяся в левой части уравнения данной квадрики, уже была приведена в 22.3 к каноническому виду

$$6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2$$

с помощью ортогонального преобразования

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3. \end{cases}$$

Если эти формулы рассматривать как формулы перехода к новой системе координат, то относительно этой системы координат квадрика будет иметь уравнение

$$6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2+2\left(\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\right)-$$
$$-4\left(-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3\right)-1=0$$

или

$$6y_1^2-3y_2^2-3y_3^2+4y_1-2y_2-1=0.$$

2) Полученное уравнение допускает дальнейшее упрощение с помощью параллельного переноса системы координат. Чтобы получить соответствующие формулы, выделим полные квадраты в левой части последнего уравнения:

$$6\left(y_1^2+\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{3}-3\left(y_2^2+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}-3y_3^2-1=0,$$
$$6\left(y_1+\frac{1}{3}\right)^2-3\left(y_2+\frac{1}{3}\right)^2-3y_3^2=\frac{4}{3};$$

если положить

$$\begin{cases} z_1=y_1+\dfrac{1}{3}, \\ z_2=y_2+\dfrac{1}{3}, \\ z_3=y_3, \end{cases}$$

то получим каноническое уравнение данной квадрики:

$$6z_1^2-3z_2^2-3z_3^2=\frac{4}{3},$$
$$\frac{z_1^2}{\frac{2}{9}}-\frac{z_2^2}{\frac{4}{9}}-\frac{z_3^2}{\frac{4}{9}}=1.$$

Квадрика является двуполостным гиперболоидом вращения.

3) Так как

$$y_1=z_1-\frac{1}{3}, \qquad y_2=z_2-\frac{1}{3}, \qquad y_3=z_3,$$

то

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{3}z_1+\dfrac{1}{3}z_2+\dfrac{2}{3}z_3-\dfrac{1}{3}, \\ x_2=\dfrac{1}{3}z_1+\dfrac{2}{3}z_2-\dfrac{2}{3}z_3-\dfrac{1}{3}, \\ x_3=-\dfrac{2}{3}z_1+\dfrac{2}{3}z_2+\dfrac{1}{3}z_3. \end{cases}$$

Это есть формулы перехода к той прямоугольной декартовой системе координат, в которой уравнение данной квадрики имеет канонический вид. Эта система определяется началом

$$O'\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ 0\right)$$

и координатными векторами

$$\vec{e}_1{}' = \left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right),$$

$$\vec{e}_2{}' = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right),$$

$$\vec{e}_3{}' = \left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right).$$

Упражнения

1. Приведите к каноническому виду уравнение квадрики и установите ее вид

в пространстве E_2:

а) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2 - 7 = 0$,

б) $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + 1 = 0$,

в) $x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 + 9 = 0$;

в пространстве E_3:

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 10x_1 - 10x_2 - 10x_3 = 0$,

д) $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 6x_1 - 12x_2 = 0$

(можно использовать решения упражнений 1г и 1в из § 22).

2. Приведите к каноническому виду уравнение квадрики, установите ее вид, запишите формулы перехода к новой прямоугольной декартовой системе координат, найдите координаты новых координатных векторов и нового начала относительно старой прямоугольной декартовой системы координат

в пространстве E_2:

а) $3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 14x_2 - 13 = 0$,

б) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 30x_1 + 10x_2 + 75 = 0$,

в) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 - 28 = 0$;

в пространстве E_3:

г) $x_1x_3 - x_2 = 0$,

д) $x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 + 6x_1 - 6x_2 + 9 = 0$,

е) $x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 - 2x_2 = 0$, ж) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 - 36x_3 + 36 = 0$,

з) $x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_2 - 4x_3 - 5 = 0$,

и) $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_3 + 2x_2 - 8 = 0$,

к) $x_1^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 3x_2 + 6x_3 = 0$,

л) $x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 5 = 0$,

м) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 12x_1 -$
$- 12x_2 + 12x_3 - 6 = 0$,

н) $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 -$
$- 12x_1 - 12x_2 - 6x_3 - 27 = 0$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Упражнения к § 2

1. Используйте аксиому IV_2, считая точки M и N совпавшими.
2. Используйте аксиому IV_2, считая точки M и K совпавшими.
3. Используйте метод доказательства от противного и аксиому IV_1.
4. Используйте аксиому IV_2.
5. Используйте аксиому IV_2 и метод математической индукции.

Упражнения к § 3

б) $(-2;\ -1;\ -3;\ 2)$. в) Нет.

г) $$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2, \\ x_2' = \dfrac{1}{2}(x_3 + x_2), \\ x_3' = \dfrac{1}{2}(x_3 - x_2), \\ x_4' = x_4 + 1. \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} u_1 = u_1', \\ u_2 = u_2' - u_3', \\ u_3 = u_2' + u_3', \\ u_4 = u_4'. \end{cases}$$

а) $$\begin{cases} x_1 = -x_1' + 2x_2' + 5, \\ x_2 = x_1' + 4x_3' - 3, \\ x_3 = 5x_2' + x_3'. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_3' + 4, \\ x_2 = 2x_2' + x_4', \\ x_3 = -x_1', \\ x_4 = x_4' - 1. \end{cases}$$

а) $$\begin{cases} x_1 = x_1' + 2, \\ x_2 = x_2', \\ x_3 = x_3' - 2, \\ x_4 = x_4', \\ x_5 = x_5' + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = u_1', \\ u_2 = u_2', \\ u_3 = u_3', \\ u_4 = u_4', \\ u_5 = u_5'. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_5', \\ x_2 = -x_4', \\ x_3 = x_3', \\ x_4 = -x_2', \\ x_5 = x_1' - x_5'; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = u_1' + u_5', \\ u_2 = -u_4', \\ u_3 = u_3', \\ u_4 = -u_2', \\ u_5 = u_1' - u_5'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_1' + x_2' - x_3' + x_4' + 1, \\ x_2 = x_1' + 2x_3', \\ x_3 = 2x_1' + x_3', \\ x_4 = -2x_1' - 2x_3' - x_4' + 2. \end{cases}$$

5. а) $O'(-1;\ 0;\ 1)$, б) Нет.

$\vec{e}\,'_1 = (1;\ 2;\ 1)$,

$\vec{e}\,'_2 = (2;\ 1;\ -3)$,

$\vec{e}\,'_3 = (-1;\ 1;\ 0)$.

в) $O'(0;\ -1;\ 2;\ -1;\ 0)$,

$\vec{e}\,'_1 = (1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$,

$\vec{e}\,'_2 = (1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0)$,

$\vec{e}\,'_3 = (1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1)$,

$\vec{e}\,'_4 = (0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 1)$,

$\vec{e}\,'_5 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1)$.

Упражнения к § 4

2. а) Используйте теорему 2 из 4.4.

б) Искомая плоскость вполне определяется точкой A и направляющим подпространством плоскости P_r.

в) Используйте теорему 2 из 4.4.

г) Пусть P_1 натянута на A и $\vec{u}$, а Q_2 — на B, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Так как $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ линейно независимы, то существуют такие t, s_1 и s_2, что

$$\overrightarrow{AB} = t\vec{u} + s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2.$$

Если M — искомая точка, то $\overrightarrow{AM} = x\vec{u}$, $\overrightarrow{BM} = y\vec{v}_1 + z\vec{v}_2$. Используя аксиому IV_2, составим уравнения для нахождения x, y, z.

Упражнения к § 5

1. а) $\begin{cases} x_1 = 1 + 3t, \\ x_2 = -1 + 4t, \\ x_3 = 2 - t, \\ x_4 = 2t; \end{cases}$ $\dfrac{x_1 - 1}{3} = \dfrac{x_2 + 1}{4} = \dfrac{x_3 - 2}{-1} = \dfrac{x_4}{2}$ или

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_4 - 2 = 0, \\ x_2 - 2x_4 + 1 = 0, \\ 2x_3 + x_4 - 4 = 0. \end{cases}$$

б) $\begin{cases} x_1 = 4t, \\ x_2 = 1 + 2t, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = 3 - 2t, \\ x_5 = 4 - 4t; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x_1}{4} = \dfrac{x_2 - 1}{2} = \dfrac{x_4 - 3}{-2} = \dfrac{x_5 - 4}{-4}, \\ x_3 - 2 = 0. \end{cases}$

2. $2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 8 = 0$.

3. $\begin{cases} x_1 = -1 + 3t_1 - 4t_2, \\ x_2 = 2 - t_1 + t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2; \end{cases}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$, где $\overrightarrow{OA} = (-1;\ 2;\ 0;\ 0)$,

$\vec{u}_1 = (3;\ -1;\ 1;\ 0)$,

$\vec{u}_2 = (-4;\ 1;\ 0;\ 1)$.

4. $\begin{cases} x_1 = 1 + t_2, \\ x_2 = t_1 + t_3, \\ x_3 = 2 + t_1, \\ x_4 = -1 + t_1 + 2t_3, \\ x_5 = t_2 + 3t_3; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x_2 - x_3 - x_4 + 1 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + 5 = 0. \end{cases}$

5. а) P_1 и Q_3 параллельны и не пересекаются.
   б) $P_1 \subset Q_3$.
6. а) Имеют единственную общую точку (4; —2; 2; —2).
   б) Скрещиваются.
7. Пересекаются по прямой, проходящей через начало координат.
8. $Q_3 \subset P_4$.
9. $\begin{cases} x_1 = -t_1, \\ x_2 = 1 + t_1, \\ x_3 = t_2, \\ x_4 = 2 + t_2, \\ x_5 = -t_3, \\ x_6 = 3 + t_3, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ x_3 - x_4 + 2 = 0, \\ x_5 + x_6 - 3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2, \\ x_2 = 1 + 2t_1 - 2t_2, \\ x_3 = 3t_1 + 3t_2, \\ x_4 = 1 + 4t_1 - 4t_2; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_4 - 1 = 0. \end{cases}$

Упражнения к § 7

1. а) (6; 0; —2). б) (—1; 2; 2).
   в) (—4; 2; 4). г) $x_1 - 2x_3 - 6 = 0$.
2. а) Двумерная плоскость $\begin{cases} x_3 - 1 = 0, \\ x_4 - 2 = 0. \end{cases}$

   б) $\begin{cases} u'_1 = u_1 - u_3, \\ u'_2 = u_2 + u_3 + u_4, \\ u'_3 = u_3 - u_4, \\ u'_4 = u_3 + u_4. \end{cases}$ в) (—4; 8; 2; 6), (3; 0; 3; —1).

   г) $\dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2 + 5}{3} = \dfrac{x_3}{3} = x_4 + 3.$

3. а) $\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2, \\ x'_2 = x_4 - 1, \\ x'_3 = x_3 + 1, \\ x'_4 = x_2 - 1, \\ x'_5 = x_4 + x_5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + 3, \\ x'_2 = x_4, \\ x'_3 = x_3, \\ x'_4 = x_2, \\ x'_5 = x_4 + x_5 - 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_4, \\ x'_2 = x_2 + x_4, \\ x'_3 = x_3 + x_4, \\ x'_4 = x_4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'_1 = 4x_2 + x_3 - 1, \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 - 5, \\ x'_3 = 2x_2 + 2x_3 + 1. \end{cases}$

Упражнения к § 8

1. а) $\begin{cases} x_1' = 1 + x_3, \\ x_2' = x_3 + x_4, \\ x_3' = x_2 - x_1, \\ x_4' = 2 - x_2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1' = 4 - x_3 - x_4, \\ x_2' = 3 - x_4, \\ x_3' = x_1 - 3, \\ x_4' = 2 - x_1 + x_2. \end{cases}$

в) $\alpha^{-1} = \alpha.$ г) $\begin{cases} x_1' = x_3 + x_4 + 2, \\ x_2' = x_3 + 2, \\ x_3' = x_2 - 1, \\ x_4' = x_1 - x_2 + 1. \end{cases}$

2. а) Да. б) Да. в) Нет.

3. а) $\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ x_2' = b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \\ x_3' = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + x_3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1, \\ x_2' = b_{21}x_1 + x_2, \\ x_3' = b_{31}x_1 + x_3. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1, \\ x_2' = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_2, \\ x_3' = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1' = b_{11}x_1 + b_{12}x_2, \\ x_2' = b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \\ x_3' = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_3. \end{cases}$

Множества преобразований в примерах 3а, б, в, г — группы.

Упражнения к § 9

1. В формуле (1) из 9.3 положите $0 \leqslant t < \infty$.
2. а) 0. б) 1.

3. а) Если $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 < t < 1$, то $\overrightarrow{BC} = (1 - t)\,\overrightarrow{BA}$, где $0 < 1 - t < 1$.
б) Если $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$, где $k > 0$, то
$\overrightarrow{AC} = \dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}$, где $\dfrac{k}{1+k} > 0$; если $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 < t < 1$,
то $\overrightarrow{AC} = \dfrac{t}{1-t}\overrightarrow{CB}$, где $\dfrac{t}{1-t} > 0$.

4. Доказывается так же, как и теорема 1 из 9.2.
6. а) $x_i' = 2s_i - x_i$; $x_i' = -x_i$. б) Да. в) Нет.

Упражнения к § 10

1. а) $\dfrac{\pi}{4}$, б) $\dfrac{2}{3}\pi$.

2. $\arccos\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\pi - \arccos\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}$.

Упражнения к § 11

1. а и в.
2.

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Диагональные элементы равны $+1$ или -1.

Упражнения к § 12

2. Используйте аксиому IV_2.
3. $2,\ 2,\quad 2\sqrt{2};\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{2}$.
4.
$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2}x_3' + \frac{1}{2}x_4', \\ x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2}x_3' - \frac{1}{2}x_4', \\ x_3 = -3 + \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2}x_3' + \frac{1}{2}x_4', \\ x_4 = 4 + \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2}x_3' - \frac{1}{2}x_4'. \end{cases}$$

Упражнения к § 13

1. а) Да. б) Нет.
2. При $k = 1$ — тождественное преобразование, при $k = -1$ — симметрия относительно центра гомотетии.
4. $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2 = R^2$.
5. $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2 \leqslant R^2$.
6. $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.
7. $u_1(x_1 - a_1) + u_2(x_2 - a_2) + \ldots + u_n(x_n - a_n) = 0$.

Упражнения к § 15

1. а, б, е, к. 2. а, в, д.

Упражнения к § 16

1. $c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3$.

3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Упражнения к § 17

1. а) $3y_1^2-7y_2^2$. б) $z_1^2-\frac{1}{3}z_2^2-\frac{8}{3}z_3^2$.

в) $\frac{1}{2}u_1^2-\frac{1}{2}u_2^2+6u_3^2$.

2. а) $u_1^2-u_2^2+u_3^2$. б) $u_1^2-u_2^2+u_3^2-u_4^2$.

3. а) $z_1^2-z_2^2$; $\begin{cases} x_1=z_1-z_2-3z_3, \\ x_2=-z_2-2z_3, \\ x_3=z_3. \end{cases}$

б) $u_1^2+u_2^2-u_3^2$; $\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}u_1-\frac{1}{3}u_3, \\ x_2=\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{2}u_3, \\ x_3=u_3. \end{cases}$

в) z_1^2; $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(z_1+3z_2-z_3), \\ x_2=z_2, \\ x_3=z_3. \end{cases}$

г) $-u_1^2+u_2^2$; $\begin{cases} x_1=-u_1-7u_3, \\ x_2=\frac{\sqrt{6}}{6}u_2-\frac{1}{3}u_3, \\ x_3=u_3. \end{cases}$

д) $u_1^2-u_2^2+u_3^2$; $\begin{cases} x_1=u_1-u_2-\frac{3}{2}u_3, \\ x_2=-u_2-\frac{1}{2}u_3, \\ x_3=\frac{1}{2}u_3. \end{cases}$

е) $u_1^2+u_2^2-u_3^2$; $\begin{cases} x_1=u_1-\frac{1}{2}u_2+\frac{5}{6}u_3, \\ x_2=\frac{1}{3}u_2-\frac{1}{6}u_3, \\ x_3=\frac{1}{2}u_3. \end{cases}$

ж) $u_1^2-u_2^2$; $\begin{cases} x_1=u_1-u_2-u_3, \\ x_2=u_1+u_2-u_4, \\ x_3=u_3, \\ x_4=u_4. \end{cases}$

з) $u_1^2-u_3^2+u_4^2$; $\begin{cases} x_1=u_1-2u_2, \\ x_2=u_2, \\ x_3=\frac{1}{3}u_3, \\ x_4=u_4+u_5, \\ x_5=u_5. \end{cases}$

Упражнения к § 18

Приведите квадратичную форму к каноническому виду.

1. Да. 2. Нет. 3. Нет.

Упражнения к § 20

1. а) Гипербола $z_1^2 - z_2^2 = 1$.

   б) Пара параллельных прямых $z_1^2 = 1$.

   в) Эллипсоид $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$.

   г) Однополостный гиперболоид $-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$.

2. а) Пара пересекающихся прямых $z_1^2 - z_2^2 = 0$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}, \\ x_2 = -\frac{1}{2}z_1 - z_2 - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   б) Парабола $z_1^2 = 2z_2$; $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 1, \\ x_2 = -\frac{1}{2}z_2 + 1. \end{cases}$

   в) Гиперболический параболоид $z_1^2 - z_2^2 = 2z_3$;

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - 4, \\ x_2 = z_1 - z_2 - 2, \\ x_3 = \frac{1}{3}z_3 - 1. \end{cases}$$

   г) Конус $v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 0$;

$$\begin{cases} x_1 = v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 - 1, \\ x_2 = \frac{2}{3}v_2, \\ x_3 = -\frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3. \end{cases}$$

   д) Эллиптический цилиндр $u_1^2 + u_2^2 = 1$;

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2 + u_3 - 1, \\ x_2 = 2u_2 + 2u_3, \\ x_3 = u_3. \end{cases}$$

   е) Пара пересекающихся плоскостей $y_1^2 - y_2^2 = 0$;

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_3, \\ x_2 = y_2 + y_4, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4. \end{cases}$$

Упражнения к § 22

1. а) $15y_1^2 - 10y_2^2$; $\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(4y_1 + 3y_2), \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(3y_1 - 4y_2). \end{cases}$

б) $6y_1^2$; $\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_2 - y_1). \end{cases}$

в) $6y_1^2 + 3y_2^2$; $\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}(2y_1 + 2y_2 - y_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(-y_1 + 2y_2 + 2y_3), \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(2y_1 - y_2 + 2y_3). \end{cases}$

г) $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2. \end{cases}$

д) $6y_1^2$; $\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3, \\ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_3. \end{cases}$

е) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - 4y_4^2$; $\quad \begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2y_3 + y_4), \\ x_4 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(y_3 - 2y_4). \end{cases}$

ж) $2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - 4y_4^2$; $\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4), \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4), \\ x_4 = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4). \end{cases}$

2. $J_1 = c_{11} + c_{22} + c_{33}$, $\quad J_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$,

$$J_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Упражнения к § 23

1. а) Эллипс $\frac{z_1^2}{12} + \frac{z_2^2}{2} = 1$.

б) Пара пересекающихся прямых $z_1^2 - \frac{z_2^2}{2} = 0$.

в) Гипербола $\frac{z_2^2}{9} - z_1^2 = 1$.

г) Двуполостный гиперболоид вращения $\frac{z_1^2}{3} - \frac{z_2^2}{15} - \frac{z_3^2}{15} = 1$.

д) Эллиптический параболоид $2z_1^2 + z_2^2 = 2z_3$.

2. а) Гипербола $z_1^2 - \frac{z_2^2}{4} = 1$; $\quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2) - 2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-z_1 + z_2) - 1. \end{cases}$

б) Парабола $z_1^2 = 2\sqrt{5}\,z_2$; $\quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2z_1 + z_2) + 3. \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_1 - 2z_2) - 1. \end{cases}$

в) Пара параллельных прямых $z_1^2 = 16$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2) - 1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2) - 1. \end{cases}$$

г) Гиперболический параболоид $y_1^2 - y_2^2 = 2y_3$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2), \\ x_2 = y_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2). \end{cases}$$

д) Гиперболический цилиндр $\frac{z_2^2}{9} - z_1^2 = 1$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (z_1 + 2z_2) + 1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2z_1 + z_2) + 1, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

е) Пара пересекающихся плоскостей $\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{3} = 0$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 - \frac{1}{6}, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} z_3 + \frac{1}{3}, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 + \frac{5}{6}. \end{cases}$$

ж) Параболический цилиндр $z_1^2 = 2\sqrt{3}\, z_3$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 + 1, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 - 1, \\ x_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 + 2. \end{cases}$$

з) Эллиптический конус $\frac{z_1^2}{4} + z_2^2 - \frac{z_3^2}{4} = 0$;

$$\begin{cases} x_1 = z_1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2z_2 + z_3) - 1, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-z_2 + 2z_3) - 2. \end{cases}$$

и) Эллипсоид вращения $\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{9} + z_3^2 = 1$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (z_1 + z_3), \\ x_2 = z_2 - 1, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (z_1 - z_3). \end{cases}$$

к) Гиперболический параболоид $z_1^2 - z_2^2 = z_3$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} (2z_1 + z_2 + 2z_3) + 1, \\ x_2 = \frac{1}{3} (-2z_1 + 2z_2 + z_3) + 1, \\ x_3 = \frac{1}{3} (z_1 + 2z_2 - 2z_3). \end{cases}$$

л) Однополостный гиперболоид $\frac{z_1^2}{3} + z_2^2 - z_3^2 = 1$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (z_2 + z_3) - 1, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (z_2 - z_3) + 1, \\ x_3 = z_1 + 2. \end{cases}$$

м) Цилиндр вращения $z_1^2 + z_2^2 = 4$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 - 1, \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} z_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} z_3 + 1, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 - 1. \end{cases}$$

н) Пара параллельных плоскостей $z_1^2 = 4$;

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} (2z_1 + z_2 + 2z_3 + 2), \\ x_2 = \frac{1}{3} (2z_1 - 2z_2 - z_3 + 2), \\ x_3 = \frac{1}{3} (z_1 + 2z_2 - 2z_3 + 1). \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

А т а н а с я н Л. С. Геометрия, ч. I. М., 1973.

А т а н а с я н Л. С., А т а н а с я н В. А. Сборник задач по геометрии, ч. I. М., 1973.

Б а з ы л е в В. Т., Д у н и ч е в К. И., И в а н и ц к а я В. П. Геометрия, ч. I. М., 1974.

Б о л т я н с к и й В. Г., Я г л о м И. М. Векторное обоснование геометрии. — «Математика в школе», 1969, № 4.

Г е л ь ф а н д И. М., Г л а г о л е в а Е. Г., К и р и л л о в А. А. Метод координат. М., 1971.

Е ф и м о в Н. В., Р о з е н д о р н Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., 1970.

Р о з е н ф е л ь д Б. А. Многомерные пространства. М., 1968.

ИБ № 1413

И. В. Парнасский, О. Е. Парнасская

МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ

Редактор *Т. П. Руженская*
Художник *Г. Ф. Лукьяненко*
Художественный редактор *К. К. Федоров*
Технический редактор *Л. М. Дербикова*
Корректор *О. С. Захарова*

Сдано в набор 10.04.78. Подписано к печати 29.09.78. 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Литер. гарн., высокая печать. Условн. л. 8. Уч.-изд. л. 6,53. Тираж 27 000 экз. Заказ № 732. Цена 25 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.