ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ ОБУЧЕНИЮ УЧИТЕЛЕЙ

А. И. ПОГОРЕЛОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

УЧПЕДГИЗ · 1951

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ВВЕДЕНИЮ В АНАЛИЗ

Заочники первого года обучения встречают большие затруднения при изучении первой части математического анализа. Во введении в анализ в большом количестве даются весьма важные основные понятия математического анализа. Успех изучения математического анализа на старших курсах в большой степени зависит от того, как усвоены студентом эти понятия.

На первом курсе у студента нет необходимых навыков самостоятельной работы, а потому изучение этой части курса часто сводится к заучиванию определений. В итоге студент знает формулировки, но не понимает их. Контрольная работа должна оказать помощь студенту в его самостоятельной работе. Изложенные варианты контрольных работ составлены так, что в них включены задачи, связанные с основными понятиями анализа. В ряде задач предлагается студенту самостоятельно сконструировать примеры, связанные с определенными понятиями. Эта группа задач должна способствовать сознательному усвоению этих понятий.

В каждый вариант включены задачи на доказательство, пользуясь определением предела или определением непрерывности. При решении этих задач студент должен показать, что он владеет этими определениями и умеет их применять к некоторым частным случаям.

В контрольную работу включены задачи на вычисление пределов последовательностей и функций. При решении этих задач студент должен показать, как он владеет основными способами вычисления пределов.

В каждый вариант включена задача, связанная со свойствами непрерывных функций. При решении этой задачи студент должен сделать ссылку на соответствующую теорему о непрерывных функциях. Тем самым внимание студента обращается на основные теоремы о непрерывных функциях.

Контрольную работу рекомендуется выполнять параллельно с изучением теоретического курса. Если попутно с выполнением контрольной работы у студента возникнут дополнительные вопросы, то необходимо их четко сформулировать в особом примечании и просить письменную консультацию по этим вопросам.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1-й вариант

№ 1. Составить сходящуюся возрастающую числовую последовательность, предел которой равен нулю. Сколько таких последовательностей можно составить? Сколько предельных точек имеет эта последовательность?

№ 2. Составить две убывающие последовательности так, чтобы члены первой были меньше членов второй последовательности, т. е. $a_n < b_n$ при любом n, но пределы этих последовательностей оба были равны единице:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

№ 3. Составить ограниченную сверху последовательность так, чтобы верхняя грань множества, составленного из членов последовательности, была членом данной последовательности.

№ 4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n = \frac{4n^2+1}{6n^2-1}$ имеет предел $l = \frac{2}{3}$.

№ 5. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x = -2$ (точка $x = -2$ должна быть единственной общей точкой для всех сегментов).

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2\sqrt{n^2+1}+3n}.$$

№ 7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что при $x \to 2$ функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}}$ имеет $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{3}$.

№ 8. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

a) $y = \ln(4 - x^2)$; b) $y = \sqrt{1 - x^2}$; c) $y = \arcsin(1 - x)$;

d) $y = \sqrt{1 - \sin x}$; e) $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$;

f) $y = \sqrt{x^2 - 9}$.

№ 9. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + 5x - 6}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$; b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{x-2} - 1}{\sqrt{x-2} - 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{x}$; d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{x+2}$.

№ 10. Построить функцию, которая была бы бесконечно малой

при $x \to 1$ и при $x \to 2$.

№ 11. Пользуясь определением непрерывности функции в точке, доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x+1}$ непрерывна в точке $x = 1$.

№ 12. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли функция $f(x) = x^3 + x + 1$ принимать значение, равное трем в некоторой точке, лежащей внутри сегмента [0,2].

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

2-й вариант

№ 1. Составить сходящуюся убывающую числовую последовательность, предел которой равен двум. Сколько таких последовательностей можно составить? Сколько предельных точек имеет эта последовательность?

№ 2. Составить две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ так, чтобы первая из них имела предел, равный нулю, вторая была возрастающей неограниченной, а произведение последовательностей $\{a_n b_n\}$ сходилось к нулю.

№ 3. Составить невозрастающую ограниченную последовательность так, чтобы нижняя грань множества, составленного из членов последовательности, была членом последовательности. Сколько равных членов должна иметь эта последовательность?

№ 4. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x=1$ (точка $x=1$ должна быть единственной общей точкой для всех сегментов).

№ 5. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n = \frac{3n^2-n+1}{6n^2+2n+3}$ имеет предел $l=\frac{1}{2}$.

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt[3]{n^3+1}}{2n+3\sqrt[3]{n^3+2n+3}}.$$

№ 7. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

$$\text{a) } y=\frac{x}{1+x^2};\quad \text{b) } y=\arccos(x^2-1);$$

$$\text{c) } y=\sqrt{x^2-4x+3};\quad \text{d) } y=\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-1};$$

$$\text{e) } y=\ln(4-x)+\frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

№ 8. Пользуясь определением предела функции, доказать, что при $x\to 2$ функция $f(x)=x^2+1$ имеет предел $l=5$.

№ 9. Вычислить следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+2x-8}{2x^3-5x-6};\quad \text{b) } \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}.$$

$$\text{c) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x};\quad \text{d) } \lim_{x\to l}\frac{\ln x-1}{x-l}.$$

№ 10. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли уравнение $x^5-2x^4+x^3-x-1=0$ иметь корень, принадлежащий сегменту [1, 2].

№ 11. Сколько точек разрыва (и каких) может иметь функция $f(x)=\frac{ax+b}{ax^3+bx+c}$, где все коэффициенты действительные числа?

№ 12. Будет ли функция, заданная так:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x^3, \text{ если } x > 1, \end{cases}$$

непрерывна на сегменте $[0, 2]$?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

3-й вариант

№ 1. Составить ограниченную числовую последовательность так, чтобы она имела две предельные точки $x_1=-1$ и $x_2=3$. Сколько предельных точек может иметь сходящаяся последовательность? Может ли иметь предельные точки расходящаяся последовательность?

№ 2. Составить две неограниченные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ так, чтобы разность этих последовательностей $\{a_n-b_n\}$ была сходящейся последовательностью и имела предел, равный нулю.

№ 3. Составить ограниченную сверху последовательность так, чтобы верхняя грань множества, составленного из членов последовательности, не была членом последовательности.

№ 4. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x=\frac{1}{2}$ $\left(\text{точка } x=\frac{1}{2} \text{ должна быть единственной общей точкой для всех сегментов}\right)$.

№ 5. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n=\frac{n+1}{2n+3}$ имеет предел $l=\frac{1}{2}$.

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n^4+1}}{3n^2+n\sqrt{n+1}}.$$

№ 7. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

a) $y = \ln(x^2 - 4)$; b) $y = \arcsin\frac{x}{x+1}$; c) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

d) $y = \sqrt{5-x} + \ln(x-2)$; e) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$?

№ 8. Пользуясь определением предела функции, доказать, что при $x \to 3$ функция $f(x) = \sqrt{x+1}$ имеет предел $l = 2$.

№ 9. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^3 - 2x^2 - 7x + 4}{3x^3 - 8x + 5}$; b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{7-2x}}{\sqrt{2x-5} - \sqrt{3x-8}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

№ 10. Пользуясь определением непрерывности функции в точке, доказать, что функция $f(x) = x^3 + 1$ непрерывна в точке $x = 2$.

№ 11. Сколько точек разрыва (и каких) может иметь функция

$$f(x) = \frac{x+1}{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e},$$

где все коэффициенты действительные числа?

№ 12. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли функция $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x - 2$ принимать значение, равное двум в некоторой точке, лежащей внутри сегмента [0, 1].

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

4-й вариант

№ 1. Составить сходящуюся возрастающую последовательность, предел которой равен -1. Сколько таких последовательностей можно составить? Сколько предельных точек может иметь такая последовательность?

№ 2. Составить две сходящиеся последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ так, чтобы каждая из них имела предел, равный нулю, а частное этих последовательностей $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ было расходящейся последовательностью.

№ 3. Составить неубывающую ограниченную последовательность так, чтобы верхняя грань множества, составленного из членов последовательности, была членом последовательности. Сколько равных членов будет иметь эта последовательность? Будет ли сходящейся составленная последовательность?

№ 4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n = \frac{n^2+n-1}{3n^2+1}$ имеет предел $l=\frac{1}{3}$.

№ 5. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x=-2$ (точка $x=-2$ должна быть единственной общей точкой для всех сегментов).

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-\sqrt{n^2+1}}{4\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3-1}}.$$

№ 7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что при $x\to-1$ функция $f(x)=\frac{1}{4+x}$ имеет предел $l=\frac{1}{3}$.

№ 8. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

$$\text{a) } y=\operatorname{arcctg}\frac{1-x}{1+x^2};\quad \text{b) } y=\ln(4x^2-5);$$

$$\text{c) } y=\arccos(1-\sin x);\quad \text{d) } y=\sqrt{25-x^2}+\ln(x-1);$$

$$\text{e) } y=\sqrt{x^2-8x+15}?$$

№ 9. Вычислить следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x\to-1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3-3x-2};\quad \text{b) } \lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{6-x}}{\sqrt[3]{x+3}-2};$$

$$\text{c) } \lim_{x\to0}\frac{1-\cos mx}{x^2};\quad \text{d) } \lim_{x\to10}\frac{\log_{10}x-1}{x-10}.$$

№ 10. Построить функцию, которая была бы бесконечно малой при $x \to 1$, при $x \to -1$ и при $x \to 2$. Сколько таких функций можно построить?

№ 11. Сколько точек разрыва (и каких) может иметь функция

$$f(x) = \frac{x+1}{ax^5 + bx^3 + cx + d},$$

где все коэффициенты действительные числа?

№ 12. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли функция $f(x) = 3x^3 + x + 1$ принимать значение, равное двум в некоторой точке, лежащей внутри сегмента $[-1; 1]$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

5-й вариант

№ 1. Составить бесконечную убывающую числовую последовательность, предел которой равен пяти. Сколько таких последовательностей можно составить? Сколько предельных точек имеет эта последовательность?

№ 2. Составить две возрастающие неограниченные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ так, чтобы частное этих последовательностей $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ было неограниченной возрастающей последовательностью. Будет ли эта последовательность иметь предельные точки?

№ 3. Составить бесконечную ограниченную последовательность так, чтобы верхняя и нижняя грани множества, составленного из членов последовательности, были членами последовательности. Будет ли эта последовательность иметь предельные точки?

№ 4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n = \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{3n + 2}$ имеет предел $l = 1$.

№ 5. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x = 7$ (точка $x = 7$ должна быть единственной общей точкой для всех сегментов).

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3 + 3\cdot 5 + \ldots + (2n-1)(2n+1)}{2n^3}.$$

№ 7. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

a) $y=\frac{x^2-1}{1+x^2}$; b) $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$; c) $y=\arcsin(x+5)$;

$$\text{d) } y=\sqrt{x^2-16}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}};$$

$$\text{e) } y=\ln(x^2-9)+\frac{1}{\sqrt{x-1}}?$$

№ 8. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^3-4x^2-x+2}{2x^3-3x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+4}}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x-1}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

№ 9. Пользуясь определением непрерывности функции в точке, доказать, что функция $y=x^2+x+1$ непрерывна в точке $x=1$.

№ 10. Будет ли функция, заданная так

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2+1}, & \text{если } x\leqslant 2, \\ \sin\dfrac{2\pi}{x}, & \text{если } x>2, \end{cases}$$

непрерывна на сегменте [1, 3]?

№ 11. Установить, какого рода разрыв имеет функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x+1}, & \text{если } x>1, \end{cases}$$

в точке $x=1$.

№ 12. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли уравнение $2x^4-3x^2+x-1=0$ иметь корень, принадлежащий сегменту [1, 2].

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

6-й вариант

№ 1. Составить расходящуся ограниченную бесконечную последовательность, не имеющую равных членов. Сколько таких последовательностей можно составить? Будет ли составленная последовательность иметь предельные точки?

№ 2. Составить ограниченную снизу последовательность так, чтобы нижняя грань множества, составленного из членов последовательности, не была членом последовательности. Сколько таких последовательностей можно составить? Будет ли иметь предельные точки составленная последовательность?

№ 3. Составить две неограниченные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ так, чтобы частное этих последовательностей $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ было последовательностью, сходящейся к нулю.

№ 4. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x = -3$ (точка $x = -3$ должна быть единственной общей точкой для всех сегментов).

№ 5. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$ имеет предел $l = \frac{1}{3}$.

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n^3+1}+n^2}{3\sqrt{n^4+1}+n}.$$

№ 7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что при $x \to 1$ функция $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ функция имеет предел $l = 2$.

№ 8. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

a) $y = x + \sqrt[3]{x+1}$; b) $y = \arccos(1-x)$;

c) $y=2\ln(9-x^2)$; d) $y=\sqrt{8-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}$;

e) $y=a^{x+1}-\sqrt{x^2-9x+20}$?

№ 9. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-7x^2+16x-12}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{3+2x}}{\sqrt{4+3x}-\sqrt{2+x}}$.

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$.

№ 10. Построить функцию, которая была бы бесконечно малой

при $x\to 1$, при $x\to -1$, при $x\to 3$ и при $x\to -3$.

№ 11. Какого рода разрыв имеет функция

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{если } x\leqslant 2,\\ \frac{1}{x^2-4}, & \text{если } x>2,\end{cases}$$

в точке $x=2$?

№ 12. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли уравнение $x^5+x^3+2x+10=0$ иметь отрицательный корень, абсолютная величина которого меньше пяти.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

7-й вариант

№ 1. Составить неограниченную числовую последовательность так, чтобы она имела только одну предельную точку $x=2$.

№ 2. Составить две неограниченные возрастающие последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ так, чтобы разность этих последовательностей $\{a_n-b_n\}$ была последовательностью, сходящейся к единице.

№ 3. Составить бесконечную ограниченную последовательность так, чтобы верхняя и нижняя грани множества, составленного из членов последовательности, не были членами последовательности. Сколько таких последовательностей можно составить? Будет ли иметь предельные точки составленная последовательность?

№ 4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n = \frac{3n^2-1}{5n^2+n}$ имеет предел $l=\frac{3}{5}$.

№ 5. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x=-4$ (точка $x=-4$ должна быть единственной общей точкой для всех сегментов).

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt{n^2+1}}{3n+\sqrt{n+1}}.$$

№ 7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что при $x\to 1$ функция $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$ имеет предел $l=\frac{1}{3}$.

№ 8. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

$$\text{a) } y=\sqrt{\operatorname{tg} x-1};\ \text{b) } y=x+\arccos\frac{x^2}{x^2+1};$$

$$\text{c) } y=\sqrt{x^2-11x+24};$$

$$\text{d) } y=\ln(9-x^2)+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}};\ \text{e) } y=\arcsin\frac{x}{1+x}\ ?$$

№ 9. Вычислить следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4};\ \text{b) } \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt[3]{x-2}-1};$$

$$\text{c) } \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x};\ \text{d) } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{x(1+x)}.$$

№ 10. Пользуясь определением непрерывности функции в точке, доказать, что функция $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ непрерывна в точке $x=2$.

№ 11. Сколько точек разрыва (и каких) может иметь функция

$$f(x)=\frac{ax+b}{ax^7+bx^3+cx+d},$$

где все коэффициенты действительные числа?

№ 12. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли функция $f(x)=5x^4-x^3+x-10$ принимать значение, равное пяти в некоторой точке, лежащей внутри сегмента [1, 2].

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

8-й вариант

№ 1. Составить бесконечную возрастающую ограниченную последовательность. Сколько предельных точек может иметь эта последовательность? Должна ли эта последовательность сходиться или она может быть расходящейся?

№ 2. Составить две возрастающие последовательности так, чтобы члены первой были меньше членов второй последовательности, т. е. $a_n < b_n$ при любом n, но пределы этих последовательностей равны двум; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

№ 3. Составить ограниченную снизу последовательность так, чтобы нижняя грань множества, составленного из членов последовательности, была членом последовательности. Сколько таких последовательностей можно составить? Должна ли эта последовательность иметь предельные точки?

№ 4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что последовательность $a_n = \frac{6n^2-3}{10n^2+n-2}$ имеет предел $l=\frac{3}{5}$.

№ 5. Составить последовательность сегментов, стягивающуюся к точке $x=-\frac{1}{2}$ (точка $x=-\frac{1}{2}$

должна быть единственной общей точкой для всех сегментов).

№ 6. Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{\sqrt{16n^4+1}+n+1}.$$

№ 7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что при $x\to 7$ функция $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ имеет предел $l=2$.

№ 8. В каких точках оси OX определены (имеют действительные значения) функции:

$$\text{a) } y=x+\operatorname{arctg}\frac{x}{1+x^2};\ \text{b) } y=\ln\sin x;$$

$$\text{c) } y=\sqrt{x^2-7x+10};\ \text{d) } \ln(4+x)+\sqrt{2-x};$$

$$\text{e) } y=\arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}?$$

№ 9. Вычислить следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9};\ \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{c) } \lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2};\ \text{d) } \lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

№ 10. Пользуясь определением непрерывности функции в точке, доказать, что функция $f(x)=x^3+2$ непрерывна в точке $x=1$.

№ 11. Установить, какого рода разрыв имеет функция

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x\geqslant 1, \\ 2^{\frac{1}{1-x}}, \text{ если } x<1, \end{cases}$$

в точке $x=1$.

№ 12. Пользуясь теоремой о непрерывных функциях, установить, будет ли уравнение $3x^3-2x^2+x+3=0$ иметь корень, принадлежащий сегменту $[-1, 0]$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Введение

В контрольную работу включены задачи на вычисление производных и дифференциалов функций. Эти задачи следует выполнять после изучения теоретического курса и решения достаточного количества задач и примеров из любого задачника по математическому анализу.

В каждый вариант включена задача, связанная с геометрическим или механическим смыслом производной. Студент должен уметь пользоваться производной при вычислении скоростей и угловых коэффициентов.

Общие теоремы дифференциального исчисления (Ролля, Лагранжа и Коши) широко применяются в курсе математического анализа, а потому необходимо обратить внимание студента на те условия, при которых можно пользоваться этими теоремами. В каждый вариант включена задача, связанная с этими теоремами.

В контрольной работе предлагаются задачи на исследование функций на максимум и минимум и задачи на построение графиков функций.

Особое внимание в самостоятельной работе следует уделить построению графиков функций.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y=\sqrt{x^2-1}$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные функций:

$$\text{a)}\ y=\frac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}};\quad \text{b)}\ y=\ln\frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2};$$

$$\text{c)}\ y=(2x)^{x\ln x};\quad \text{d)}\ y=\frac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x};$$

e) $y=\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; f) $y=\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$.

№ 3. В какой точке параболы $y=x^2-4x+3$ следует провести касательную, чтобы она была параллельна оси OX?

№ 4. Вычислить дифференциалы функций:

a) $y=\sqrt{\ln(1-3x)}$; b) $y=\ln\operatorname{ctg} 3x$; c) $y=e^{\sqrt{2x}}$;
d) $y=\cos^3 2x$.

№ 5. Найти выражение дифференциала порядка n для функции

$$f(x)=\frac{1}{a+bx}.$$

№ 6. Дана функция $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Удовлетворяет ли эта функция условиям теоремы Ролля на сегменте $[-1, 1]$? Если удовлетворяет, то найти ту точку, в которой производная равна нулю. Истолковать геометрически результат исследования.

№ 7. Найти угловой коэффициент касательной к кривой

$$x=t^4-2t^3-t^2+4t-2;\ y=t^4+2t^3-t^2-4t-2$$

в точке $x=0$, $y=0$.

№ 8. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln 2+2\ln\cos\frac{x}{2}-\cos x}{\cos^2 x};$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{x-2}.$$

№ 9. Определить промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=2x^3-15x^2+24x+1.$$

№ 10. Найти максимум и минимум функции

$$f(x)=\frac{7}{2x^5+3x^3+15x-1}.$$

№ 11. Сосуд состоит из цилиндра, открытого сверху и заканчивающегося снизу конусом, высота которого равна радиусу основания. Каковы должны быть размеры цилиндра и конуса для того, чтобы при данной поверхности S сосуд имел наибольший объем?

№ 12. Построить график функции

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y=x^2\cos x$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные функций:

$$\text{a) } y=\frac{1}{8}(5-2x+x^2)\cdot\sqrt[3]{(5+3x)^2};$$

$$\text{b) } y=x(\arcsin x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x;$$

$$\text{c) } y=2^{x\ln x};\quad \text{d) } y=\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln\sin x;$$

$$\text{e) } y=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};\quad \text{f) } y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}.$$

№ 3. Вычислить дифференциалы функций:

$$\text{a) } y=\arccos\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}};\quad \text{b) } y=\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\right)^2;$$

$$\text{c) } y=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\right)^2;\quad \text{d) } y=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{\ln x}.$$

№ 4. Показать, что кривые $y=4x^2+2x-8$ и $y=x^3-x+10$ касаются друг друга (т. е. имеют общую касательную) в точке (3; 34). Будут ли кривые иметь касание также при $x=-\frac{1}{3}$?

№ 5. Найти выражение производной порядка n для функции $f(x)=x^3\ln x$.

№ 6. Показать, что функция $f(x) = -\frac{6}{x^3+1}$ возрастает в любом промежутке (a, b), не содержащем значение $x = -1$.

№ 7. Функция задана кусочно

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1 - x^2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Удовлетворяет ли функция условиям теоремы Лагранжа на сегменте $[-2,1]$? Если удовлетворяет, то найти ту точку ξ, в которой $f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Вычертить график функции на указанном сегменте и истолковать геометрически результаты исследования.

№ 8. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)\right]^{\operatorname{ctg} x}$.

№ 9. Найти точки кривой $x = t^2 + t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$, в которых касательная параллельна оси OX.

№ 10. Найти максимум и минимум функции

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12.$$

№ 11. Бак с квадратным основанием должен вмещать v литров. Каковы должны быть его размеры для того, чтобы внутренняя поверхность (без крышки) была наименьшей?

№ 12. Построить график функции

$$y = \frac{x-1}{x^2 + 3x - 4}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

a) $y=\frac{1}{x^2}-\operatorname{arctg} x^2$; b) $y=\frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$;

c) $y=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)-6\arcsin 2x$;

d) $y=(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; e) $y=e^{2x}(1-x^2)$;

f) $y=\ln\left(\cos\sqrt{1-x}\right)$.

№ 3. Вычислить дифференциалы функций:

a) $y=\sqrt[3]{1-x}$; b) $y=\sqrt{x\cdot\cos x}$;

c) $y=\arccos\frac{1}{1-x}$; d) $y=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

№ 4. На кривой $y=5x^2-3x+11$ найти точку, в которой касательная: 1) составляет с положительным направлением оси OX угол в 45°, 2) параллельна прямой $y=7x$.

№ 5. Найти выражение производной порядка n для функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}}.$$

№ 6. Найти точки кривой $x=2t^3-9t^2+12t-1$, $y=t^2+t+1$, в которых касательные параллельны оси OY.

№ 7. Пусть функция задана кусочно

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ если } x\leqslant 0;\\ x\sin\frac{1}{x}, \text{ если } x>0.\end{cases}$$

Вычислить правую и левую производные в точке $x=0$. Будет ли эта функция иметь производную в данной точке?

№ 8. Удовлетворяет ли функция $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$ условиям теоремы Ролля на сегменте $[-1,1]$? Если удовлетворяет, то найти ту точку на сегменте, в которой $f'(\xi)=0$. Сохраняет ли производная знак на данном сегменте? Если же теорема Ролля не применима, то почему?

№ 9. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}+2e^{-\frac{1}{2x}}-3}{e^{-\frac{1}{x}}+2e^{\frac{1}{2x}}-3};\quad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{x}.$$

№ 10. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-4.$$

№ 11. Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы площадь сечения была наибольшей (для того, чтобы сопротивление на сжатие было наибольшим).

№ 12. Построить график функции

$$f(x)=x^2-\sqrt{x^4+1}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$\text{a)}\ y=\frac{4x-2}{\sqrt{4x^2-2x+1}};$$

$$\text{b)}\ y=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{\operatorname{arctg} x}{x};$$

$$\text{c)}\ y=\frac{1}{2\cos^2 x\cdot\cos 2x};$$

$$\text{d)}\ y=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2};$$

$$\text{e)}\ y=(\cos x)^{\frac{1}{x}};\quad \text{f)}\ y=\arccos\sqrt{x}.$$

№ 3. Вычислить дифференциалы функций:

a) $y = \ln(\sin 3x^2)$; b) $y = a^{\operatorname{ctg} 3x}$; c) $y = \sin^3 x \cdot \cos^3 x$;

d) $y = \sqrt{x + \sqrt{2x}}$.

№ 4. Движение точки в пустоте совершается по закону: $S = 4{,}9t^2$ (S — в метрах и t — в секундах); найти скорость $v = \dfrac{dS}{dt}$ и ускорение $v = \dfrac{d^2S}{dt^2}$ движения в конце шестой секунды.

№ 5. Найти выражение производной порядка n для функции

$$f(x) = 2 + \sin^2 x.$$

№ 6. Найти y'_x и y''_{xx} от функции заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \dfrac{2at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{2at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

№ 7. Пусть функция задана кусочно

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x^3 + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Вычислить правую и левую производные данной функции в точке $x = 0$. Будет ли функция иметь производную в этой точке?

№ 8. Удовлетворяют ли функции $f(x) = x_1{}^2 e^{x^2}$ и $\varphi(x) = x^2 + 1$ условиям теоремы Коши $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ на сегменте $[-1,1]$? Если теорема Коши не применима на этом сегменте, то почему?

№ 9. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.

№ 10. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 15x - 10.$$

№ 11. Кровельщик желает сделать открытый жолоб наибольшей вместимости, у которого дно и бока плоские были бы шириной в 10 *см* и бока одинаково наклонены ко дну. Какова должна быть ширина жолоба наверху?

№ 12. Построить график функции

$$y = \sin x + \frac{1}{2\sin x}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$\text{a) } y = \frac{1}{a} \ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x};\ \text{b) } y = \frac{2\sin x + \sin 2x}{2\sin x - \sin 2x};$$

$$\text{c) } y = 3x^3 \arcsin x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2};$$

$$\text{d) } y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2};$$

$$\text{e) } y = (\sin 2x)^{\frac{1}{x}};\ \text{f) } y = 5^{x^2 \sin^2 x}.$$

№ 3. Вычислить дифференциалы функций:

$$\text{a) } y = \frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}};\ \text{b) } y = \ln \operatorname{ctg} 3x;\ \text{c) } y = \cos(1-x^2);$$

$$\text{d) } y = \sin^2 x \cdot \sin(x^2).$$

№ 4. Показать, что синусоида пересекает ось OX каждый раз под углом в 45° или 135° (т. е. в каждой точке пересечения угол между касательной к синусоиде и положительным направлением оси OX равен 45° или 135°).

№ 5. Найти выражение производной порядка n для функции

$$f(x) = \ln(2x+3).$$

№ 6. Найти y'_x и y''_{xx} от функции заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

№ 7. Пусть функция задана кусочно

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Вычислить правую и левую производные в точке $x = 0$. Будет ли эта функция иметь производную в данной точке?

№ 8. Удовлетворяют ли функции $f(x) = e^x$ и $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ условиям теоремы Коши $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ на сегменте $[-2,2]$? Если не удовлетворяет, то почему?

№ 9. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

$$\text{a)} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}; \quad \text{b)} \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \right].$$

№ 10. Найти экстремумы функции

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

№ 11. A и C суть две точки, расположенные по одну сторону плоского зеркала. Луч света, исходящий из точки A, приходит в точку C, отразившись от зеркала в точке B. Показать, что путь ABC имеет наименьшую длину, когда прямые AB и CB образуют равные углы с перпендикуляром к зеркалу.

№ 12. Построить график функции

$$y = 2x + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y=\frac{x-1}{x^2+1}$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$\text{a) } y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$\text{b) } y=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2};$$

$$\text{c) } y=\operatorname{arcctg}\frac{x-1}{x+1};\ \text{d) } y=\frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right];$$

$$\text{e) } y=[\operatorname{tg}(a^2-x^2)]^2;\ \text{f) } y=(\sin x)^{\sqrt{1-x^2}}.$$

№ 3. Вычислить дифференциалы функций:

$$\text{a) } y=\ln\operatorname{tg}2x;\ \text{b) } y=(\operatorname{arctg}x)^2;\ \text{c) } y=\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x};$$

$$\text{d) } y=e^{\sqrt{x}}\cos x.$$

№ 4. Расстояние S (*м*), пройденное пароходом в течение t сек. после отхода, может быть вычислено (для не очень больших значений t) по формуле: $65S=\frac{1}{3}t^3+3t^2+t$. Найти скорость v и ускорение w при $t=10$.

№ 5. Найти выражение производной порядка n для функции

$$y=\ln(x^2-3x+2).$$

№ 6. Найти y'_x и y''_{xx} от функции заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

№ 7. Пусть функция задана кусочно

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ если } x<0, \\ e^x, \text{ если } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Вычислить производную в точке $x=0$, т. е. в точке стыка кусочной функции. Вычертить график этой функции.

№ 8. Функция задана кусочно

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}, & \text{если } x\leqslant 0, \\ x+1, & \text{если } x>0. \end{cases}$$

Удовлетворяет ли функция условиям теоремы Лагранжа на сегменте [—1,2] и если не удовлетворяет, то почему? Вычертить график функции на указанном сегменте и истолковать геометрически результат исследования.

№ 9. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to a}[\arcsin(x-a)\cdot\ln(x-a)]$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right]^{x^2}$.

№ 10. Найти максимум и минимум функции

$$f(x)=(x-1)^2\,(3x^2+2x+7).$$

№ 11. Судно *B*, находящееся на расстоянии 75 *км* к востоку от судна *A*, идет на запад со скоростью 12 *км/час*; судно же *A* идет к югу со скоростью 9 *км/час*. В какой момент суда будут наиболее близки друг к другу?

№ 12. Построить график функции

$$y=\frac{x^2-7x+6}{x-10}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y=x\sqrt{1-x}$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

a) $y=\arcsin\frac{x-1}{x}$; b) $y=\sqrt{x^2+1}\,-$

$$-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right);\quad \text{c)}\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2};$$

$$\text{d)}\quad y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}};\quad \text{e)}\quad y=\ln\sin(ax^2+bx+c);$$

$$\text{f)}\quad y=(x^2+1)^{\frac{1}{x+1}}.$$

№ 3. Вычислить дифференциалы функций:

$$\text{a)}\quad y=\frac{1}{3}\cos^4 3x;\quad \text{b)}\quad y=\sqrt[3]{x+\ln^3 x};$$

$$\text{c)}\quad y=a^{x^2+x+1};\quad \text{d)}\quad y=\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}.$$

№ 4. Точка движется прямолинейно с переменной скоростью $v\left(\frac{м}{сек}\right)$, зависимость которой от времени t (*сек*) выражается формулой: $v=5\sqrt[3]{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}$. Найти ускорение w и скорость v в момент $t=64$.

№ 5. Найти выражение производной порядка n для функции

$$y=(x^2+3x)\ln x.$$

№ 6. Найти y'_x и y''_{xx} от функции заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

№ 7. Функция задана кусочно

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x\leqslant 1; \\ x, & \text{если } x>1. \end{cases}$$

Удовлетворяет ли эта функция условиям теоремы Лагранжа на сегменте [—4,8]? Если не удовлетворяет, то почему? Истолковать геометрически результат исследования.

№ 8. Пусть дана функция

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0; \\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$$

Найти левую и правую производные данной функции в точке $x = 0$. Будет ли эта функция иметь производную в точке $x = 0$?

№ 9. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}; \quad \text{b) } \lim_{x \to 0} [\operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x].$$

№ 10. Человек, находящийся по одну сторону канала, имеющего в ширину ½ *км,* хочет достигнуть пункта на другом берегу, находящегося на расстоянии 5 *км* по каналу. Он может делать пешком 4 *км* в час и плыть 2 *км* в час. По какому пути он наиболее быстро достигнет цели?

№ 11. Построить график функции

$$y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}.$$

№ 12. Найти экстремумы функции

$$y = \frac{7}{2x^5 + 3x^3 + 15x - 1}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

8-й вариант

№ 1. Пользуясь определением производной, вычислить производную функции $y = \sqrt{1 - x^3}$.

№ 2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

$$\text{a) } y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}; \quad \text{b) } y = \ln \frac{x^4 - 3}{x^4 + 2};$$

$$\text{c) } y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1 - x^2};$$

$$\text{d) } y = \operatorname{arcctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad \text{e) } y = \arccos \frac{2x + 1}{x\sqrt{8}};$$

$$\text{f) } y = (\operatorname{tg} 2x)^{x^2}.$$

№ 3. Вычислить дифференциалы функций:

$$\text{a) } y = 3\ln(x + 2x^2); \quad \text{b) } y = (\arccos x)^2;$$

$$\text{c) } y = \frac{e^{x^2} + e^{-x^2}}{e^{x^2} - e^{-x^2}}; \quad \text{d) } y = (1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}.$$

№ 4. На кривой $y = 2x^2 - 3x$ найти такую точку, чтобы касательная, проведенная в этой точке, была перпендикулярна к радиусу-вектору последней (т. е. к отрезку, соединяющему эту точку с началом координат).

№ 5. Найти выражение производной порядка n для функции

$$y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 9}.$$

№ 6. Найти y'_x и y''_{xx} от функции заданной в параметрической форме

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$$

№ 7. Найти производную справа и слева от функции $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ в точке $x = 0$.

Будет ли эта функция иметь производную в точке $x = 0$? Вычертить график этой функции в окрестности точки $x = 0$.

№ 8. Дана функция $f(x) = \frac{x}{1 + x^2} - \frac{1}{4}$. Удовлетворяет ли эта функция условиям теоремы Ролля на сегменте $[2 - \sqrt{3};\ 2 + \sqrt{3}]$? Если теорема Ролля применима, то найти ту точку ξ на сегменте, в которой $f'(\xi) = 0$; если же теорема Ролля не применима, то почему?

№ 9. Применяя правило Лопиталя, найти следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 - \sin 2x)}{\ln(1 - \operatorname{tg} x)}; \quad \text{b) } \lim_{x \to 1} \left[\cos \frac{\pi}{2x} \cdot \ln(1 - x)\right].$$

№ 10. Найти максимум и минимум функции

$$f(x) = (2x^2 - 2x - 1)\, e^{-2x}.$$

№ 11. Кусок проволоки длиной в 6 *м* нужно разрезать на шесть кусков, из которых два имеют одну длину, а остальные другую. Первые два куска нужно свернуть в окружности и поместить их одну под другой, скрепив остальными четырьмя прутьями. Получим модель прямого цилиндра. Вычислить длину прутьев, при которой цилиндр будет иметь наибольший объем.

№ 12. Построить график функции

$$y = x - \sqrt[3]{x^3 + 1}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ВВЕДЕНИЕ

В теоретическом курсе вводится ряд важных понятий, которыми приходится часто пользоваться. Опыт работы с заочниками показывает, что эти понятия вызывают у студентов много затруднений.

В курсе студент изучает довольно большое количество теорем, в которых излагаются определенные свойства рядов и операции над ними. На экзаменах обнаруживается, что студент при решении задач не умеет пользоваться результатами, полученными в теоретическом курсе. Имеет место разрыв между теоретическим курсом и его практической частью.

При составлении вариантов контрольных работ учитывались приведенные выше соображения. В контрольные работы не включались задачи, требующие длительных и громоздких вычислений. Контрольная работа должна обратить внимание студента на ряд вопросов и этим оказать помощь в самостоятельной работе. В каждый вариант включена задача на суммирование числового ряда. При решении этой задачи студент должен показать, что он владеет понятиями сходимости и суммы ряда и умеет их применять к некоторым частным случаям.

Ошибки, обнаруженные при решении этой задачи, дают возможность рецензенту установить причины затруднений и предложить студенту ряд дополнительных вопросов, способствующих усвоению понятия сходимости.

В каждый вариант включены задачи на исследование числовых рядов на сходимость. При решении этих примеров студент должен по виду общего члена установить, каким из признаков сходимости следует пользоваться.

Особо выделены ряды, при исследовании которых приходится пользоваться теоремой о сравнении рядов. Требование пользоваться при исследовании сравнением рядов вызвано желанием приучать студентов к оценкам сверху и снизу. Опыт показывает, что студенты редко прибегают к сравнению рядов и более охотно применяют какой-нибудь специальный признак сходимости. Это объясняется отсутствием навыка в производстве оценок.

В отдельных задачах исследование на сходимость сводится к исследованию общего члена ряда. При решении этих примеров студент обнаруживает, что при исследовании рядов на сходимость следует пользоваться не только достаточными признаками, но и необходимым.

В каждый вариант включены задачи на исследование рядов на абсолютную и условную сходимость. В отдельных задачах ставится вопрос о зависимости суммы ряда от порядка его членов. При решении этих задач студент должен использовать соответствующие теоремы об абсолютно и условно сходящихся рядах. В контрольную работу включены задачи на составление произведения двух рядов. При решении этих задач заочник должен использовать теорему об умножении рядов.

Все задачи на числовые ряды подобраны так, чтобы фиксировать внимание заочника на основных понятиях, свойствах и теоремах из теории числовых рядов.

Вторая группа задач контрольной работы посвящена функциональным последовательностям и степенным рядам. В каждый вариант включена задача на исследование функциональной последовательности на равномерную сходимость. Необходимость включения в контрольную работу таких задач не требует особого обоснования. Каждый студент должен сознательно усвоить понятие равномерной сходимости. Графические иллюстрации являются весьма полезными при решении этих задач.

Особое внимание в работе уделено теоремам о дифференцировании и интегрировании функциональных рядов. В соответствующих задачах необходимо установить, удовлетворяет ли функциональный ряд условиям теоремы о дифференцировании или интегрировании рядов.

Опыт показывает, что заочник запоминает заключительную часть каждой из теорем и не помнит условий, что приводит к формальному почленному дифференцированию и интегрированию ряда. В работу включены задачи на разложение функций в ряд. Предполагается, что при решении этих задач студент может широко использовать теоретический материал (формулы Тейлора и Маклорена; теоремы о степенных рядах; разложение в ряд элементарных функций).

В каждом варианте предложена задача на вычисление с заданной точностью синуса или косинуса определенного аргумента. Учитель средней школы должен иметь понятие о том, как вычисляются значения тригонометрических функций.

Контрольную работу рекомендуется выполнять параллельно с изучением теоретического курса. Если при выполнении контрольной работы возникнут дополнительные вопросы, то заочник должен их четко сформулировать в особом примечании и просить письменную консультацию по этим вопросам.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

1-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}+\ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\frac{7}{36}+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}+\ldots.$$

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } 1+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{7}{10}\right)^4+\left(\frac{9}{13}\right)^5+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{1\cdot5\cdot9\cdot13}+\ldots+$$

$$+\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}+\ldots;$$

в) $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+a^3}+\ldots+\frac{1}{1+a^n}+\ldots \quad (a>0).$

№ 4. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{19}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n^2+1}+\ldots .$$

№ 5. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\ldots .$$

Будет ли его сумма зависеть от порядка членов ряда?

№ 6. Составить произведение рядов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

и

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots .$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 7. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $\frac{x^2}{1+x^2}$, $\frac{x^4}{1+x^4}$, $\frac{x^6}{1+x^6}$, ... , $\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, ... Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 8. Показать, что ряд

$$\cos\alpha+\frac{\cos 2\alpha}{2^4}+\frac{\cos 3\alpha}{3^4}+\frac{\cos 4\alpha}{4^4}+\ldots+\frac{\cos n\alpha}{n^4}+\ldots$$

удовлетворяет всем условиям теоремы о дифференцировании функционального ряда.

№ 9. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x)=\ln(x^2+3x+2).$$

№ 10. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x+1$ функции $f(x)=\ln(x+5)$.

№ 11. Вычислить сумму степенного ряда

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots ,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 12. Вычислить $\sin 10^\circ$ с точностью до 0,001.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

2-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{(n+2)\,(n+5)}+\ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а)}\ \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}+\ldots;$$

$$\text{б)}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+$$

$$+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\ldots+\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\ldots.$$

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а)}\ \frac{2}{3}+\left(\frac{4}{5}\right)^4+\left(\frac{6}{7}\right)^9+\left(\frac{8}{9}\right)^{16}+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}+\ldots;$$

$$\text{б)}\ \frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots;$$

$$\text{в)}\ \frac{a^2}{1+a^3}+\frac{a^4}{1+a^5}+\frac{a^6}{1+a^7}+\ldots+\frac{a^{2n}}{1+a^{2n+1}}+\ldots\ (a>0).$$

№ 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{4}-1}+\ldots.$$

№ 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 9\cdot 11}+\ldots.$$

Будет ли его сумма зависеть от порядка членов ряда?

№ 6. Показать, что ряд с общим членом $a_n = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot(2n+3)}$ есть расходящийся.

№ 7. Составить произведение рядов

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots$$

и

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}} + \ldots .$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 8. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $\frac{1}{1+x^4}$, $\frac{1}{4+x^4}$, $\frac{1}{9+x^4}, \ldots, \frac{1}{n^2+x^4}, \ldots$. Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 9. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5}x + \frac{5}{7}x^2 + \ldots + \frac{2n-1}{2n+1}x^{n-1} + \ldots$$

и выяснить вопрос о сходимости на концах интервала.

№ 10. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x} + \ldots + \frac{1}{n^2+x} + \ldots, \text{ где } x \geqslant 0,$$

удовлетворяет всем условиям теоремы о дифференцировании функционального ряда.

№ 11. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x) = (e^x - 1)\cdot x.$$

№ 12. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x-1$ функции $f(x) = \sqrt[3]{7+x}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

3-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{28}+\frac{1}{82}+\ldots+\frac{1}{3^n+1}+\ldots;$$

$$\text{б) } 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\ldots.$$

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots;$$

$$\text{б) } 1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}+\ldots;$$

$$\text{в) } \frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^4}+\frac{a^3}{1+a^6}+\ldots+\frac{a^n}{1+a^{2n}}+\ldots (a>0).$$

№ 4. Исследовать на сходимость ряд

$$(a-\sqrt{a})+\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}\right)+\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a}\right)+\ldots.$$

№ 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}+\ldots.$$

Будет ли его сумма зависеть от порядка членов ряда?

№ 6. Составить произведение рядов

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

и

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 7. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $(1-x)$, $(1-x^2)$,

$(1-x^3), \ldots (1-x^n), \ldots$ Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 8. Показать, что ряд

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1}+\frac{\operatorname{arctg} 3x}{27}+\frac{\operatorname{arctg} 5x}{125}+\ldots+\frac{\operatorname{arctg}(2n-1)x}{(2n-1)^3}+\ldots$$

удовлетворяет всем условиям теоремы о дифференцировании функционального ряда.

№ 9. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

№ 10. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x-1$ функции $f(x)=\dfrac{1}{4+x}$.

№ 11. Вычислить сумму степенного ряда

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\frac{x^5}{4\cdot 5}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 12. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 0,001.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

4-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходимости ряда.

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{5}{24}+\ldots+\dfrac{n+1}{n^2+2n}+\ldots;$

б) $\cos^2\alpha+\dfrac{\cos^2 2\alpha}{2^2}+\dfrac{\cos^2 3\alpha}{3^2}+$

$$+\frac{\cos^2 4\alpha}{4^2}+\ldots+\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}+\ldots.$$

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{a}{1}+2!\left(\frac{a}{2}\right)^2+3!\left(\frac{a}{3}\right)^3+4!\left(\frac{a}{4}\right)^4+\ldots \quad (a>0);$$

$$\text{в) } \frac{1}{2}\ln 2+\left(\frac{1}{2}\cdot 2\ln\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot 3\ln\frac{4}{3}\right)^3+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{2}n\cdot\ln\frac{n+1}{n}\right)^n+\ldots.$$

№ 4. Показать, что ряд с общим членом $a_n = \sin\frac{2n\pi}{4n+1}$ есть расходящийся.

№ 5. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}-\frac{1}{9\cdot11}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\ldots.$$

№ 6. Составить произведение рядов

$$1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}+\ldots$$

и

$$1-a+a^2-a^3+\ldots+(-1)^{n-1}a^{n-1}+\ldots.$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 7. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}+\ldots.$$

Вычертить графики нескольких первых частных сумм и график суммы ряда.

№ 8. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2^2(1+2^2x^2)}+\frac{1}{3^2(1+3^2x^2)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{h^2(1+h^2x^2)}+\ldots$$

удовлетворяет всем условиям теоремы об интегрировании функционального ряда.

№ 9. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x)=x\sin x+\cos x.$$

№ 10. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x-1$ функции $f(x)=\sin(1-x)$.

№ 11. Вычислить сумму степенного ряда

$$\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{x^5}{3!\,5}+\frac{x^6}{4!\,6}+\ldots+\frac{x^{n+3}}{(n+1)!\,(n+3)}+\ldots,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 12. Применяя разложение в ряды, найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right).$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

5-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2\,(2n+1)^2}+\ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+$$
$$+\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^h+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{1}{2}+\frac{3}{14}+\frac{5}{34}+\ldots+\frac{2n-1}{4n^2-2}+\ldots.$$

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{1}{3}\cdot 2\ln\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\ln\frac{5}{4}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\ln\frac{7}{6}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{3}\cdot 2n\cdot\ln\frac{2n+1}{2n}\right)^n+\ldots;$$

$$\text{б) } a+2!\,a^2+3!\,a^3+4!\,a^4+\ldots+n!\,a^n+\ldots\ (a>0);$$

$$\text{в) } \frac{a}{1+a}+\frac{a^2}{(1+a)(1+a^2)}+\frac{a^3}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)}+\ldots+$$
$$+\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^3)}+\ldots\ (a>0).$$

№ 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{3\cdot 5}-\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 9}-\frac{8}{9\cdot 11}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n}{(2n+1)(2n+3)}+\ldots .$$

Будет ли его сумма зависеть от порядка членов ряда?

№ 5. Показать, что ряд с общим членом $a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}}\cdot(-1)^{n-1}$ есть расходящийся.

№ 6. Составить произведение рядов

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

и

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots .$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 7. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x)=x+\frac{1}{1+nx^2}$. Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 8. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\frac{2}{3}x+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^3+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}x^4+\ldots$$

и выяснить вопрос о сходимости на концах интервала.

№ 9. Показать, что ряд

$$\frac{1-\cos x}{1}+\frac{1-\cos 2x}{2^3}+\frac{1-\cos 3x}{3^3}+\ldots+\frac{1-\cos nx}{n^3}+\ldots$$

удовлетворяет всем условиям теоремы о дифференцировании функционального ряда.

№ 10. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}.$$

№ 11. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x-2$ функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

№ 12. Применяя разложение в ряды, найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

6-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7.9}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}+\ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } 1+\frac{5}{9}+\frac{10}{28}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3+1}+\ldots;$$

$$\text{б) } 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

№ 3. Показать, что ряд с общим членом $a_n = \operatorname{arctg}\frac{2n+1}{2n+3}$ есть расходящийся.

№ 4. Исследовать на абсолютную сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\ldots;$$

$$\text{б) } 1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots;$$

$$\text{в) } \frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{4}{17}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}+\ldots.$$

№ 5. Составить произведение рядов

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}+\ldots$$

и

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots.$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 6. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x)=\frac{n^2\,x}{e^{nx-1}}$.

Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 7. Показать, что ряд

$$\frac{\operatorname{arcctg} x}{1}-\frac{\operatorname{arcctg} 2x}{8}+\frac{\operatorname{arcctg} 3x}{27}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\operatorname{arcctg} nx}{n^3}+\ldots$$

удовлетворяет всем условиям теоремы об интегрировании функционального ряда.

№ 8. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

№ 9. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x-\frac{1}{2}$ функции $f(x)=e^{2x}$.

№ 10. Вычислить сумму степенного ряда

$$\frac{x^2}{2!\,4}-\frac{x^4}{4!\,6}+\frac{x^6}{6!\,8}-\frac{x^8}{8!\,10}+\ldots,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 11. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{1\cdot3}-\frac{x^2}{3\cdot5}+\frac{x^3}{5\cdot7}-\frac{x^4}{7\cdot9}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

и выяснить вопрос о сходимости на концах интервала.

№ 12. Вычислить $\cos 36°$ с точностью до 0,001

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

7-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{3}{1^2\cdot 5^2}+\frac{5}{3^2\cdot 7^2}+\frac{7}{5^2\cdot 9^2}+\dots+\frac{2n+1}{(2n-1)^2(2n+3)^2}+\dots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Показать, что ряд с общим членом $a_n=\arccos\frac{2n+1}{5n^2+1}$ есть расходящийся.

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $2a+2^4a^4+2^9a^9+\dots+2^{n^2}a^{n^2}+\dots (a>0)$;

б) $\frac{3}{7}+\left(\frac{5}{11}\right)^2+\left(\frac{7}{15}\right)^3+\dots+\left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^n+\dots$;

в) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\dots+\frac{n}{1+n^2}+\dots$.

№ 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5\cdot 8}-\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{5\cdot 7}{6\cdot 9\cdot 12}-\frac{7\cdot 9}{8\cdot 11\cdot 14}+\dots .$$

Будет ли его сумма зависеть от порядка членов?

№ 5. Составить произведение рядов

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{4^{n-1}}+\dots$$

$$\text{и}\quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}+\dots .$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 6. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x)=\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+x}$, $x\geqslant 0$.

Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 7. Исследовать, удовлетворяет ли ряд

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 8x}{4}+\frac{\sin 27x}{9}+\dots+\frac{\sin n^3x}{n^2}+\dots$$

всем условиям теоремы о дифференцировании функционального ряда.

№ 8. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{3^2}-\frac{x^7}{4^2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{n^2}+\dots$$

и выяснить вопрос о сходимости на концах интервала.

№ 9. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2.$$

№ 10. Вычислить сумму степенного ряда

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 11. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x-1$ функции $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

№ 12. Вычислить $\sin 12°$ с точностью до 0,001.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

8-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} + \ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а)}\ \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{5\ln 5} + \frac{1}{7\ln 7} + \frac{1}{9\ln 9} + \ldots;$$

$$\text{б)}\ \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \ldots + \frac{n+3}{(n+2)^2} + \ldots.$$

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а)}\ \frac{1}{6} + \frac{1}{26} + \frac{1}{126} + \ldots + \frac{1}{5^n+1} + \ldots;$$

$$\text{б)}\ \frac{3}{3} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{13}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2n+1}{5n-2}\right)^n + \ldots;$$

$$\text{в)}\ \frac{1}{2} + \frac{4}{9} + \frac{9}{28} + \frac{16}{65} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+1} + \ldots.$$

№ 4. Показать, что ряд с общим членом $a_n \arcsin \frac{n+1}{n+3} =$ есть расходящийся.

№ 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1\cdot3}{2\cdot5\cdot8}-\frac{3\cdot5}{4\cdot7\cdot10}+\frac{5\cdot7}{6\cdot9\cdot12}-\frac{7\cdot9}{8\cdot11\cdot14}+\dots .$$

Будет ли его сумма зависеть от порядка членов ряда?

№ 6. Составить произведение рядов

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots \quad \text{и}$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}+\dots .$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 7. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x)=\frac{x}{n}\sin x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 8. Исследовать, удовлетворяет ли ряд

$$\frac{1+\sin x}{1}+\frac{1+\sin 2^3x}{2^2}+\frac{1+\sin 3^3x}{3^2}+\dots+\frac{1+\sin n^3x}{n^2}+\dots$$

всем условиям теоремы о дифференцировании функционального ряда.

№ 9. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x)=x\sqrt{1+x}.$$

№ 10. Вычислить сумму степенного ряда

$$\frac{x}{1\cdot3}-\frac{x^3}{3!5}+\frac{x^5}{5!7}-\frac{x^7}{7!9}+\frac{x^9}{9!11}-\dots ,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 11. Написать первые четыре члена разложения в ряд по степеням $x+1$ функции $f(x)=\ln(2+x)$.

№ 12. Вычислить $\sin 36^\circ$ с точностью до 0,001.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

9-й вариант

№ 1. Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\frac{3}{5^2\cdot 7^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Пользуясь теоремой о сравнении рядов, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\frac{5}{17}+\frac{6}{26}+\ldots+\frac{n+1}{n^2+1}+\ldots;$$

$$\text{б) } 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots.$$

№ 3. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{1}{3}+\left(\frac{3}{5}\right)^4+\left(\frac{5}{7}\right)^9+\ldots+\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}+\ldots;$$

$$\text{б) } \frac{2}{2}+\frac{3}{9}+\frac{4}{28}+\ldots+\frac{n+1}{n^3+1}+\ldots;$$

$$\text{в) } a+3!\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^3+5!\cdot\left(\frac{a}{5}\right)^5+7!\cdot\left(\frac{a}{7}\right)^7+\ldots (a>0).$$

№ 4. Доказать, применяя интегральный признак, что ряд с положительными членами Σr^n сходится тогда и только тогда, когда $0<r<1$.

№ 5. Исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{1}{16}+\ldots.$$

Будет ли его сумма зависеть от порядка членов ряда?

№ 6. Составить произведение рядов

$$1-a^2+a^4-a^6+a^8-\ldots+(-1)^{n-1}a^{2n-2}+\ldots$$

$$\text{и } 1+a^2+a^4+a^6+a^8+\ldots+a^{2n-2}+\ldots.$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 7. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность

$$f_n(x)=[1+(-1)^n]\frac{x}{1+nx^2}.$$

Вычертить графики нескольких первых членов последовательности и график предельной функции.

№ 8. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{a-x}{a+x}.$$

№ 9. Исследовать, удовлетворяет ли ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2^2(1+x^2)} + \frac{x^4}{3^2(1+x^4)} + \frac{x^6}{4^2(1+x^6)} + \ldots + \frac{x^{2n-2}}{n^2(1+x^{2n-2})} + \ldots .$$

всем условиям теоремы об интегрировании функционального ряда.

№ 10. Разложить в ряд по степеням $x - 1$ функцию $f(x) = \ln x$.

№ 11. Вычислить сумму степенного ряда

$$1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + \ldots + n^3x^{n-1} + \ldots ,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 12. Вычислить $\sin 15°$ с точностью до 0,001.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

10-й вариант

№ 1. Вычислить сумму числового ряда

$$\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 13} + \frac{1}{13\cdot 19} + \ldots + \frac{1}{(6n-5)(6n+1)} + \ldots ,$$

пользуясь частными суммами и понятием сходящегося ряда.

№ 2. Пользуясь признаками сходимости, исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots ;$$

б) $$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{4}\right)^{-8} + \left(\frac{7}{6}\right)^{-18} + \left(\frac{9}{8}\right)^{-32} + \ldots + \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-2n^2} + \ldots ;$$

в) $$a + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{a^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{a^7}{7} + \ldots (a > 0).$$

№ 3. Показать, что ряд с общим членом $a_n = \ln\frac{8n+1}{4n+2}$ есть расходящийся.

№ 4. Исследовать на абсолютную сходимость следующие ряды:

$$\text{а) } \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} - \frac{2}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{3}{5^2 \cdot 7^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} + \ldots \; ;$$

$$\text{б) } 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \ldots .$$

Если ряды сходятся, то зависит ли их сумма от порядка членов ряда?

№ 5. Составить произведение рядов

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{4^{n-1}} + \ldots \quad \text{и}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots .$$

Вычислить сумму вновь полученного ряда.

№ 6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \ldots .$$

Вычертить графики нескольких первых частных сумм и график суммы ряда.

№ 7. Разложить в ряд по возрастающим степеням x функцию

$$f(x) = \ln^2(1+x).$$

№ 8. Применяя разложение в ряды, найти предел функции

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}.$$

№ 9. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \ldots + \frac{x^n}{2^n} + \ldots$$

и выяснить вопрос о сходимости на концах интервала.

№ 10. Вычислить сумму степенного ряда

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \ldots + n^2 x^{n-1} + \ldots ,$$

пользуясь операциями над рядами.

№ 11. Разложить в ряд по степеням $x - \frac{\pi}{2}$ функцию $f(x) = \sin x$.

№ 12. Вычислить $\cos 15°$ с точностью до 0,001.

Редактор *М. А. Знаменский*
Техн. редактор *М. И. Смирнова*

А-06287 Подписано в печ. 26/IX 1951 г.
Бумага 84×108 1/32 Бум. л. 0,75 Печ. л 2,46
Уч.-узд. л. 2,23 Тир. 6000 экз.
Зак. 2605 Цена 1 руб.

1-я типография Углетехиздата
Мин. угольной промышленности СССР
Москва, Давыдовский пер., 4

ОПЕЧАТКИ

Страница	Номер задачи	Напечатано	Следует читать
4	9(d)	$\lim\limits_{x \to l} \frac{\ln x - 1}{x - l}$	$\lim\limits_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$
9	6 (последняя скобка в числителе)	$(n+1)$	$(2n+1)$
10	7 (вторая строчка)	...функция $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ функция имеет...	...функция $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ имеет...
21	8 (первая строчка)	$f(x) = x_1^2 e^{x^2}$	$f(x) = x^2 e^{x^2}$
43	4	$a_n \arcsin \frac{n+1}{n+3} =$	$a_n = \arcsin \frac{n+1}{n+3}$

А. И. Погорелов, Контрольные работы по математическому анализу.